Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Bruno Pini

Sulle equazioni lineari pseudoparaboliche, I

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 30 (1960), p. 255-280

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__255_0>

SULLE EQUAZIONI LINEARI PSEUDOPARABOLICHE, *I*

Nota (*) *di* BRUNO PINI (*a Bologna*)

1. - *Introduzione.*

Consideriamo l'equazione

$$(1) \qquad \mathfrak{L}[u] = \sum_{0}^{q}{}_h \frac{\partial^{nh}}{\partial y^{nh}} \mathfrak{L}_{m(q-h)}[u] = 0$$

con m ed n primi tra loro ed $m > n$, essendo $\mathfrak{L}_{m(q-h)}$ una forma differenziale lineare d'ordine $m(q-h)$ nelle derivate $\partial/\partial x_j$, $j = 1, 2, \ldots, r$, a coefficienti costanti reali

$$(2) \qquad \mathfrak{L}_{m(q-h)} = \sum_{\sum_{1}^{r}{}_j k_j = m(q-h)} a^{(m(q-h))}_{k_1 k_2 \ldots k_r} \frac{\partial^{m(q-h)}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_r^{k_r}} .$$

Indicando con E_r lo spazio euclideo reale r-dimensionale, con $x, s, \ldots$ le r-ple $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$, $(s_1, s_2, \ldots, s_r)$, $\ldots$, poniamo

$$< x \cdot s > = \sum_{1}^{r}{}_k x_k s_k$$

e, per x, $s \in E_r$,

$$\tilde{\varphi}(s) = \int_{E_r} e^{i < x.s >} \varphi(x) dx \qquad (\varphi(x) \in L_1(x)).$$

(*) Pervenuta in Redazione il 19 luglio 1960.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

Consideriamo l'*immagine di Fourier* della (1)

$$(3)\quad \sum_{h}^{q}{}_{0} (-i)^{m(q-h)}\Big(\sum_{\sum_{1}^{r} {}_j k_j = m(q-h)} a_{k_1 \dots k_r}^{(m(q-h))} s_1^{k_1} \dots s_r^{k_r}\Big) \frac{d^{nh}\tilde{u}}{dy^{nh}} = 0$$

e l'equazione caratteristica associata

$$(4)\quad \sum_{h}^{q}{}_{0} (-i)^{m(q-h)}\Big(\sum_{\sum_{1}^{r} {}_j k_j = m(q-h)} a_{k_1 \dots k_r}^{(m(q-h))} s_1^{k_1} \dots s_r^{k_r}\Big)\lambda^{nh} = 0 \,.$$

Posto, per $s \in E_r$,

$$\| s \| = \Big(\sum_{1}^{r}{}_k s_k^2 \Big)^{1/2}$$

e

$$\lambda = \| s \|^{\frac{m}{n}} \mu ,$$

dalla (4) si ha

$$(5)\quad \sum_{h}^{q}{}_{0} (-i)^{m(q-h)}\Big(\sum_{\sum_{1}^{r} {}_j k_j = m(q-h)} a_{k_1 \dots k_r}^{(m(q-h))} \Big(\frac{s_1}{\| s \|}\Big)^{k_1} \dots \Big(\frac{s_r}{\| s \|}\Big)^{k_r} \Big)\mu^{nh} = 0.$$

Se esiste un $\rho > 0$ tale che per s variabile in E_r riesce

$$\mathcal{R}e\,\mu < -\rho$$

qualunque sia la radice μ di (5), la (1) è un'equazione *fortemente parabolica,* o parabolica regolare secondo la terminologia di Petrowski.

Se

$$\mathcal{R}e\,\mu \leq 0$$

qualunque sia la radice μ di (5), diremo che la (1) è *debolmente parabolica*.

Indicheremo nel seguito con D_x^h e D^k una derivazione $\partial^h / \partial x_1^{h_1} \dots \partial x_r^{h_r}$ per $h_1 + h_2 + \dots + h_r = h$ e la derivazione $\partial^k / \partial y^k$.

Nel caso che la (1) sia fortemente parabolica è stato ampiamente studiato il problema di Cauchy

$$(6) \quad \begin{cases} \mathfrak{L}[u] = 0, & \text{per} \quad y > y_1 \\ D_y^j u(x, y_1 + 0) = f_j(x). & j = 0, 1, \dots, nq - 1. \end{cases}$$

Tale problema è ben posto anche nel caso che la (1) sia debolmente parabolica.

Nella presente Nota prendiamo in considerazione la (1) nell'ipotesi che la (5) abbia un certo numero di radici a parte reale negativa e le restanti a parte reale positiva: diremo allora che la (1) è *pseudoparabolica regolare*: diremo che la (1) è *pseudoparabolica non regolare* se la (5) ha un certo numero di radici a parte reale positiva, un certo numero a parte reale negativa e le restanti a parte reale nulla.

Casi particolari di equazioni pseudoparaboliche sono già stati considerati [1]).

Per tali equazioni il problema (6) non risulta più un problema sempre ben posto. Per provare ciò, evitando condizioni di convergenza all'infinito, consideriamo per esempio il problema misto

$$\mathfrak{L}[u] = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{per} \quad 0 < y \leq h, \qquad 0 < x < 1$$

$$u(x, 0+) = f(x), \quad D_y u(x, 0+) = g(x), \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(j, y) = \varphi_j(y), \quad D_x^2 u(j, y) = \psi_j(y), \quad j = 0, 1, \quad 0 \leq y \leq h.$$

Supponiamo $f \in C_2$, $g \in C$, $\varphi_j \in C_1$, $\psi_j \in C$, $f(0) = \varphi_0(0)$,

---

[1]) B. PINI. *Un problema di valori al contorno per l'equazione* $\partial^4 u/\partial x^4 - \partial^2 u/\partial y^2 = 0$, Rend. Acc. Naz. Lincei, VIII. 14 (1953): *Sulle equazioni lineari del quarto ordine in due variabili con caratteristiche coincidenti.* Nota I. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 8 (1958-59) e Nota II, Ibidem, 9 (1959-60).

M. NICOLESCO. *Sur un type de problème bilocal pour les équations aux dérivées partielles.* Annali Mat. pura appl., IV, 49 (1960).

$f''(0) = \psi_0(0)$, $f(1) = \varphi_1(0)$, $f''(1) = \psi_1(0)$, $g(0) = \varphi_0'(0)$, $g(1) = \varphi_1'(0)$. Poichè

$$\mathfrak{L} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\right),$$

tenendo presente la regolarità imposta ai dati, potremmo risolvere inizialmente il problema

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{per} \quad 0 < y \leq h, \quad 0 < x < 1$$
$$v(x,\ 0+) = f''(x) + g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$
$$v(j,\ y) = \psi_j(y) + \varphi_j'(y), \quad j = 0,\ 1, \quad 0 \leq y \leq h,$$

si è così ricondotti al problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} = v \quad \text{per} \quad 0 < y \leq h, \quad 0 < x < 1$$
$$u(j,\ y) = \varphi_j(y), \quad 0 \leq y \leq h, \quad j = 0,\ 1$$
$$u(x,\ 0+) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

che non è un problema ben posto.

Se i dati sono convenientemente regolari il problema di Cauchy [2]) per le equazioni di cui stiamo trattando può avere soluzione.

---

[2]) Per condizioni generali di unicità relative al problema di CAUCHY

$$\frac{\partial u(x,\ y)}{\partial y} = L\left(\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x},\ y\right)u(x,\ y)$$
$$u(x,\ 0) = u(x)$$

cfr. I. M. GEL'FAND e G. E. ŠILOV, *Trasformate di Fourier di funzioni rapidamente crescenti e questioni di unicità della soluzione del problema di Cauchy*, Uspehi Mat. Nauk (N. S.) 8, n. 6 (58) (1953) (in russo); A. G. KOSTYUCENKO e G. E. ŠILOV, *Sulla soluzione del problema di Cauchy per sistemi regolari di equazioni lineari a derivate parziali*, Uspehi Mat. Nauk (N. S.) 9, n. 3 (61) (1954) (in russo); V. M. BOROK, *Il problema di Cauchy per certi tipi di sistemi di equazioni lineari a derivate parziali*, Mat. Sbornik, N. S., 36 (78) (1955) (in russo).

Per esempio consideriamo il problema

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$u(x,\ 0+) = f(x), \quad D_y u(x,\ 0+) = g(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono indefinitamente derivabili ed esiste una costante positiva M tale che per $n = 0,\ 1,\ \ldots$

$$\left(\frac{1}{(2n)!} \left| D_x^{4n} f(x) \right| \right)^{\frac{1}{2n}} < M, \qquad \left(\frac{1}{(2n+1)!} \left| D_x^{4n} g(x) \right| \right)^{\frac{1}{2n+1}} < M,$$

per $-\infty < x < +\infty$, allora la funzione

$$u(x,\ y) = \sum_0^\infty {}_n \left[\frac{1}{(2n)!} (D_x^{4n} f) y^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!} (D_x^{4n} g) y^{2n+1}\right]$$

è soluzione del problema posto almeno per $|y| < \dfrac{1}{M}$.

Supponiamo che la (5) abbia M radici α_j con $\mathcal{R}e\ \alpha_j < 0$ ed N radici β_j con $\mathcal{R}e\ \beta_j > 0$, $M + N = nq$; appare ben posto il seguente problema

$$\text{(7)} \quad \begin{cases} \mathfrak{L}[u] = 0 \quad \text{per} \quad y_1 < y < y_2 \\ D_y^j u(x,\ y_1 + 0) = f_j(x), \quad j = 0,\ 1, \ldots\ M - 1 \\ D_y^j u(x,\ y_2 - 0) = \varphi_j(x), \quad j = 0,\ 1, \ldots,\ N - 1. \end{cases}$$

2. - ***Un problema ben posto per le equazioni pseudoparaboliche.***

Per semplicità ci limitiamo a studiare il problema (7) nel caso che in $\mathfrak{L}$ figurino solo il gruppo dei termini di ordine

più elevato nelle $\partial/\partial x_j$ e quello di ordine più elevato in $\partial/\partial y$; scriveremo

$$\mathfrak{L}[u] = \mathfrak{L}_m[u] - \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \tag{8}$$

$$= \sum_{\substack{r \\ \Sigma_1 k_j = m}} a_{k_1 \dots k_r} \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_r^{k_r}} - \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = 0$$

con $m > n$ ma m ed n non necessariamente primi tra loro.

La (3) è allora

$$\frac{d^n \tilde{u}}{dy^n} = (-i)^m \left(\sum_{\substack{r \\ \Sigma_1 k_j = m}} a_{k_1 \dots k_r} s_1^{k_1} \dots s_r^{k_r} \right) \tilde{u}. \tag{9}$$

Supponiamo m pari e, indicando con $P(s)$ la somma al secondo membro, supponiamo che $P(s)$ sia una forma definita, per esempio positiva.

Nel caso che n sia anch'esso pari, affinchè l'equazione

$$\lambda^n = (-i)^m P(s)$$

abbia tutte le radici con parte reale diversa da zero si dovrà supporre che m sia divisibile per 4 e $n = 2(2\nu + 1)$, $\nu = 0, 1 \dots$ o viceversa: in questo caso vi saranno $n/2$ radici con parte reale positiva e $n/2$ radici con parte reale negativa.

Nel caso che n sia dispari, posto $n = 2\nu + 1$, vi saranno ν radici a parte reale positiva [negativa] e $\nu + 1$ radici a parte reale negativa [positiva] se ν è dispari [pari] ed m è divisibile per 4: il contrario se m è divisibile soltanto per 2.

Il problema (7) si trasforma in

$$\begin{cases} \dfrac{d^n \tilde{u}}{dy^n} = (-1)^{\frac{m}{2}} P(s) \tilde{u} & \text{per} \quad y_1 < y < y_2 \\[2ex] \dfrac{d^j}{dy^j} \tilde{u}(s, y_1) = \tilde{f}_j(s), & j = 0, 1, \dots, M-1 \\[2ex] \dfrac{d^j}{dy^j} \tilde{u}(s, y_2) = \tilde{\varphi}_j(s), & j = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \tag{10}$$

Si ha che:

Se c è una costante positiva [negativa] ed $n = 2\nu + 1$ $[n = 2\nu]$, il problema

$$\frac{d^{2n}z}{dt^{2n}} - cz = 0 \qquad per \quad \alpha < t < \beta$$

$$\frac{d^j z(\alpha)}{dt^j} = \frac{d^j z(\beta)}{dt^j} = 0, \qquad j = 0, 1, \dots, n-1$$

ha la sola soluzione nulla.

Ciò segue dall'identità

$$\int_\alpha^\beta z\left(\frac{d^{2n}z}{dt^{2n}} - cz\right)dt = \left[\sum_0^{n-1}{}_k (-1)^k \frac{d^k z}{dt^k}\frac{d^{2n-k-1}z}{dt^{2n-k-1}}\right]_\alpha^\beta +$$

$$+ \int_\alpha^\beta \left[(-1)^n \left(\frac{d^n z}{dt^n}\right)^2 - cz^2\right] dt.$$

Analogamente:

Se c è una costante positiva, $n = 2\nu + 1$, il problema

$$\frac{d^n z}{dt^n} - cz = 0 \qquad per \quad \alpha < t < \beta$$

$$\frac{d^j z(\alpha)}{dt^j} = 0 \qquad per \quad j = 0, 1, \dots, \nu,$$

$$\frac{d^j z(\beta)}{dt^j} = 0 \qquad per \quad j = 0, 1, \dots, \nu - 1, \qquad se\ \nu\ \grave{e}\ dispari,$$

$$\frac{d^j z(\alpha)}{dt^j} = 0 \qquad per \quad j = 0, 1, \dots, \nu - 1,$$

$$\frac{d^j z(\beta)}{dt^j} = 0 \qquad per \quad j = 0, 1, \dots, \nu, \qquad se\ \nu\ \grave{e}\ pari,$$

ha la sola soluzione nulla.

Infatti

$$\int_\alpha^\beta z\left(\frac{d^{2\nu+1}z}{dt^{2\nu+1}} - cz\right)dt = \left[\sum_0^{\nu-1}{}_k (-1)^k \frac{d^k z}{dt^k}\frac{d^{2\nu-k}z}{dt^{2\nu-k}} + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^\nu}{2}\left(\frac{d^\nu z}{dt^\nu}\right)^2\right]_\alpha^\beta - c\int_\alpha^\beta z^2 dt,$$

da cui

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^\nu z(\beta)}{dt^\nu}\right)^2 + c\int_\alpha^\beta z^2 dt = 0$$

se ν è dispari,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^\nu z(\alpha)}{dt^\nu}\right)^2 + c\int_\alpha^\beta z^2 dt = 0$$

se ν è pari; quindi in ogni caso $z \equiv 0$.

Pertanto il problema (10) ha una sola soluzione per ogni $s \neq 0$.

Per fissare le idee consideriamo il caso di $n = 2(2\nu + 1)$, $m = 4m'$; riesce $M = N = 2\nu + 1$.

Siano $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ le radici n-sime dell'unità, onde, posto

$$(P(s))^{1/n} = \omega(s),$$

si ha

$$\tilde{u}(s, y) = \sum_1^n{}_k c_k \exp(\omega(s) y \gamma_k);$$

conveniamo che $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2\nu+1}$ abbiano parte reale negativa, $\gamma_{2\nu+2}, \ldots, \gamma_n$ abbiano parte reale positiva; per comodità assumiamo $y_1 = 0$, $y_2 = \delta$.

Indichiamo con $\Delta(s)$ il determinante di ordine n la cui colonna di posto $j\,(= 1, 2, \ldots, n)$ è quella costituita ordinatamente dai termini

$$1,\ \gamma_j\omega, \ldots, (\gamma_j\omega)^{2\nu},\ \exp(\gamma_j\omega\delta),\ \gamma_j\omega\exp(\gamma_j\omega\delta), \ldots, (\gamma_j\omega)^{2\nu}\exp(\gamma_j\omega\delta).$$

Per il teorema di unicità indicato sopra è $\Delta(s) \neq 0$ per $s \neq 0$. Pertanto

$$\tilde{u}(s, y) = \sum_{1}^{2\nu+1}{}_k\, (-1)^k \left[\frac{\Delta'_k(s, y)}{\Delta(s)} \tilde{f}_{k-1}(s) - \frac{\Delta''_k(s, y)}{\Delta(s)} \tilde{\varphi}_{k-1}(s)\right],$$

avendo indicato con $\Delta'_k(s, y)$ il determinante ottenuto da Δ sopprimendo la riga di posto $k\ (= 1, 2, \ldots, 2\nu + 1)$ e aggiungendo all'ultimo posto la riga

$$\exp(\gamma_1\omega y),\quad \exp(\gamma_2\omega y), \ldots,\quad \exp(\gamma_n\omega y)$$

e con $\Delta''_k(s, y)$ il determinante ottenuto da Δ sopprimendo la riga di posto $2\nu + k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots, 2\nu + 1)$ e aggiungendo all'ultimo posto la riga indicata sopra.

Proviamo che:

Se $f_k(x), \varphi_k(x) \in L_1(x) \cap C(x)$; $\tilde{f}_k(s), \tilde{\varphi}_k(s) \in L_1(s)$; $\tilde{f}_k(s), \tilde{\varphi}_k(s) = 0\left(\| s \|^{\frac{m}{n}(k-2\nu)}\right)$ *per* $\| s \| \to +\infty$, *la funzione*

$$(11)\quad u(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{E_r} e^{-i\langle x\cdot s\rangle} \sum_{1}^{2\nu+1}{}_k\, (-1)^k \left[\frac{\Delta'_k(s, y)}{\Delta(s)} \tilde{f}_{k-1}(s) - \frac{\Delta''_k(s, y)}{\Delta(s)} \tilde{\varphi}_{k-1}(s)\right] ds$$

è soluzione del problema

$$(7')\quad \begin{cases} \mathfrak{L}_m{}'u] = \dfrac{\partial^n u}{\partial y^n} & per \quad 0 < y < \delta \\ D_y^j u(x, 0+) = f_j(x), & j = 0, 1, \ldots, 2\nu \\ D_y^j u(x, \delta-) = \varphi_j(x), & j = 0, 1, \ldots, 2\nu. \end{cases}$$

Il determinante Δ, sostituendo gli esponenziali coi corrispondenti sviluppi in serie di potenze di ω e togliendo da ciascuna delle ultime $2\nu+1$ righe opportune combinazioni lineari delle prime $2\nu+1$, si può scrivere come quello la cui colonna j-sima è costituita ordinatamente dai termini

$$1,\ \gamma_j\omega, \ldots, (\gamma_j\omega)^{2\nu}, \sum_{2\nu+1}^{4\nu+1}{}_k\, \gamma_j^k \sum_0^\infty{}_h \frac{(\omega\delta)^{k+h(4\nu+2)}}{[k+h(4\nu+2)]!}, \ldots, \sum_{2\nu+1}^{4\nu+1}{}_k\, \gamma_j^k \sum_0^\infty{}_h \frac{(\omega\delta)^{k+h(4\nu+2)}}{[k-2\nu+h(4\nu+2)]!}\cdot\frac{1}{\delta^{2\nu}},$$

e quindi

$$\Delta = \omega^{\nu(2\nu+1)}\mathfrak{V}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{4\nu+2}) \begin{vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1,2\nu+1} \\ \cdots & \cdots \\ a_{2\nu+1,1} \ldots & a_{2\nu+1,2\nu+1} \end{vmatrix} \frac{1}{\delta^{\nu(2\nu+1)}}.$$

dove $\mathfrak{V}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{4\nu+2})$ è il determinante di Vandermonde di $\gamma_1, \ldots, \gamma_{4\nu+2}$ (nell'ordine) e

$$a_{hk} = \sum_0^\infty{}_j \frac{(\omega\delta)^{j(4\nu+2)+2\nu+k}}{[j(4\nu+2)+2\nu+1+k-h]!}.$$

Si ha

$$\Delta = \begin{cases} O(\omega^{2\nu(2\nu+1)}\mathfrak{V}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{2\nu+1})\mathfrak{V}(\gamma_{2\nu+2}, \ldots, \gamma_{4\nu+2}) \exp(\sum_{2\nu+2}^{4\nu+2}{}_j\, \gamma_j\omega\delta)) \\ \qquad\qquad \text{per } \|s\| \to +\infty \\ O(\omega^{(4\nu+1)(2\nu+1)}\mathfrak{V}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{4\nu+2}) \begin{vmatrix} \frac{1}{(2\nu+1)!}, \ldots, \frac{1}{(4\nu+1)!} \\ \cdots\cdots \\ \frac{1}{1!}, \ldots, \frac{1}{(2\nu+1)!} \end{vmatrix} \delta^{(2\nu+1)^2}) \\ \qquad\qquad \text{per } \|s\| \to 0 \end{cases}$$

ossia

$$\Delta = \begin{cases} 0(\| s \|^{\frac{m}{n} 2\nu(2\nu+1)} \exp(\sum_{2\nu+2}^{4\nu+2} {}_j \gamma_j \omega\delta)) & \text{per} \quad \| s \| \to +\infty \\ 0(\| s \|^{\frac{m}{n}(4\nu+1)(2\nu+1)}) & \text{per} \quad \| s \| \to 0. \end{cases}$$

Se si sviluppa Δ'_k per gli elementi dell'ultima riga e successivamente ognuno dei complementari di tali elementi per i minori d'ordine $2\nu + 1$ contenuti nelle ultime $2\nu + 1$ righe, se si conviene che sia $\mathcal{R}e\gamma_1 \leq \mathcal{R}e\gamma_2 \leq \ldots \leq \mathcal{R}e\gamma_{2\nu+1}$, tenendo anche presente che il determinante ottenuto da $\mathcal{V}(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2\nu+1})$ sopprimendo la riga di posto k e la colonna di posto j è eguale a $\mathcal{V}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1}, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_{2\nu+1})$ moltiplicato per la somma dei prodotti delle $\gamma_1, \ldots, \gamma_{j-1}, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_{2\nu+1}$ prese a $2\nu + 1 - k$ a $2\nu + 1 - k$, si ha per $\| s \| \to +\infty$

$$\Delta'_k = 0(\| s \|^{\frac{m}{n}[2\nu(2\nu+1)+1-k]} \exp(\gamma_{2\nu+1}\omega y) \exp(\sum_{2\nu+2}^{4\nu+2} {}_j \gamma_j \omega\delta)).$$

Aggiungendo in Δ'_k a ciascuna delle ultime $2\nu + 2$ righe opportune combinazioni lineari delle prime 2ν, alla riga di posto $2\nu + 1$ l'ultima moltiplicata per un opportuno fattore, alla riga di posto $2\nu + 2$ una opportuna combinazione della riga di posto $2\nu + 1$ e dell'ultima, ecc. si riconosce che

$$\Delta'_k = 0(\| s \|^{\frac{m}{n}(2\nu+1)(4\nu+1)}) \quad \text{per} \quad \| s \| \to 0.$$

Pertanto

$$(12) \qquad \frac{\Delta'_k}{\Delta} = \begin{cases} 0(\| s \|^{\frac{m}{n}(1-k)} \exp(\gamma_{2\nu+1}\omega y)) & \text{per} \quad \| s \| \to +\infty \\ 0(1) & \text{per} \quad \| s \| \to 0. \end{cases}$$

Analogamente, convenendo che sia $\mathcal{R}e\gamma_{2\nu+2} \leq \mathcal{R}e\gamma_{2\nu+3} \leq \leq \ldots \leq \mathcal{R}e\gamma_{4\nu+2}$, si ha

$$\Delta_k'' = 0(\| s \|^{\frac{m}{n}[2\nu(2\nu+1)+1-k]} \exp(\gamma_{2\nu+2}\omega y) \exp \sum_{2\nu+3}^{4\nu+2}{}_j \gamma_j \omega \delta)$$

$$\text{per} \quad \| s \| \to +\infty$$

$$\Delta_k'' = 0(\| s \|^{\frac{m}{n}(2\nu+1)(4\nu+1)}) \quad \text{per} \quad \| s \| \to 0,$$

onde

$$(13) \quad \frac{\Delta_k''}{\Delta} = \begin{cases} 0(\| s \|^{\frac{m}{n}(1-k)} \exp(-\gamma_{2\nu+2}\omega(\delta - y))) & \text{per } \| s \| \to +\infty \\ 0(1) & \text{per } \| s \| \to 0. \end{cases}$$

Esaminiamo il comportamento di (11) per $y \to 0+$; per $y \to \delta-$ le considerazioni sono del tutto simili.

Si ha

$$(14) \qquad \begin{cases} \Delta_1'(s, 0) = -\Delta(s) \\ \Delta_k'(s, 0) = 0, \qquad k = 2, \ldots, 2\nu+1 \\ \Delta_k''(s, 0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 2\nu+1. \end{cases}$$

Da (13) e (14), essendo $\tilde{\varphi}_k(s) \in L_1(s)$, segue

$$\lim_{y \to 0+} \int_{E_r} e^{-i<x \cdot s>} \frac{\Delta_k''(s, y)}{\Delta(s)} \tilde{\varphi}_{k-1}(s) ds = 0.$$

Essendo $f_0(x) \in L_1(x) \cap C(x)$ e $\tilde{f}_0(s) \in L_1(s)$ dalla (12) e dalla prima delle (14) segue

$$\lim_{y \to 0+} \int_{E_r} e^{-i<x \cdot s>} \cdot \frac{-\Delta_1'(s, y)}{\Delta(s)} \tilde{f}_0(s) ds =$$

$$= f_0(x) - \lim_{y \to 0+} \int_{E_r} e^{-i<x \cdot s>} \left(\frac{\Delta_1'(s, y)}{\Delta(s)} - 1 \right) \tilde{f}_0(s) ds = f_0(x).$$

Poichè $\tilde{f}_k(s) \in L_1(s)$ dalle (12) e (14) segue

$$\lim_{y \to 0+} \int_{E_r} e^{-i<x.s>} \frac{\Delta'_k(s,\ y)}{\Delta(s)} \tilde{f}_{k-1}(s) ds = 0, \quad k = 2, \dots,\ 2\nu + 1.$$

Si ha poi

$$\frac{\partial^l}{\partial y^l} \Delta'_k = 0(\| s \|^{\frac{m}{n}[2\nu(2\nu+1)+1-k+l]} \exp(\gamma_{2\nu+1}\omega y) \exp(\sum_{2\nu+2}^{4\nu+2}{}_j \gamma_j \omega \delta)) \qquad \text{per} \quad \| s \| \to +\infty$$

e, per $l \leq 4\nu + 1$,

$$\frac{\partial^l}{\partial y^l} \Delta'_k = 0(\| s \|^{(2\nu+1)(4\nu+1)\frac{m}{n}}) \qquad \text{per} \quad \| s \| \to 0,$$

onde per $l = 1, 2, \dots, 2\nu$,

$$(15) \quad \frac{1}{\Delta} \frac{\partial^l}{\partial y^l} \Delta'_k = \begin{cases} 0(\| s \|^{\frac{m}{n}(1-k+l)} \exp(\gamma_{2\nu+1}\omega y)) & \text{per } \| s \| \to +\infty \\ 0(1) & \text{per } \| s \| \to 0. \end{cases}$$

È inoltre

$$(16) \quad \frac{\partial^l}{\partial y^l} \Delta'_k(s,\ 0) = \begin{cases} 0 & \text{per } l \neq k - 1 \\ (-1)^k \Delta(s) & \text{per } l = k - 1 \end{cases}, \quad l = 1,\ 2, \dots,\ 2\nu.$$

Infine

$$\frac{\partial^l}{\partial y^l} \Delta''_k = 0(\| s \|^{\frac{m}{n}[2\nu(2\nu+1)+1-k+l]} \exp(\gamma_{2\nu+2}\omega y) \exp(\sum_{2\nu+3}^{4\nu+2}{}_j \gamma_j \omega \delta)) \qquad \text{per} \quad \| s \| \to +\infty$$

e, per $l \leq 4\nu + 1$,

$$\frac{\partial^l}{\partial y^l} \Delta''_k = 0(\| s \|^{\frac{m}{n}(2\nu+1)(4\nu+1)}) \qquad \text{per} \quad \| s \| \to 0,$$

onde, per $l = 1, 2, \ldots, 2\nu$,

$$(17) \qquad \frac{1}{\Delta}\frac{\partial^l}{\partial y^l}\Delta_k'' = \begin{cases} 0(\| s \|^{\frac{m}{n}(1-k+l)} \exp[-\gamma_{2\nu+2}\omega(\delta - y)]) & \text{per} \quad \| s \| \to +\infty \\ 0(1) & \text{per} \quad \| s \| \to 0 \end{cases}$$

e inoltre

$$(18) \qquad \frac{1}{\Delta}\frac{\partial^l}{\partial y^l}\Delta_k''(s, 0) = 0 \qquad \text{per} \quad l = 1, 2, \ldots, 2\nu.$$

Dalla (11) si deduce

$$\frac{\partial^l u(x, y)}{\partial y^l} = \frac{1}{(2\pi)^r}\int_{E_r} e^{-i<x\cdot s>} \sum_{1}^{2\nu+1}{}_k (-1)^k \left[\frac{1}{\Delta(s)}\frac{\partial^l}{\partial y^l}\Delta_k'(s, y)\tilde{f}_{k-1}(s) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\Delta(s)}\frac{\partial^l}{\partial y^l}\Delta_k''(s, y)\tilde{\varphi}_{k-1}(s)\right] ds.$$

Da (17) e (18) segue

$$\lim_{y \to 0+} \int_{E_r} e^{-i<x\cdot s>} \frac{1}{\Delta(s)}\frac{\partial^l}{\partial y^l}\Delta_k''(s, y)\tilde{\varphi}_{k-1}(s) ds = 0 \quad \text{per} \quad l = 1, 2, \ldots, 2\nu.$$

Da (15) e (16)

$$\lim_{y \to 0+} \int_{E_r} e^{-i<x\cdot s>} \frac{1}{\Delta(s)} \frac{\partial^l \Delta_k'(s, y)}{\partial y^l}\tilde{f}_{k-1}(s) ds = 0$$
$$\text{per} \quad l = 1, 2, \ldots, k-2.$$

Per $l = k-1$, poichè $f_l(x) \in L_1(x) \cap C(x)$, $\tilde{f}_l(s) \in L_1(s)$, si ha

$$\lim_{y \to 0+} \frac{1}{(2\pi)^r}\int_{E_r} e^{-i<x\cdot s>} \frac{(-1)^{l+1}}{\Delta(s)} \frac{\partial^l \Delta_{l+1}'(s, y)}{\partial y^l}\tilde{f}_l(s) ds = f_l(x) +$$
$$+ \lim_{y \to 0+} \frac{1}{(2\pi)^r}\int_{E_r} e^{-i<x\cdot s>} \left[\frac{(-1)^{l+1}}{\Delta(s)} \frac{\partial^l \Delta_{l+1}'(s, y)}{\partial y^l} - 1\right] \tilde{f}_l(s) ds = f_l(x).$$

Infine, essendo $\tilde{f}_k(s) = 0\,(\| s \|^{\frac{m}{n}(k-2\nu)})$ per $\| s \| \to +\infty$, si ha

$$\lim_{y \to 0+} \int_{E_r} e^{-i<x,s>} \frac{1}{\Delta(s} \frac{\partial^l \Delta'_k(s,\ y)}{\partial y^l} \tilde{f}_{k-1}(s)ds = 0, \quad l = k,\ k+1, \ldots,\ 2\nu.$$

3. - *Un teorema di unicità.*

Cominciamo con l'osservare che il problema (7) con $f_j(x) = \varphi_j(x) = 0$ può avere soluzioni non nulle.

Per esempio il problema

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{per } 0 < y < \delta$$
$$u(x,\ 0+) = u(x,\ \delta -) = 0 \qquad \text{per } - < x < +\infty$$

ha le infinite soluzioni (non nulle)

$$u(x,\ y) = \cos\left(\sqrt{\frac{k\pi}{2\delta}}\,x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\delta}\,y\right) \exp\left(\sqrt{\frac{k\pi}{2\delta}}\,x\right)$$
$$u(x,\ y) = \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{k\pi}{2\delta}}\,x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi}{\delta}\,y\right) \exp\left(\sqrt{\frac{k\pi}{2\delta}}\,x\right)$$

per $k = 1,\ 2,\ \ldots$.

Vogliamo qui di seguito assegnare delle condizioni che assicurino l'unicità della soluzione del problema (7').

Tornando all'equazione (1), poniamo

$$(1^*) \qquad \mathfrak{L}^*[v] = \sum_0^q{}_h\, (-1)^{m(q-h)+nh} \frac{\partial^{nh}}{\partial y^{nh}} \mathfrak{L}_{m(q-h)}[v].$$

Si ha

$$(19) \quad v\mathfrak{L}[u] - u\mathfrak{L}^*[v] = \sum_1^q{}_h \frac{\partial}{\partial y}\left(\sum_0^{nh-1}{}_j\, (-1)^j \frac{\partial^j v}{\partial y^j} \frac{\partial^{nh-j-1}}{\partial y^{nh-j-1}} \mathfrak{L}_{m(q-h)}[u]\right) -$$
$$-\sum_0^{q-1}{}_h\, (-1)^{m(q-h)+nh} \sum_{\sum_1^r{}_j k_j = m(q-h)} a^{(m(q-h))}_{k_1 \ldots k_r} \sum_1^r{}_t \frac{\partial}{\partial x_t}\left(\sum_0^{k_t-1}{}_j\, (-\right.$$
$$\left. -1)^{k_1+\ldots+k_{t-1}+j} \cdot \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_{t-1}+j} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_{t-1}^{k_{t-1}} \partial x_t^j} \cdot \frac{\partial^{m(q-h)+nh-k_1-\ldots-k_{t-1}-j-1} v}{\partial x_t^{k_t-j-1} \partial x_{t+1}^{k_{t+1}} \ldots \partial x_r^{k_r} \partial y^{nh}}\right).$$

convenendo che la somma $\sum_{0}^{k_t-1} {}_j$ sia limitata a quei valori di t per cui è $k_t \geq 1$, che sia $k_1 + \ldots + k_{t-1} = 0$ per $t = 1$ e che nell'ultima derivata scritta figuri solo $\partial^{k_r-j-1}x_r$ per $t = r$.

Supposto m pari ed $m(nq-1) < nr$, si può assumere come soluzione fondamentale di (1) la

$$U(x,\ y;\ \xi,\ \eta) = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{E_r} e^{-i<(x-\xi)\cdot s>} \tilde{u}(s,\ y-\eta)\,ds \tag{20}$$

ove

$$\tilde{u}(s,\ y-\eta) = \tag{21}$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{1}{\|s\|^{\frac{m}{n}(nq-1)}} \sum_{1}^{M}{}_j (-1)^{nq+j} \dfrac{\mathfrak{V}_j}{\mathfrak{V}} \exp\left[\alpha_j \|s\|^{\frac{m}{n}}(y-\eta)\right] & \text{per } y > \eta \\[2ex] \dfrac{1}{\|s\|^{\frac{m}{n}(nq-1)}} \sum_{1}^{N}{}_j (-1)^{nq+M+j} \dfrac{\mathfrak{V}_{M+j}}{\mathfrak{V}} \exp\left[\beta_j \|s\|^{\frac{m}{n}}(y-\eta)\right] & \text{per } y < \eta \end{cases}$$

essendo $\alpha_1, \ldots, \alpha_M$ le radici a parte reale negativa di (5), $\beta_1, \ldots, \beta_N$ le radici a parte reale positiva di (5) $(M + N = nq)$, $\mathfrak{V}_j$ il determinante di Vandermonde di $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots \alpha_M, \beta_1, \ldots, \beta_N$ (nell'ordine) e $\mathfrak{V}_{M+j}$ il determinante di Vandermonde di $\alpha_1, \ldots, \alpha_M, \beta_1, \ldots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \ldots, \beta_N$ (nell'ordine) [3]).

L'immagine di Fourier di (1*) è

$$\sum_{0}^{q}{}_h (-1)^{m(q-h)+nh} (-$$

$$- i)^{m(q-h)} \Big(\sum_{\sum_{1}^{r} {}_j k_j = m(q-h)} a^{(m(q-h))}_{k_1 \ldots k_r} s_1^{k_1} \ldots s_r^{k_r} \Big) \frac{d^{nh}\tilde{u}}{dy^{nh}} = 0 \tag{3*}$$

---

[3]) B. PINI, *Soluzione fondamentale per una classe di equazioni a derivate parziali con coefficienti costanti*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 9 (1959-60).

la cui equazione caratteristica è

$$(4^*) \quad \sum_{0}^{q}{}_h(-1)^{nh}(i)^{m(q-h)}\Big(\sum_{\sum_1^r{}_j k_j = m(q-h)} a_{k_1 \dots k_r}^{(m(q-h))} s_1^{k_1} \dots s_r^{k_r}\Big)\lambda^{nh} = 0\,;$$

questa, per m pari, ha per radici le opposte delle radici di (4).

Fissiamo il punto (x, y) con $0 < y < \delta$ e sia $U(x, y; \xi, \eta)$ soluzione del problema

$$(22) \quad \begin{cases} \mathcal{L}^*[\bar{U}] = 0 & \text{per} \quad 0 < \eta < \delta \\ D_\eta^j \bar{U}(x, y; \xi, 0) = D_\eta^j U(x, y; \xi, 0), & j = 0, 1, \dots, N-1 \\ D_\eta^j \bar{U}(x, y; \xi\ \delta) = D_\eta^j U(x, y; \xi, \delta), & j = 0, 1, \dots, M-1. \end{cases}$$

Poniamo

$$(23) \qquad V(x, y; \xi, \eta) = U(x, y; \xi, \eta) - \bar{U}(x, y; \xi, \eta);$$

questa risulta la funzione di Green relativa al problema (7) per l'iperstrato $0 \leq y \leq \delta$, $x \in E_r$.

Introduciamo la funzione

$$(24) \qquad H(x) = \begin{cases} 1 & \text{per} \quad 0 \leq \|x\| \leq R \\ 0 & \text{»} \quad R + 1 \leq \|x\| \end{cases}$$

continua dappertutto insieme alle sue derivate fino a quelle d'ordine mq.

Indichiamo con $\mathfrak{D}(a)$ il dominio $0 \leq \eta \leq \delta$, $\|\xi - x\| \leq a$, con $\mathfrak{B}_z(a)$ l'insieme $\mathfrak{D}(a) \cap (\eta = z)$, con $\mathfrak{S}(a)$ l'ipersuperficie $0 \leq \eta \leq \delta$, $\|\xi - x\| = a$. Se nella (19) si sostituisce y e x con η e ξ, si pone $H(x - \xi)V(x, y; \xi, \eta)$ al posto di v e si intende che u sia soluzione regolare di $\mathcal{L}[u] = 0$, integrando nel dominio ottenuto da $\mathfrak{D}(R + 1)$ sopprimendo il dominio $y - \varepsilon \leq \eta \leq y + \varepsilon$, $\|x - \xi\| \leq R + 1$, e passando al limite per $\varepsilon \to 0+$, si ha

$$- \int\limits_{\mathfrak{D}(R+1)} u\mathfrak{L}^*[H(\xi - x)V(x, y; \xi, \eta)]d\xi d\eta =$$

$$= - \sum_{h}^{q-1}{}_0 (-1)^{nh} \sum_{\sum_1^r{}_j k_j = m(q-h)} a_{k_1 \dots k_r}^{(m(q-h))} \cdot$$

$$\cdot \sum_{t}{}_1^r \int\limits_{\mathfrak{S}(R+1)} \sum_{j}{}_0^{k_t - 1} (-1)^{k_1 + \dots + k_{t-1} + j} \frac{\partial^{k_1 + \dots + k_{t-1} + j} u}{\partial \xi_1^{k_1} \dots \partial \xi_{t-1}^{k_{t-1}} \partial \xi_t^j} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^{m(q-h) + nh - k_1 \dots - k_{t-1} - j - 1} HV}{\partial \xi_t^{k_t - j - 1} \partial \xi_{t+1}^{k_{t+1}} \dots \partial \xi_r^{k_r} \partial \eta^{nh}} \cos \widehat{\xi_t n}\, d\sigma +$$

$$+ \Bigg(\int\limits_{\mathfrak{B}_\delta(R+1)} - \int\limits_{\mathfrak{B}_0(R+1)} \Bigg) H \sum_{h}{}_1^q \sum_{j}{}_0^{nh-1} (-1)^j \frac{\partial^j V}{\partial \eta^j} \frac{\partial^{nh-j-1}}{\partial \eta^{nh-j-1}} \mathfrak{L}_{m(q-h)}[u] d\xi -$$

$$- \lim_{\varepsilon \to 0+} \Bigg(\int\limits_{\mathfrak{B}_{y+\varepsilon}(R+1)} - \int\limits_{\mathfrak{B}_{y-\varepsilon}(R+1)} \Bigg) H \sum_{h}{}_0^q \sum_{j}{}_0^{nh-1} (-1)^j \frac{\partial^j V}{\partial \eta^j} \frac{\partial^{nh-j-1}}{\partial \eta^{nh-j-1}} \mathfrak{L}_{m(q-h)}[u] d\xi.$$

H è nulla insieme a tutte le sue derivate (fino a quelle d'ordine mq) su $\mathfrak{S}(R+1)$; il limite indicato è $u(x, y)$.

Supponiamo che sia

$$(25) \qquad \begin{cases} D_\eta^j u(\xi, 0) = 0 & \text{per } j = 0, 1, \dots, M-1 \\ D_\eta^j u(\xi, \delta) = 0 & \text{» } j = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases}$$

Consideriamo $D_\eta^j V D_\eta^{nh-j-1} u$; per $\eta = 0$ se $nh - j - 1 < M$ è $D_\eta^{nh-j-1} u = 0$; se $nh - j - 1 \geq M$ è $j \leq nh - M - 1$ e poichè $M + N = nq$ è $j \leq nh - 1 - (nq - N) \leq N - 1$ onde $D_\eta^j V = 0$; analogo risultato per $\eta = \delta$. Pertanto, tenendo anche presente che $H = 1$ in $\mathfrak{D}(R)$ e $\mathfrak{L}^*[V] = 0$, si ha che:

Una soluzione regolare di $\mathfrak{L}[u]=0$ *soddisfacente le* (25), *per* $0<y<\delta$ *soddisfa la*

$$(26)\qquad u(x,\,y)=\int\limits_{\mathfrak{D}(R+1)-\mathfrak{D}(R)} u(\xi,\,\eta)\mathfrak{L}^*[H(\xi-x)V(x,\,y\,;\,\xi,\,\eta)]d\xi d\eta.$$

Torniamo ora all'equazione (8) nell'ipotesi che sia $n=$ $=2(2\nu+1)$, $m(>n)$ divisibile per 4, $P(s)$ forma definita positiva (negli altri casi si ragiona allo stesso modo), $m(n-1)<nr$.

Attualmente è $\mathfrak{L}^*\equiv\mathfrak{L}$, $M=N=2\nu+1$. Il problema (22) si soddisfa con la

$$(28)\qquad U(x,\,y\,;\,\xi,\,\eta)=\frac{1}{(2\pi)^r}\int\limits_{E_r} e^{-i<\xi\cdot s>}\sum_{1}^{2\nu+1}{}_k\,(-1)^k\,\cdot$$

$$\cdot\left|\frac{\Delta'_k(s,\,\eta)}{\Delta(s)}D_\eta^{\overline{k-1}}U(x,\,y;\,s,\,0)-\frac{\Delta''_k(s,\,\eta)}{\Delta(s)}D_\eta^{\overline{k-1}}U(x,\,y;\,s,\,\delta)\right|ds$$

ove

$$(20')\qquad U(x,\,y\,;\,\xi,\,\eta)=\frac{1}{(2\pi)^r}\int\limits_{E_r} e^{-i<(\xi-x)\cdot s>}\tilde{u}(s,\,y-\eta)ds$$

e

$$(21')\qquad \tilde{u}(s,\,y-\eta)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\|s\|^{\frac{m}{n}(n-1)}}\displaystyle\sum_{1}^{2\nu+1}{}_j\,(-1)^j\frac{\mathfrak{V}_j}{\mathfrak{V}}\,\cdot \\ \qquad\cdot\exp\left[\alpha_j\,\|s\|^{\frac{m}{n}}(y-\eta)\right]\quad \text{per}\quad y>\eta \\ \dfrac{1}{\|s\|^{\frac{m}{n}(n-1)}}\displaystyle\sum_{1}^{2\nu+1}{}_j\,(-1)^{j+1}\frac{\mathfrak{V}_{2\nu+1+j}}{\mathfrak{V}}\,\cdot \\ \qquad\cdot\exp\left[\alpha_{2\nu+1+j}\,\|s\|^{\frac{m}{n}}(y-\eta)\right]\ \text{per}\ y<\eta,\end{cases}$$

essendo $\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_{2\nu+1}$ le radici $2\,(2\nu+1)$-sime con parte reale negativa di $P(s)/\|s\|^m$, $\alpha_{2\nu+2},\dots,\,\alpha_{4\nu+2}$ le radici $2\,(2\nu+1)$-sime con parte reale positiva della stessa quantità, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_j$, $\mathfrak{V}_{2\nu+1+j}$

rispettivamente i determinanti di Vandermonde di $\alpha_1, \dots, \alpha_{4\nu+2}$; $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_{4\nu+2}$; $\alpha_1, \dots, \alpha_{2\nu+1}, \alpha_{2\nu+2}, \dots, \alpha_{2\nu+j}, \alpha_{2\nu+j+2}, \dots, \alpha_{4\nu+2}$ (nell'ordine).

Consideriamo $U(x, y; \xi, \eta)$ ad esempio per $y > \eta$ (per $y < \eta$ le considerazioni sono del tutto analoghe); si ha

$$D_\xi^h U(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{E_r} (-i)^h s_1^{h_1} \dots s_r^{h_r} e^{-i<(\xi-x)\cdot s>} \frac{1}{\| s \|^{\frac{m}{n}(n-1)}} \cdot$$

$$\cdot \sum_1^{2\nu+1}{}_j (-1)^{j+1} \frac{\mathfrak{Y}_j}{\mathfrak{Y}} \exp [\alpha_j \| s \|^{\frac{m}{n}} (y - \eta)] ds$$

con $h_1 + h_2 + \dots + h_r = h$. Posto

$$\sigma_k = s_k (y - \eta)^{\frac{n}{m}} \quad , \quad t_k = \frac{\xi_k - x_k}{(y - \eta)^{\frac{n}{m}}},$$

tenendo presente che α_j è funzione di $\frac{s}{\| s \|}$ onde $\alpha_j\left(\frac{s}{\| s \|}\right) = \alpha_j\left(\frac{\sigma}{\| \sigma \|}\right)$, si ha

$$D_\xi^h U(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^r (y-\eta)^{\frac{n(h+r)}{m} - n + 1}} \int_{E_r} (-i)^h \frac{\sigma_1^{h_1} \dots \sigma_r^{h_r}}{\| \sigma \|^{\frac{m}{n}(n-1)}} e^{-i<t\cdot\sigma>} \cdot$$

$$\cdot \sum_1^{2\nu+1}{}_j (-1)^{j+1} \frac{\mathfrak{Y}_j}{\mathfrak{Y}} \exp [\alpha_j \| \sigma \|^{\frac{m}{n}}] d\sigma = \frac{F_h(t)}{(2\pi)^r (y - \eta)^{\frac{n(h+r)}{m} - n + 1}}.$$

Supponiamo ad esempio $| t_1 | \geq | t_k |$ per $k = 2, \dots, r$, onde

$$| t_1 | \leq \| t \| \leq \sqrt{r}\, | t_1 |.$$

Siano p un numero tale che $1 < p \leq 2$ ed l un intero non negativo tale che

$$(29) \qquad \begin{cases} l < \dfrac{r}{p} \\ \dfrac{r}{p} - m + h < l < \dfrac{r}{p} - m + h + \dfrac{m}{n}. \ (^4) \end{cases}$$

4) Cfr. l. c. in 3).

Con l integrazione per parti si ha

$$t_1^l F_h(t) = \left(\frac{1}{i}\right)^l \int_{E_r} (-i)^h \sigma_2^{h_2} \dots \sigma_r^{h_r} e^{-i<t\cdot\sigma>} \frac{\partial^l}{\partial \sigma_1^l} [\sigma_1^{h_1} \| \sigma \|^{\frac{m}{n}(1-n)} \cdot$$

$$\cdot \sum_{1}^{2\nu+1}{}_j (-1)^{j+1} \frac{\mathfrak{Y}_j}{\mathfrak{Y}} \exp (\alpha_j \| \sigma \|^{\frac{m}{n}})] d\sigma,$$

osservando che

$$\frac{\partial^l}{\partial \sigma_1^l} [\sigma_1^{h_1} \| \sigma \|^{\frac{m}{n}(1-n)} \sum_{1}^{2\nu+1}{}_j (-1)^{j+1} \frac{\mathfrak{Y}_j}{\mathfrak{Y}} \exp (\alpha_j \| \sigma \|^{\frac{m}{n}})] =$$

$$= 0(1) \| \sigma \|^{\frac{m}{n}(1-n)+h_1-l} \exp (\alpha_j \| \sigma \|^{\frac{m}{n}}).$$

Riesce

$$\sigma_2^{h_2} \dots \sigma_r^{h_r} \frac{\partial^l}{\partial \sigma_1^l} [\sigma_1^{h_1} \| \sigma \|^{\frac{m}{n}(1-n)} \sum_{1}^{2\nu+1}{}_j (-1)^{j+1} \frac{\mathfrak{Y}_j}{\mathfrak{Y}} \exp (\alpha_j \| \sigma \|^{\frac{m}{n}})] \in$$

$$\in L_1(\sigma) \cap L_p(\sigma),$$

onde, per un teorema di Titchmarsh, la trasformata di Fourier di tale funzione $\in L_{p'}$, $p + p' = pp'$, e quindi

$$(30) \qquad \| t \|^l F_h(t) \in L_{p'}(t).$$

Ne segue che

$$(31) \qquad \int_0^\delta \int_{E_r} | u(\xi, \eta) | \frac{| F_h(t) |}{(2\pi)^r | y - \eta |^{\frac{n(h+r)}{m} - n + 1}} d\xi d\eta \leq$$

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^r} \int_0^\delta \frac{d\eta}{| y - \eta |^{\frac{n}{m}\left(h + \frac{r}{p} - l\right) - n + 1}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{E_r} (\| t \|^l | F_h(t) |)^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{E_r} \left(\frac{| u(\xi, \eta) |}{\| x - \xi \|^l} \right)^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Consideriamo ora la (28) limitandoci a valutare $D_\xi^h \overline{U}(x, y; \xi, \eta)$, poichè solo queste derivate ci serviranno nel seguito. Si ha

$$(32)\quad D_\xi^h \overline{U}(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{E_r} (-i)^h s_1^{h_1} \dots s_r^{h_r} e^{-i<\xi \cdot s>} \sum_{1}^{2\nu+1}{}_j \frac{(-1)^j}{\Delta(s)} \cdot$$

$$\cdot [\Delta_j'(s, \eta) \widetilde{D_\eta^{j-1} U}(x, y; s, 0) - \Delta_j''(s, \eta) \widetilde{D_\eta^{j-1} U}(x, y; s, \delta)] ds.$$

Ponendo $\xi_k = x_k - t_k$ si ha

$$(33)\quad \widetilde{D_\eta^{j-1} U}(x, y; s, p) = \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{E_r} e^{i<\xi \cdot s>} d\xi \int_{E_r} e^{-i<(\xi - x) \cdot \sigma>} \frac{d^{j-1}}{d\eta^{j-1}} \tilde{u}(\sigma, y-p) d\sigma =$$

$$= (-1)^r e^{i<x \cdot s>} \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{E_r} e^{-i<t \cdot s>} dt \int_{E_r} e^{i<t \cdot \sigma>} \frac{d^{j-1}}{d\eta^{j-1}} \tilde{u}(\sigma, y-p) d\sigma =$$

$$= (-1)^r e^{i<x \cdot s>} \frac{d^{j-1}}{d\eta^{j-1}} \tilde{u}(s, y-p).$$

Esaminiamo ad esempio

$$\int_{E_r} s_1^{h_1} \dots s_r^{h_r} e^{i<(x-\xi) \cdot s>} \frac{\Delta_k'(s, \eta)}{\Delta(s)} \frac{d^{k-1}}{d\eta^{k-1}} \tilde{u}(s, y-0) ds.$$

Si può scrivere

$$-\int_{E_r} s_1^{h_1} \dots s_r^{h_r} e^{i<(x-\xi) \cdot s>} \frac{\Delta_k'(s, \eta)}{\Delta(s)} \frac{1}{\| s \|^{\frac{m}{n}(n-1)}} \sum_{1}^{2\nu+1}{}_j (-1)^j \frac{\mathfrak{V}_j}{\mathfrak{V}} \cdot$$

$$\cdot (-1)^{k-1} \alpha_j^{k-1} \| s \|^{\frac{m}{n}(k-1)} \cdot \exp [\alpha_j \| s \|^{\frac{m}{n}} y] ds.$$

È

$$\Delta(s) = \| s \|^{\frac{m}{n} 2\nu(2\nu+1)} \Sigma (-1)^{\nu+1+k_1+\dots+k_{2\nu+1}} \mathfrak{V}(\alpha_{k_1}, \dots, \alpha_{k_{2\nu+1}}) \cdot$$

$$\cdot \mathfrak{V}(\alpha_{k_1'}, \dots, \alpha_{k_{2\nu+1}'}) \cdot \exp ((\alpha_{k_1'} + \dots + \alpha_{k_{2\nu+1}'}) \| s \|^{\frac{m}{n}} \delta)$$

dove la somma è estesa a tutte le disposizioni di classe $2\nu+1$ delle α_j $(k_1 < k_2 < \ldots < k_{2\nu+1})$ e $k'_1, \ldots, k'_{2\nu+1}$ $(k'_1 < k'_2 < \ldots < k'_{2\nu+1})$ sono quelli dei primi $4\nu+2$ numeri naturali che restano sopprimendo $k_1, \ldots, k_{2\nu+1}$

$$\Delta'_k(s, \eta) = \| s \|^{\frac{m}{n}[2\nu(2\nu+1)-k+1]} \sum_{1}^{4\nu+2}{}_j (-1)^j \exp(\alpha_j \| s \|^{\frac{m}{n}} \eta) \cdot$$

$$\cdot \sum \mathfrak{V}_j^*(\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_{2\nu}}) \mathfrak{V}_j(\alpha_{k'_1}, \ldots, \alpha_{k'_{2\nu+1}}) (-1)^{k_1+\ldots+k_{2\nu}} \cdot$$

$$\cdot \exp((\alpha_{k'_1} + \ldots + \alpha_{k'_{2\nu+1}}) \| s \|^{\frac{m}{n}} \delta),$$

dove la seconda somma è estesa a tutte le disposizioni di classe 2ν dei primi $4\nu+2$ numeri naturali dai quali sia stato soppresso j e presi in ordine di crescenza; $k'_1, \ldots, k'_{2\nu+1}$ sono, in ordine di crescenza, i restanti $2\nu+1$ numeri naturali; $\mathfrak{V}_j$ è il corrispondente determinante di Vandermonde mentre $\mathfrak{V}_j^*$ è il determinante che si ottiene da $\mathfrak{V}(\alpha_{k_1}, \ldots, \alpha_{k_{2\nu}}, \alpha_j)$ sopprimendo la colonna che contiene le potenze di α_j e la riga di posto k.

La (32) in base alla (33) si scrive

$$(32') \quad D_\xi^h \bar{U}(x, y; \xi, \eta) = \frac{(-1)^r}{(2\pi)^r} \int_{E_r} (-i)^h s_1^{h_1} \ldots s_r^{h_r} e^{i<(x-\xi)\cdot s>} \sum_{1}^{2\nu+1}{}_k (-$$

$$-1)^k \frac{\Delta'_k(s, \eta)}{\Delta(s)} \frac{d^{k-1}}{d\eta^{k-1}} \tilde{u}(s, y-0) ds -$$

$$-\frac{(-1)^r}{(2\pi)^r} \int_{E_r} (-i)^h s_1^{h_1} \ldots s_r^{h_r} e^{i<(x-\xi)\cdot s>} \sum_{1}^{2\nu+1}{}_k (-$$

$$-1)^k \frac{\Delta''_k(s, \eta)}{\Delta(s)} \frac{d^{k-1}}{d\eta^{k-1}} \tilde{u}(s, y-\delta) ds.$$

Studiamo il primo dei due integrali che figurano in (32').

Posto

$$\sigma'_k = s_k \eta^{\frac{n}{m}}, \qquad t'_k = \frac{x_k - \xi_k}{\eta^{\frac{n}{m}}}$$

si ha

$$\frac{d^{k-1}}{d\eta^{k-1}} \tilde{u}(s, y) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{\|\sigma'\|^{\frac{m}{n}(n-k)}} \eta^{n-k} \sum_{1}^{2\nu+1}{}_j (-1)^j \frac{\mathfrak{D}_j}{\mathfrak{D}} \alpha_j^{k-1} \exp\left(\alpha_j \|\sigma'\|^{\frac{m}{n}} \frac{y}{\eta}\right)$$

e per la (12), tenendo presente che ω soddisfa la $\omega(s) = \frac{1}{\eta}\,\omega(\sigma)$,

$$\frac{\Delta'_k(s, \eta)}{\Delta(s)} = \begin{cases} \eta^{k-1} 0(\|\sigma'\|^{\frac{m}{n}(1-k)} \exp(\gamma_{2\nu+1}\omega(\sigma')) & \text{per } \|\sigma'\| \to +\infty \\ \eta^{k-1} 0(1) & \text{per } \|\sigma'\| \to 0. \end{cases}$$

Pertanto tale integrale si può scrivere

$$\frac{(-1)^r}{(2\pi)^r \eta^{\frac{n(h+r)}{m} - n+1}} \int_{E_r} (-i)^h \sigma_1'^{h_1} \ldots$$

$$\ldots \sigma_r'^{h_r} e^{i<t' \cdot \sigma'>} \frac{1}{\|\sigma'\|^{\frac{m}{n}(n-1)}} 0(1) \exp(\gamma_{2\nu+1}\omega(\sigma')) d\sigma'.$$

Il secondo integrale che figura nella (32') si può scrivere in modo analogo con $\delta - \eta$ in luogo di η. La (32') si può porre nella forma

$$\frac{F'_h(t')}{(2\pi)^r \eta^{\frac{n(h+r)}{m} - n+1}} + \frac{F''_h(t'')}{(2\pi)^r (\delta - \eta)^{\frac{n(h+r)}{m} - n+1}}$$

e per $F'_h(t')$ e $F''_h(t'')$ vale la (30) con t' e t'' rispettivamente al posto di t. Conseguentemente valgono maggiorazioni analoghe alla (31).

Sia ora P un numero tale che $1 < P \leq 2$ ed L un intero non negativo tali che le (29) siano soddisfatte per $h = 0, 1, \ldots, m-1$ ponendo P ed L al posto di p ed l.

Se $m > n$; n è pari del tipo $2(2\nu + 1)$ ed m è divisibile per 4, o viceversa, oppure n è dispari ed m pari, ed è $m(n-1) < nr$, allora il problema

$$\mathcal{L}_m[u] = \frac{\partial^n u}{\partial y^n} \qquad per\ 0 < y < \delta$$

$$D_y^j u(x,\ 0+) = 0 \qquad per\ j = 0,\ 1, \ldots,\ M-1$$

$$D_y^j u(x,\ \delta-) = 0 \qquad per\ j = 0,\ 1, \ldots,\ N-1,$$

ove M ed N indicano rispettivamente i numeri delle radici n-sime di $P(s)$ (definita positiva per $s \in E_r$) con parte reale negativa e con parte reale positiva, ha la sola soluzione nulla nella classe delle funzioni aventi la regolarità richiesta dal problema e soddisfacenti la condizione

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{R \leq \|\xi\| \leq R+1} \left(\frac{|u(\xi,\ \eta)|}{\|\xi\|^L}\right)^P d\xi = 0$$

uniformemente per $0 \leq \eta \leq \delta$.

Fissiamo a piacere un punto $(x,\ y)$ con $0 < y < \delta$. Poichè $\mathcal{L}^*[V] = 0$, dalla (26) segue

$$|u(x\ y)| = \left| \int_0^\delta \int_{R \leq \|\xi - x\| \leq R+1} u(\xi,\ \eta) \sum_{\substack{r \\ \Sigma_1 k_j = m}} a_{k_1 \ldots k_r} \left(\frac{\partial^m HV}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_r^{k_r}} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - H \frac{\partial^m V}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_r^{k_r}} \right) d\xi \right|$$

e per le osservazioni premesse

$$| u(x, y) | \leq A \int_0^{\delta} \frac{d\eta}{| y - \eta |^{\frac{n}{m}\left(m-1+\frac{r}{P}-L\right)-n+1}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{R \leq || x - \xi || \leq R+1} \left(\frac{| u(\xi, \eta) |}{|| \xi - x ||^{L}} \right)^{P} d\xi \right)^{\frac{1}{P}}$$

per una conveniente costante positiva A. Poichè il secondo membro converge a zero per $R \to +\infty$, si ha $u(x, y) = 0$.