Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Arno Predonzan

Sulle varietà P_s-secanti un sistema di varietà algebriche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 30 (1960), p. 248-254

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__248_0>

SULLE VARIETÀ P_s-SECANTI UN SISTEMA DI VARIETÀ ALGEBRICHE

Nota (*) *di* ARNO PREDONZAN (*a Padova*)

1. - Su un corpo (commutativo) k, di caratteristica $p = 0$, si consideri un sistema algebrico (assolutamente) irriducibile d-dimensionale Σ di varietà algebriche, una *generica*, V, delle quali appartenga ad uno spazio proiettivo r-dimensionale P_r, che si può supporre non variabile in corrispondenza alle varie *specializzazioni* di V su k; il che non è restrittivo in quanto ci si può sempre porre in queste condizioni mediante un'opportuna proiezione del sistema Σ.

Sia $\mathcal{H}_{k^*}(V)$ l'ideale (omogeneo) associato a V, e si faccia l'ipotesi che lo stesso abbia come base (minima) m (≥ 1) polinomi (omogenei), dei gradi rispettivi n_1, n_2, ..., n_m (≥ 2), appartenenti all'anello $k^*[X_0, X_1, ..., X_r]$ di polinomi, essendo k^* quel sopracorpo di k, di grado di trascendenza d su k, su cui è definita la considerata V (*generica*) di Σ.

È allora noto che se risulta:

$$r \geq \sum_{i=1}^{m} n_i^d, \tag{1}$$

esiste, in un opportuno sopracorpo algebrico k' di k, una varietà W unisecante Σ, il che garantisce la possibilità di determinare razionalmente su k', (cioè mediante una trasfor-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 19 luglio 1960.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

mazione razionale di Σ su W, definita su k'), un punto sulla generica V di Σ [1]).

In questa Nota ci proponiamo di generalizzare la (1). Usando le notazioni sopra introdotte dimostreremo cioè, nel n. 2, che:

Se risulta:

$$r \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \binom{s+j-2}{j-1} (n_i - j + 1)^d + s, \tag{2}$$

dove si è convenuto di porre:

$$\binom{s+j-2}{j-1} = 1 \qquad \text{per} \quad j = 1,\ s \geq 0, \tag{3}$$

$$\binom{s+j-2}{j-1} = 0 \qquad \text{per} \quad j \geq 2,\ s = 0, \tag{4}$$

si può, in un'opportuna estensione algebrica k' del corpo k di definizione del sistema d-dimensionale Σ, determinare razionalmente sulla generica V di Σ uno spazio proiettivo s-dimensionale $P_s (s \geq 0)$ [2]).

1) Ved. B. SEGRE, *Intorno ad alcune generalizzazioni di un teorema di Noether*, Rend. di Mat. e delle sue applicazioni, s. V, v. XIII, (1954).

La condizione (1), sufficiente per assicurare l'esistenza di un'unisecante W di Σ, generalizza quella $r \geq n^d$ già data da M. BALDASSARRI per $m = 1$: di quest'ultima lo stesso Autore ha anche provato la necessità, però sotto convenienti ipotesi di generalità per il sistema Σ, [ved. M. BALDASSARRI, *Su un criterio di riduzione per un sistema algebrico di varietà*, Rend. Sem. Mat. di Padova, v. XIX, (1950)].

2) La possibilità di determinare razionalmente sulla generica V di Σ uno spazio P_s, appena r sia sufficientemente grande rispetto ad $s, d, m, n_1, n_2, \dots, n_m$, si trova già enunciata in B. SEGRE, loc. cit. in 1) ed è ivi dimostrata per $n_1 = n_2 = \dots = n_m = 2$, ottenendo la limitazione:

$$r \geq (s + 2^d)m + s$$

che, come si constata facilmente, è caso particolare della (2).

Il teorema ora enunciato può anche esprimersi nella seguente forma:

Qualora valga la (2) *il sistema* Σ *ammette, in un opportuno sopracorpo algebrico* k' *del suo corpo* k *di definizione, una varietà* W P_s*-secante.*

Nel n. 3 faremo invece vedere come una varietà Ω, di dimensione $r - m + d$, che contenga un sistema Σ d'indice finito ≥ 1, del tipo sopra indicato, possa ottenersi, per r sufficientemente grande e sotto convenienti ipotesi di generalità, come trasformata razionale di una varietà Ω', P_{r-m}-luogo, cioè di una varietà luogo di un sistema d'indice uno di spazi P_{r-m}.

2. - Siano V_i, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, le ipersuperficie di P_r, degli ordini n_i, rappresentate dai polinomi costituenti la base di $\mathcal{H}_{k*}(V)$; sia cioè:

$$V = \bigcap_i V_i .$$

Detto x_1 un punto di V, si indichino con $\Delta_{x_1}^{i_1} V_i$, $(i = 1, 2, \ldots, m;\ i_1 = 0, 1, \ldots, n_i - 1)$, le varietà intersezione con un iperpiano P_{r-1}^*, genericamente fissato in P_r, delle polari i_1-me di x_1 rispetto alle V_i [3]). Si ponga poi:

$$V^{(1)} = \bigcap_{i, i_1} \Delta_{x_1}^{i_1} V_i ,$$

e sia x_2 un punto di $V^{(1)}$: la retta $P_1 = x_1 \cup x_2$ giace allora ovviamente sulla varietà V.

Consideriamo le polari i_{12}-me di x_2 rispetto alle $\Delta_{x_1}^{i_1} V_i$, ed indichiamo con $\Delta_{x_2}^{i_{12}} \Delta_{x_1}^{i_1} V_i$, $(i = 1, 2, \ldots, m;\ i_1 = 0, 1, \ldots, n_i - 1;\ i_{12} = 0, 1, \ldots, n_i - i_1 - 1)$, le varietà intersezione delle polari stesse con un P_{r-2}^* genericamente fissato in P_{r-1}^*. Posto:

$$V^{(2)} = \bigcap_{i, i_1, i_{12}} \Delta_{x_2}^{i_{12}} \Delta_{x_1}^{i_1} V_i ,$$

3) Si considerano naturalmente solo quei valori di i_1 compresi tra 0 ed $n_i - 1$ per cui le relative $\Delta_{x_1}^{i_1} V_i$ siano definite. Si conviene inoltre di porre $\Delta_{x_1}^{0} V_i = V_i \cap P_{r-1}^*$.

si dica x_3 un punto di $V^{(2)}$: il piano $P_2 = x_1 \cup x_2 \cup x_3$ appartiene allora a V.

Se si considerano poi le polari i_{123}-me di x_3 rispetto alle $\Delta_{x_2}^{i_{12}} \Delta_{x_1}^{i_1} V_i$, e le si intersecano con un P_{r-3}^*, genericamente fissato in P_{r-2}^*, si viene ad ottenere — con procedimento analogo a quello usato per la $V^{(1)}$ — una varietà $V^{(3)}$. Proseguendo in tale modo si giunge infine ad una varietà

$$V^{(s)} = \bigcap_{i, i_1, \dots, i_{12\dots s}} \Delta_{x_s}^{i_{12\dots s}} \Delta_{x_{s-1}}^{i_{12\dots s-1}} \dots \Delta_{x_1}^{i_1} V_i$$

ottenuta intersecando con un P_{r-s}^* la varietà intersezione delle polari $i_{12\dots s}$-me di un punto x_s di $V^{(s-1)}$ rispetto alle $\Delta_{x_{s-1}}^{i_{12\dots s-1}} \Delta_{x_{s-2}}^{i_{12\dots s-2}} \dots \Delta_{x_1}^{i_1} V_i$: anche lo spazio $P_s = x_1 \cup x_2 \cup \dots \cup x_{s+1}$, essendo x_{s+1} un punto di $V^{(s)}$, appartiene chiaramente alla varietà V.

Perchè risulti dimostrato il teorema del n. 1 basterà provare che, nell'ipotesi che valga la (2), si può determinare razionalmente, in un sopracorpo algebrico k' di k, un punto x_1 sulla generica V di Σ, quindi un punto x_2 sulla relativa $V^{(1)}, \dots$, infine un punto x_{s+1} sulla $V^{(s)}$. Qualora ciò sia possibile, le $V^{(1)}, V^{(2)}, \dots, V^{(s)}$ vengono a descrivere, al variare di V in Σ, dei sistemi algebrici $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_s$, in corrispondenza birazionale con quello Σ e quindi tutti d-dimensionali ed (assolutamente) irriducibili.

La possibilità di determinare razionalmente in k' un punto x_1 sulla V, un punto x_2 sulla $V^{(1)}, \dots$, un punto x_{s+1} sulla $V^{(s)}$ sarà garantita dalla (2) appena si verificherà che, per ogni scelta di $s (\geq 0)$:

i) la $V^{(s)}$ è varietà intersezione di

$$\nu(s) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \binom{s+j-2}{j-1} \tag{5}$$

ipersuperficie di P_{r-s}^*, e tra queste sono in numero di

$$\mu_j^{(i)}(s) = \binom{s+j-2}{j-1}, \qquad (j = 1, 2 \dots, n_i), \tag{6}$$

quelle d'ordine $(n_i - j + 1)$ che provengono dalla V_i secondo la costruzione indicata all'inizio di questo numero.

Se infatti la i) è verificata, la (1), applicata ad un sistema analogo a quello Σ_s, fornisce proprio la (2)[4]), per cui sarà possibile determinare razionalmente un punto sulla generica varietà del sistema stesso. E poichè tale proprietà sussisterà, a maggior ragione, per sistemi analoghi a quelli Σ, Σ_1, ..., Σ_{s-1}, si avrà che potrà determinarsi razionalmente un punto x_1 sulla generica V di Σ, quindi un punto x_2 sulla conseguente $V^{(1)}$ di Σ_1, ..., infine un punto x_{s+1} sulla $V^{(s)}$ di Σ_s: resterà perciò determinato razionalmente, su un opportuno sopracorpo k' di k, lo spazio $P_s = x_1 \cup x_2 \cup \ldots \cup x_{s+1}$, situato sulla generica V di Σ.

La validità della i) è ovvia per $s = 0$: si ha infatti, in virtù delle (3), (4): $\nu(0) = m$, $\mu_j^{(i)}(0) = 1$, e quindi la $V^{(0)} = V$ è intersezione di m ipersuperficie V_i di $P^*_{r-0} = P_r$, degli ordini n_i.

Supposto ora $s > 0$, ed ammessa la i) per $s - 1$, ne verificheremo la validità per s.

A norma dell'ipotesi ricorrente si ha che:

i') la $V^{(s-1)}$ è varietà intersezione di

$$\nu(s-1) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \binom{s+j-3}{j-1} \tag{5'}$$

ipersuperficie di P^*_{r-s+1}, e tra queste sono in numero di

$$\mu_j^{(i)}(s-1) = \binom{s+j-3}{j-1}, \qquad (j = 1, 2, \ldots, n_i), \tag{6'}$$

quelle d'ordine $(n_i - j + 1)$ che provengono dalla V_i.

Il sistema di tutte le ipersuperficie che provengono da V_i

---

4) Si noti che la validità della (1) sussiste anche se alcune delle ipersuperficie V_i di P_r, di cui la V è intersezione, sono del primo ordine (il che accade anche per la $V^{(s)}$ del sistema Σ_s): se infatti, ad es., risulta $n_m = 1$, la (1) stessa diviene:

$$r - 1 \geq \sum_{i=1}^{m-1} n_i^d,$$

in accordo col fatto che la V può ora pensarsi come intersezione di $m - 1$ ipersuperficie di uno spazio P_{r-1}.

nel modo in precedenza indicato è costituito da:

$$(7)\quad \begin{cases} \binom{s-2}{0} & \text{ipersuperficie dell'ordine } n_i, \\ \binom{s-1}{1} & \text{ipersuperficie dell'ordine } n_i - 1, \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \binom{s+n_i-3}{n_i-1} & \text{ipersuperficie dell'ordine } 1, \end{cases}$$

il che si ottiene dalla (6') per $j=1, 2, \dots, n_i$.

Tra le ipersuperficie di cui $V^{(s)}$ è intersezione, quelle, $V_i^{(s)}$, che provengono dalla V_i, sono le intersezioni con un prefissato P_r^* di P_{r-s-1}^* delle polari (dei vari ordini) di un punto x_s di $V^{(s-1)}$ rispetto alle ipersuperficie di P_{r-s-1}^* a cui si riferiscono le (7). Da quest'ultime deriva che l'insieme delle $V_i^{(s)}$ è costituito da:

$$(8)\quad \begin{cases} \sum_{h=1}^{n_i}\binom{s+h-3}{h-1}=\binom{s+n_i-2}{n_i-1} & \text{ipersuperficie dell'ordine } 1, \\ \sum_{h=2}^{n_i}\binom{s+h-4}{h-2}=\binom{s+n_i-3}{n_i-2} & \text{ipersuperficie dell'ordine } 2, \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \sum_{h=n_i}^{n_i}\binom{s+h-n_i-2}{h-n_i}=\binom{s-1}{0} & \text{ipersuperficie dell'ordine } n_i. \end{cases}$$

Le (8) ci forniscono la (6), e da questa si deduce la (5), donde la validità per s della prop. i)[5]. Resta così stabilito il teorema enunciato nel n. 1.

[5]) Per la dimostrazione della prop. i) si è supposto — per semplicità — l'esistenza delle ipersuperficie polari di tutti gli ordini. Tale ipotesi non è però restrittiva per la validità del teorema del n. 1: anzi, qualora non sia soddisfatta l'ipotesi stessa, la limitazione (2) resta a maggior ragione verificata.

3. - Se le V_i — di cui la V *generica* del sistema Σ considerato nel n. 1 è varietà intersezione — sono ipersuperficie generali di P_r e genericamente scelte, è noto che la V stessa è unirazionale su un corpo $k^*(P_{r_{\nu-1}})$ — essendo $P_{r_{\nu-1}}$ uno spazio lineare, di dimensione $r_{\nu-1}$, situato sulla V — appena risulta:

$$r \geq r_\nu, \tag{9}$$

dove r_ν è funzione di $n_1, n_2, \ldots, n_m$, definita in modo ricorrente rispetto a ν, stando ν ad indicare il massimo degli interi n_i [6]).

Ove si ponga nella (2) $s = r_{\nu-1}$, la stessa diviene:

$$r \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \binom{r_{\nu-1} + j - 2}{j - 1} (n_i - j + 1)^d + r_{\nu-1}; \tag{2'}$$

ed allora dal teorema del n. 1 e da quello enunciato all'inizio di questo n. 3, discende — appena si osservi che la varietà V ha dimensione $r - m$ — che:

Se valgono le (9), (2'), *una varietà algebrica* Ω, *di dimensione* $r - m + d$, *che contenga un sistema* d*-dimensionale* Σ, (*assolutamente*) *irriducibile e d'indice finito* ≥ 1, *di varietà* V, *la generica delle quali sia intersezione di* m *ipersuperficie generali di* P_r *e genericamente scelte, può ottenersi, in un sopracorpo algebrico* k' *del suo corpo* k *di definizione, come trasformata razionale di una varietà* Ω', P_{r-m}*-luogo,* (*cioè contenente un sistema* d*-dimensionale d'indice uno di spazi* P_{r-m}), *in guisa che gli spazi* P_{r-m} *di* Ω' *si mutino razionalmente nelle* V *di* Σ.

---

[6]) Ved. A. PREDONZAN, *Sull'unirazionalità della varietà intersezione completa di più forme*, Rend. Sem. Mat. di Padova, v. XVIII, (1949).