Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Arno Predonzan

Sugli spazi doppi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 30 (1960), p. 281-287

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__281_0>

SUGLI SPAZI DOPPI

Nota (*) *di* ARNO PREDONZAN (*a Padova*)

1. - In uno spazio proiettivo P_{r+1}, di dimensione $r+1 \geq 3$, costruito sopra un corpo K algebricamente chiuso e di caratteristica $p=0$, si consideri una k^*-ipersuperficie algebrica assolutamente irriducibile V^*, sulla quale si supponga esista un'involuzione I_2^*, d'ordine due e dimensione r, razionale su un sopracorpo algebrico del corpo k^* di definizione di V^*.

È facile constatare che, mediante un'opportuna trasformazione birazionale T, definita su un sopracorpo algebrico k' di k^*, $(k^* \subseteq k' \subset K)$, la k^*-ipersuperficie V^* può mutarsi in una k'-ipersuperficie V di P_{r+1}, il cui relativo ideale $\mathfrak{J}_{k'}(V)$ abbia — in un riferimento affine $X_1, X_2, \dots, X_r, X_{r+1}$ — come base un polinomio dell'anello $k'[X_1, X_2, \dots, X_r, X_{r+1}]$, della forma:

$$X_{r+1}^2 - \delta(X_1, X_2, \dots, X_r), \tag{1}$$

con $\delta(X_1, X_2, \dots, X_r)$ polinomio dell'anello $k'[X_1, X_2, \dots, X_r]$, di grado pari $2n \geq 2$ e privo (in un qualunque sopracorpo algebrico di k') di divisori propri di molteplicità pari; la trasformazione T muta inoltre l'involuzione I_2^* di V^* in quella I_2 di V, nella quale le coppie (x', x'') di punti omologhi sono

---

(*) Pervenuta in Redazione il 16 agosto 1960.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

costituite dai punti $x' = (x_1, x_2, \dots, x_r, x_{r+1})$, $x'' = (x_1, x_2, \dots, x_r, -x_{r+1})$ [1]).

Associando alla coppia (x', x'') della I_2 il punto $x = (x_1,$

---

1) È ovvio che se l'involuzione I_2^* è razionale su un sopracorpo algebrico k_1 di k^*, la k^*-ipersuperficie V^* può, mediante una trasformazione birazionale T_1, definita su k_1, mutarsi in una k_1-V_1, il cui ideale $\mathfrak{J}_{k_1}(V_1)$ ha una base che può scriversi nella forma:

(i) $$\alpha X_{r+1}^2 + 2\beta X_{r+1} + \gamma,$$

con α, β, γ polinomi dell'anello $k_1[X_1, X_2, \dots, X_r]$; sarà inoltre lecito supporre (potendosi ciò ottenere con un'opportuna trasformazione delle coordinate proiettive associate a quelle affini sopra considerate) che i gradi di α, β, γ siano rispettivamente $n_1 - 1$, n_1, $n_1 + 1$, $(n_1 \geq 1)$, e che si abbia:

(i₁) $$b_{n_1}^2 - a_{n_1-1}c_{n_1+1} \neq 0,$$

avendo indicato con a_{n_1-1}, b_{n_1}, c_{n_1+1} i gruppi di termini di grado massimo dei polinomi α, β, γ.

Mediante la trasformazione birazionale T_2, definita su k_1:

(i₂) $$\begin{cases} X_i' = X_i, & (i = 1, 2, \dots, r), \\ X'_{r+1} = \alpha X_{r+1} + \beta, \end{cases}$$

la V_1 si muta in una k_1-ipersuperficie V_2 rappresentata, a norma delle (i), (i₂), da:

(i₃) $$X'^2_{r+1} - \delta_1(X_1' X_2', \dots, X_r'),$$

dove si è posto:

(i₄) $$\delta_1(X_1', X_2', \dots, X_r') = \beta^2 - \alpha\gamma,$$

intendendo ora che α, β, γ siano polinomi nelle indeterminate X_i'.

Se il polinomio δ_1 — che, in virtù della (i₁), ha grado pari $2n_1$ — possiede (in un sopracorpo k' di k_1) dei divisori propri di molteplicità pari, la (i₄) può scriversi:

$$\delta_1(X_1', X_2', \dots, X_r') = \delta(X_1', X_2', \dots, X_r') \cdot \varepsilon^2,$$

con $\delta(X_1', X_2', \dots, X_r')$, ε polinomi di $k'[X_1', X_2', \dots, X_r']$, dei gradi rispettivi $2n \geq 2$, $n_1 - n \geq 1$, il primo dei quali privo di divisori propri di molteplicità pari. Mediante la trasformazione birazionale T_3, definita su k':

$$\begin{cases} X_i = X_i', & (i = 1, 2, \dots, r), \\ X_{r+1} \cdot \varepsilon = X'_{r+1}, \end{cases}$$

la (i₃) si muta nella (1): si conclude che la $T = T_3 . T_2 . T_1$, definita su k', trasforma la k^*-ipersuperficie V^*, inizialmente considerata, in una k'-V soddisfacente alle condizioni volute.

$x_2, \ldots, x_r$) dell'iperpiano $\pi = (X_1, X_2, \ldots, X_r)$ — che, nello spazio P_{r+1}, ha l'equazione $X_{r+1} = 0$ — l'iperpiano stesso viene a trovarsi in corrispondenza algebrica, d'indici [1, 2], con la k'-ipersuperficie V di P_{r+1}, ed i suoi punti x sono le *immagini* delle coppie (x', x'') della I_2: π può atteggiarsi perciò a *spazio doppio* r-dimensionale, la cui *ipersuperficie di diramazione* Δ, immagine della varietà dei punti uniti (in senso invariantivo) della I_2, è quella rappresentata dal polinomio:

(2) $$\delta(X) = \delta(X_1, X_2, \ldots, X_r),$$

che compare nella (1).

Una k''-ipersuperficie F di π risulta immagine, nel senso sopra indicato, di una k-varietà $\bar{F}$ di V, (k corpo congiungente k' e k''), unita nell'involuzione I_2, cioè tale da contenere insieme ad ogni suo punto anche l'omologo di questo nella I_2 stessa.

In questa Nota studieremo il caso in cui $\bar{F}$ si spezzi in due componenti F', F'', omologhe nell'involuzione I_2, tali cioè che $I_2(F') = F''$, ed otterremo — con notevole semplicità — due condizioni necessarie e sufficienti perchè ciò avvenga. Più precisamente otterremo nel n. 2 una condizione di carattere algebrico, mentre nel n. 3 tradurremo la stessa in una condizione di carattere geometrico [2]).

2. - Sia F una k''-ipersuperficie assolutamente irriducibile di π, quindi anche una k-ipersuperficie, (k corpo congiungente quelli k'' e k' di definizione di F e Δ), ed il suo ideale (primo) $\mathfrak{J}_k(F)$ abbia come base il polinomio:

(3) $$f(X) = f(X_1, X_2, \ldots, X_r)$$

dell'anello $k[X] = k[X_1, X_2, \ldots, X_r]$.

---

[2]) Questa condizione di carattere geometrico trovasi già enunciata — nel caso $r = 2$ e quando K è il corpo complesso — in: F. ENRIQUES, G. CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*. (CEDAM, litografie). Di tale condizione viene anche dato un cenno, non però soddisfacente, di dimostrazione poggiante sul concetto di continuità, e precisamente facendo variare in un sistema continuo la curva di diramazione Δ del piano doppio π.

Detto ω il k-omomorfismo canonico di $k[X]$ sull'anello $k[X]/\mathfrak{J}_k(F)$ delle coordinate di F su k, ed indicate con $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ le classi di $X_1, X_2, \dots, X_r$, mod. $\mathfrak{J}_k(F)$, si ha:

$$(4) \qquad k[X] \xrightarrow{(\omega)} k[X]/\mathfrak{J}_k(F) = k[\xi],$$

con $k[\xi] = k[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r]$ anello di polinomi (formali) in $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$, costruito su k.

È noto che $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ può interpretarsi come *punto generico* di F su k, in quanto i punti $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ di F sono *specializzazioni* di ξ su k [3]).

Per la particolare forma del polinomio (1) è ovvio che l'ipersuperficie F di π, rappresentata dalla (3), è immagine di due (distinte) varietà F', F'' di V, omologhe nell'involuzione I_2, se, e soltanto se, esiste un elemento $l(\xi)$ del corpo $\bar{k}(\xi)$, con $\bar{k}$ estensione quadratica di k o, in particolare, $\bar{k} = k$, per cui si abbia:

$$(5) \qquad \delta(\xi) = l(\xi)^2.$$

Posto:

$$(6) \qquad l(\xi) = \frac{\varphi(\xi)}{\psi(\xi)},$$

con $\varphi(\xi)$, $\psi(\xi)$ polinomi (formali) dell'anello $\bar{k}[\xi]$, la (5), in virtù della (6), può scriversi:

$$(5') \qquad \psi(\xi)^2 \cdot \delta(\xi) - \varphi(\xi)^2 = 0,$$

e da questa, a norma del k-omomorfismo ω di cui alla (4),

---

[3]) Più precisamente un *punto generico* di F su k è quello $\lambda(\xi) = (\lambda(\xi_1), \lambda(\xi_2), \dots, \lambda(\xi_r))$, essendo λ un k-isomorfismo di $k[\xi]$ in K: l'esistenza di un tale k-isomorfismo è subordinata al fatto che K abbia grado di trascendenza almeno $r-1$ su k.

discende:

$$\psi(X)^2 \cdot \delta(X) - \varphi(X)^2 \equiv 0, \qquad (\text{mod. } \mathfrak{J}_k(F)), \tag{7}$$

cioè:

$$\psi(X)^2 \cdot \delta(X) - \varphi(X)^2 = g(X) \cdot f(X), \tag{7'}$$

con $g(X) = g(X_1, X_2, \dots, X_r)$ polinomio opportuno dell'anello $k[X]$.

Si conclude che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un'ipersuperficie assolutamente irriducibile F di uno spazio doppio π, di dimensione $r \geq 2$, sul quale è rappresentata doppiamente una varietà V dotata di un'involuzione razionale I_2, sia immagine di due varietà F', F'' di V, omologhe nella I_2 stessa, è che esista una relazione del tipo (7'), *nella quale $f(X)$ e $\delta(X)$ sono i polinomi rappresentativi di F e dell'ipersuperficie di diramazione Δ di π.*

3. - Si consideri l'intersezione completa $W = F \cdot \Delta$, cioè il ciclo positivo omogeneo, di dimensione $r-2$, portato da F:

$$W = \Sigma_j m_j W_j, \tag{8}$$

dove:

$$m_j = i(W_j;\ F \cdot \Delta), \tag{9}$$

e W_j sono le componenti assolutamente irriducibili del Supp $(W) = F \cap \Delta$.

Ammessa la validità della (7'), cioè l'esistenza dei due polinomi $\varphi(X)$, $\psi(X)$ che in essa compaiono, siano $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ i due ideali (a base finita):

$$\mathfrak{J}_1 = (f(X),\ \varphi(X)^2), \qquad \mathfrak{J}_2 = (f(X),\ \psi(X)^2 \cdot \delta(X)).$$

Dalla (7') stessa discende $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2$, dal che agevolmente si deduce che nella (9) deve risultare $m_j = 2n_j$, con n_j intero ≥ 1; la (8) può perciò scriversi:

$$W = 2\Sigma_j n_j W_j. \tag{10}$$

Resta allora definito il ciclo:

$$\frac{1}{2} W = \Sigma_j n_j W_j ,$$

ed in relazione a questo ci proponiamo di verificare — sempre ammessa la validità della (7′) — che:

$$\frac{1}{2} W \simeq F \cdot \Delta_{1/2} , \tag{11}$$

dove il simbolo $\simeq$ indica equivalenza lineare (di cicli) su F, e $\Delta_{1/2}$ è un'ipersuperficie di π, d'ordine n metà di quello $2n$ di Δ, non avente F come componente.

Dette Φ, Ψ le ipersuperficie di π rappresentate rispettivamente dai polinomi φ, ψ, e supposta scritta la (7′) in coordinate omogenee, l'ordine di Φ vale $n+s$, appena sia s quello di Ψ.

Sia Ω il sistema lineare di ipersuperficie H_i di π, dell'ordine $n+s$, per le quali si abbia $F \cdot H_i = F \cdot \Psi + L_i$, con L_i ciclo portato da F, variabile al variare di H_i in Ω: al sistema Ω appartengono ovviamente l'ipersuperficie Φ e tutte le H_i spezzate nella Ψ ed in una qualunque $\Delta_{1/2}$; e ciò ci assicura la validità della (11).

Supponiamo ora che, viceversa, valgano le (10), (11). Si scelga un'ipersuperficie Ψ di π, aggiunta ad F, e d'ordine s sufficientemente alto in guisa che le aggiunte Φ_i^*, d'ordine $n+s$, siano tali che il sistema lineare Σ^* di cicli $F \cdot \Phi^*$, portati da F, sia completo. È allora completo anche il sistema lineare Σ di cicli $F \cdot \Phi_h$, essendo Φ_h quelle delle Φ^* per cui si ha $F \cdot \Phi_h = F \cdot \Psi + M_h$, con M_h ciclo portato da F. Ma poichè per ipotesi vale la (11), ed il sistema Σ è completo, deve esistere tra la Φ_h una particolare Φ per cui sia $F \cdot \Phi = F \cdot \Psi + \frac{1}{2} W$, e da questa segue immediatamente una relazione del tipo della (7′).

Possiamo pertanto affermare che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un'ipersuper-

ficie assolutamente irriducibile F di uno spazio doppio π, di dimensione $r \geq 2$, sul quale è rappresentata doppiamente, con ipersuperficie di diramazione Δ, una varietà V dotata di un'involuzione razionale I_2, sia immagine di due varietà F', F'' di V, omologhe nella I_2 stessa, è che:

a) *ogni componente W_j del ciclo positivo omogeneo $W = F \cdot \Delta$, divisore di F, abbia molteplicità pari; cioè si abbia $W = 2\Sigma_j n_j W_j$.*

b) *il ciclo $\frac{1}{2} W = \Sigma_j n_j W_j$ risulti linearmente equivalente su F a quelli determinati dalle ipersuperficie di π d'ordine metà di quello dell'ipersuperficie di diramazione Δ* [4]).

[4]) Questo teorema — nel caso $r = 3$ — è stato già adoperato dall'A. in: *Alcune questioni di separabilità*, Rend. Sem. Mat. di Padova, v. XXX, (1960).