Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Edmondo Morgantini

Su di un problema di Erdös

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 30 (1960), p. 245-247

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__245_0>

SU DI UN PROBLEMA DI ERDÖS

Nota (*) *di* EDMONDO MORGANTINI (*a Padova*)

A pag. 479 del Vol. 67 (1960) di « *The American Mathematical Monthly* », J. Reinwater propone tra gli « advanced problems » il seguente, di cui attribuisce l'enunciato a P. Erdös:

Dato un triangolo non degenere PQR, *siano* A_1, A_2, A_3 *tre punti distinti scelti sui suoi tre lati. Il triangolo* PQR *resta così diviso in quattro triangoli: quello centrale* $A_1A_2A_3$ *ed altri tre laterali. Dimostrare che l'area del triangolo centrale non può essere minore di quella di ciascuno dei tre laterali, e che solo quando* A_1, A_2, A_3 *cadono nei punti medi del triangolo* PQR *l'area del triangolo centrale e quella dei laterali sono uguali.*

Per dimostrare ciò, pensiamo, com'è lecito, fissato ad arbitrio il triangolo centrale $A_1A_2A_3$ e variabile quello PQR ad esso circoscritto. Assumiamo quindi nel piano (euclideo) il sistema di coordinate proiettive omogenee reali (coordinate triangolari) col triangolo fondamentale $A_1A_2A_3$ e col punto unità nel suo baricentro U. Dette x_1, x_2, x_3 le coordinate omogenee di un punto X, sarà:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \Delta(A_2A_3X) : \Delta(A_3A_1X) : \Delta(A_1A_2X),$$

indicando i simboli a 2° membro le aree con segno dei triangoli orientati A_iA_kX, rispetto ad una arbitraria orientazione del piano.

Le coordinate si possono normalizzare, assumendo ad es. uguale a 3 l'area del triangolo orientato $A_1A_2A_3$ e ponendo

---

(*) Pervenuta in Redazione il 25 giugno 1960.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

la condizione:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Con ciò restano fissate l'orientazione del piano e l'unità di misura per le aree e si ha esattamente:

$$x_1 = \Delta(A_2 A_3 X), \qquad x_2 = (A_3 A_1 X), \qquad x_3 = \Delta(A_1 A_2 X).$$

Inoltre, posto:

$$P = (p_1,\ p_2,\ p_3), \qquad Q = (q_1,\ q_2,\ q_3), \qquad R = (r_1,\ r_2,\ r_3),$$

sarà:

$$p_1 = \Delta(A_2 A_3 P) < 0, \quad q_2 = \Delta(A_3 A_1 Q) < 0, \quad r_3 = \Delta(A_1 A_2 R) < 0,$$

mentre p_2, p_3, q_3, q_1, r_1, r_2 saranno positivi (v. Fig. 1).

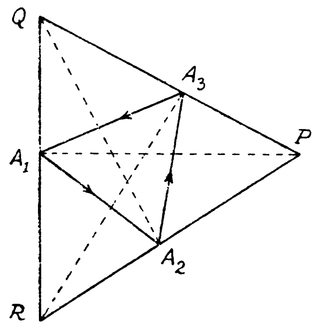

Fig. 1

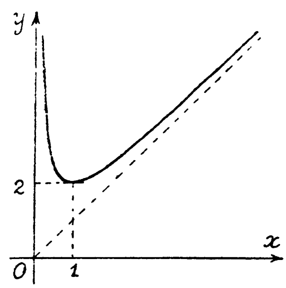

Fig. 2

La circostanza che il triangolo PQR sia circoscritto a quello $A_1 A_2 A_3$ si tradurrà nelle condizioni:

$$(1) \qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2} = -a, \qquad \frac{q_2}{q_3} = \frac{r_2}{r_3} = -b, \qquad \frac{r_3}{r_1} = \frac{p_3}{p_1} = -c,$$

essendo a, b, c quantità positive. Infine:

$$(2) \qquad p_1 + p_2 + p_3 = q_1 + q_2 + q_3 = r_1 + r_2 + r_3 = 3.$$

Dalle (1) si trae:

$$\begin{cases} p_2 = -\dfrac{1}{a} p_1 \\ p_3 = -c p_1 \end{cases}, \quad \begin{cases} q_3 = -\dfrac{1}{b} q_2 \\ q_1 = -a q_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} r_1 = -\dfrac{1}{c} r_3 \\ r_2 = -b r_3 \end{cases},$$

da cui, sostituendo nella (2):

$$-p_1\left(c + \frac{1}{a} - 1\right) = -q_2\left(a + \frac{1}{b} - 1\right) = -r_3\left(b + \frac{1}{c} - 1\right) = 3,$$

ossia, posto:

$$\Delta_P = |\Delta(A_2 A_3 P)| = -p_1, \qquad \Delta_Q = |\Delta(A_3 A_1 Q)| = -q_2,$$
$$\Delta_R = |\Delta(A_1 A_2 R)| = -r, \qquad \Delta_A = |\Delta(A_1 A_2 A_3| = 3,$$

si ha:

$$(3) \qquad \Delta_A = \left(c + \frac{1}{a} - 1\right)\Delta_P = \left(a + \frac{1}{b} - 1\right)\Delta_Q = \left(b + \frac{1}{c} - 1\right)\Delta_R.$$

Per dimostrare il teorema, cioè per far vedere che almeno uno dei tre fattori (positivi) che nelle (3) moltiplicano Δ_P, Δ_Q, Δ_R è maggiore od eguale ad 1, basta far vedere che la loro somma è maggiore od uguale a 3, cioè che:

$$\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(b + \frac{1}{b}\right) + \left(c + \frac{1}{c}\right) \geq 6,$$

e ciò è immediato, ove si tenga presente la forma del grafico della funzione reale:

$$y = x + \frac{1}{x}$$

che per $x > 0$ assume sempre valori ≥ 2, raggiungendo il minimo $y = 2$ solo per $x = 1$ (v. Fig. 2).

Resta così anche provato che solo quando A_1, A_2, A_3 sono punti medi dei lati del triangolo PQR $(a = b = c = 1)$ l'area del triangolo centrale Δ_A è uguale a quella dei triangoli laterali Δ_P, Δ_Q, Δ_R.