

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

**Osservazioni sul corpo delle funzioni razionali sopra
una ipersuperficie algebrica del quarto ordine**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 30 (1960), p. 237-244

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__237_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

OSSERVAZIONI SUL CORPO DELLE FUNZIONI RAZIONALI SOPRA UNA IPERSUPERFICIE ALGEBRICA DEL QUARTO ORDINE

Nota (*) di ARNO PREDONZAN (a Padova)

1. - Sia V una k -varietà assoluta, dell'ordine n e di dimensione d , di uno spazio affine $A_r(K)$ di dimensione $r (> d)$ su K . (K sopracorpo algebricamente chiuso del corpo k , di caratteristica $p=0$), ed $\mathfrak{I}_k(V)$ il relativo ideale, appartenente all'anello $k[X] = k[X_1, X_2, \dots, X_r]$ dei polinomi nelle indeterminate X_1, X_2, \dots, X_r , costruito su k .

Se k' è un sopracorpo algebrico di k , ($k \subseteq k' \subset K$), è noto che¹⁾ V dicesi *unirazionale* su k' se il corpo $F_{k'}(V)$ delle funzioni razionali sopra V , definito su k' — cioè il corpo delle frazioni dell'anello $k'[X]/\mathfrak{I}_{k'}(V)$ delle coordinate di V su k' , $[k'[X] = k'[X_1, X_2, \dots, X_r]$ anello dei polinomi in X_1, X_2, \dots, X_r su k' ; $\mathfrak{I}_{k'}(V) = \mathfrak{I}_k(V)k'[X]$ ideale di $k'[X]$ generato da $\mathfrak{I}_k(V)$] — è contenuto in un'estensione trascendente pura di k' , il cui grado di trascendenza su k' uguagli quello, d , di $F_{k'}(V)$. Se poi $F_{k'}(V)$ è estensione trascendente pura di k' , V dicesi *birazionale* (o *razionale*) su k' .

Qualora sia $d = r - 1$, cioè si tratti di una k -ipersuperficie assolutamente irriducibile di $A_r(K)$, i problemi relativi all'unirazionalità della V stessa possono presentarsi sotto diversi aspetti, di cui i più suggestivi sono i seguenti:

- i) Determinare, in relazione ad n , il minimo valore di r

(*) Pervenuta in Redazione il 6 luglio 1960.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università. Padova.

¹⁾ Ved. P. SAMUEL, *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*. Ergebnisse der Mathematik. Berlin-Springer (1955).

per cui la V generale di $A_r(K)$ sia unirazionale su una conveniente estensione algebrica k' di k .

ii) Determinare, sempre in relazione ad n , il minimo valore di r per cui esistano V di $A_r(K)$ *prive di singolarità* (anche se non generali) che risultino unirazionali su un'estensione algebrica k' di k .

In questa Nota, poggiando su un risultato recentemente acquisito²⁾ e sull'ultima proposizione del n. 2, risolvo nel n. 3 — per il caso $n=4$ — il problema ii), facendo vedere come il minimo valore richiesto per la dimensione dello spazio $A_r(K)$ è $r=4$. Nello stesso n. studio poi — ancora per $n=4$ — i sistemi delle V unirazionali contenenti superficie monoidali φ del quarto ordine ad asintotiche separabili: di tali sistemi determino la dimensione, ed il minimo valore di r per cui la V generale di $A_r(K)$ contenga superficie φ del tipo indicato.

Prima di entrare nell'argomento è opportuno ricordare che — sempre per $n=4$ — il problema i), pur non essendo ancora risolto, è stato notevolmente delimitato: è infatti nota³⁾, per $r \geq 6$, l'unirazionalità della V generale del quarto ordine di $A_r(K)$, rimanendo ancora dubbi i casi $r=5$ ed $r=4$.

2) Ved. A. PREDONZAN, *Sulle superficie monoidali del quarto ordine ad asintotiche separabili*, questi Rend., questo vol.

3) Ved. U. MORIN, *Sulla unirazionalità delle ipersuperficie algebriche del quarto ordine*, Rend. Acc. dei Lincei, vol. XXIV, serie 6^a (1936); U. MORIN, *Sull'unirazionalità dell'ipersuperficie del quarto ordine dell' S_6* , questi Rend., vol. XXI (1952).

Nel primo di questi due lavori viene provata l'unirazionalità dell'ipersuperficie generale V del quarto ordine di $A_r(K)$ per $r \geq 7$, poggiando sull'esistenza di un piano nella V stessa. Nel secondo invece è dimostrata analoga proprietà per $r=6$, ed il risultato conseguito poggia su un notevole teorema di M. BALDASSARRI [*Su un criterio di riduzione per un sistema algebrico di varietà*, questi Rend., vol. XIX (1950)] relativo all'esistenza di unisecanti, e su una condizione di A. PREDONZAN [*Sui monoidi V_{k-1}^n di S_k situati sulla forma generale F_{r-1}^n di S_r* , questi Rend., vol. XXI (1952)] che garantisce l'esistenza sulla V in questione di superficie razionali.

2. - Nello spazio $A_r(K)$, ($r \geq 4$), si consideri una k -ipersuperficie algebrica, V , del quarto ordine, assolutamente irriducibile, e si supponga che esista in $A_r(K)$ una \bar{k} -varietà lineare tridimensionale A_3 , ($k \subseteq \bar{k} \subset K$), che seghi V in una superficie del quarto ordine, φ , razionale su k' , ($\bar{k} \subseteq \bar{k}' \subset K$), e ad *asintotiche separabili*: quest'ultima condizione equivale a dire che l'insieme algebrico, W , d'indice due, delle rette asintotiche uscenti dai punti di φ deve spezzarsi in \bar{k} , o in un sovracorpo algebrico k_1 di \bar{k} . ($\bar{k} \subseteq \bar{k}_1 \subset K$), in due distinti sistemi, W_1, W_2 , ciascuno d'indice uno⁴). Si indichi poi con k' il corpo congiungente \bar{k}_1 e k' .

Poichè φ è razionale su \bar{k}' , e quindi su k' , il corpo $F_{k'}(\varphi)$ delle funzioni razionali sopra φ , definito su k' , è un'estensione trascendente pura di k' ; esistono dunque due elementi t_{r-2}, t_{r-1} di $F_{k'}(\varphi)$, trascendenti su k' ed algebricamente indipendenti, per cui si abbia: $F_{k'}(\varphi) = k'(t_{r-2}, t_{r-1})$; gli elementi $\xi_j = \{X_j\}$, ($j = 1, 2, \dots, r$), dell'anello $k'[X]/\mathfrak{I}_{k'}(\varphi) = k'[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r]$ possono allora esprimersi con:

$$(1) \quad \xi_j = \frac{f_j(t_{r-2}, t_{r-1})}{g_j(t_{r-2}, t_{r-1})}, \quad (j = 1, 2, \dots, r),$$

essendo f_j, g_j elementi dell'anello di polinomi $k'[t_{r-2}, t_{r-1}]$.

Supposto K un *dominio universale* su k , [e ciò non è restrittivo per le considerazioni che si vengono a fare], esiste un k' -isomorfismo, λ , di $F_{k'}(\varphi)$ in K . Posto: $\lambda(t_{r-2}) = \bar{t}_{r-2}$, $\lambda(t_{r-1}) = \bar{t}_{r-1}$, si ha allora che il punto $y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$, con:

$$(2) \quad y_j = \lambda(\xi_j) = \frac{f_j(\bar{t}_{r-2}, \bar{t}_{r-1})}{g_j(\bar{t}_{r-2}, \bar{t}_{r-1})}, \quad (j = 1, 2, \dots, r),$$

è un *punto generico* di φ su k' .

Sia Ω il cono, di dimensione $r - 2$ e d'ordine 2, delle rette osculatrici a V in y ⁵), ed H la varietà, di dimensione $r - 3$ e d'ordine 8, sezione di V con Ω .

⁴) Ved. A. PREDONZAN. *Alcune questioni di separabilità*, questi Rend., vol. XXX, parte 1^a (1960).

⁵) Ω è cioè il cono delle tangenti, nel suo punto doppio y , alla varietà intersezione di V con l'iperpiano tangente in y e quest'ultima.

Verifichiamo che H — che può pensarsi come $k'(y)$ -varietà — è birazionale su $k'(y)$. Infatti la retta asintotica r di φ , uscente da y ed appartenente al sistema W_1 , è definita su $k'(y)$ ed è ovviamente una generatrice del cono Ω . Un prefissato iperpiano A_{r-1}^* di $A_r(K)$, definito su k' , sega Ω in un'iperquadrica Q , di dimensione $r-3$, e la retta r in un punto z situato su Q e definito, come Q , sul corpo $k'(y)$. L'applicazione T , di H su Q , definita su $k'(y)$, che associa ad un punto generico x di H quel punto (generico) $T(x)$ di Q che è l'intersezione con A_{r-1}^* della retta $x \cup y$, è chiaramente razionale: ed essa risulta altresì birazionale in quanto la molteplicità d'intersezione $i(y; x \cup y \cdot V)$ di $x \cup y$ e V in y vale tre, e pertanto è razionalmente determinabile sopra $k'(y)$ l'intersezione (unica), fuori di y , della retta $y \cup T(x)$ con V . Ma poichè Q , essendo noto il suo punto z , [definito su $k'(y)$], è birazionale su $k'(y)$, tale risulta pure H . Ne viene che in $F_{k'(y)}(H)$ vi sono $r-3$ elementi, t_1, t_2, \dots, t_{r-3} , trascendenti sul corpo $k'(y)$ e tra loro algebricamente indipendenti, per cui si abbia: $F_{k'(y)}(H) = k'(y)(t_1, t_2, \dots, t_{r-3})$; ed allora gli elementi $\eta_j = \{X_j\}$, ($j=1, 2, \dots, r$), dell'anello $k'(y)[X] \cong F_{k'(y)}(H) = k'(y)[\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r]$, si possono esprimere con:

$$(3) \quad \eta_j = \frac{l_j(t_1, t_2, \dots, t_{r-3})}{m_j(t_1, t_2, \dots, t_{r-3})}, \quad (j=1, 2, \dots, r),$$

essendo l_j, m_j elementi dell'anello $k'(y)[t_1, t_2, \dots, t_{r-3}]$ di polinomi.

Sia ora μ un $k'(y)$ -isomorfismo di $F_{k'(y)}(H)$ in K^6 , e si ponga: $\mu(t_1) = \bar{t}_1, \mu(t_2) = \bar{t}_2, \dots, \mu(t_{r-3}) = \bar{t}_{r-3}$; si ha allora che il punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$, con:

$$(4) \quad x_j = \frac{l_j(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{r-3})}{m_j(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{r-3})}, \quad (j=1, 2, \dots, r),$$

è punto generico di H su $k'(y)$.

Le (4), tenuto conto delle (2), possono scriversi nella forma:

$$(5) \quad x_j = \frac{L_j(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{r-1})}{M_j(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{r-1})}, \quad (j=1, 2, \dots, r),$$

c) Certamente esistente perchè si è supposto che K sia un dominio universale su k' , e quindi su k .

con L_j, M_j elementi dell'anello $k'[\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{r-1}]$.

La k' -varietà $V_K(\mathfrak{J}_k(x))$, inogo su k' del punto x dato dalla (5) — cioè la k' -varietà avente il punto x come *punto generico* su k' — è ovviamente contenuta nella data V . Vogliamo verificare ch'essa coincide con la V , cioè che il punto (5) è in effetti *punto generico* di V su k' . Ciò appare evidente appena si osservi che, per quanto precede, si ha: tr. d. $k'(x)/k'(y) = r - 3$, tr. d. $k'(y)/k = 2$, e quindi: tr. d. $k'(x)/k = r - 1$, avendo indicato col simbolo tr. d. Δ/δ il grado di trascendenza di un corpo Δ su un suo sottocorpo δ .

Poichè esiste un k' -isomorfismo, τ , tra il corpo $F_{k'}(V)$ e quello $k'(x)$, e poichè dalle (5) appare che quest'ultimo è contenuto nell'estensione pura $k'(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_{r-1})$ di k' , [il cui grado di trascendenza su k' è $r - 1$, poichè x è *punto generico* di V su k'], si ha che anche $F_{k'}(V)$ è contenuto in un'estensione trascendente pura di k' , di grado di trascendenza $r - 1$ su k' . Ciò ci permette di concludere — riferendoci ora allo spazio proiettivo $P_r(K)$, prolungamento di quello affine $A_r(K)$, e considerando anche il caso limite $r = 3$ — che:

Una kipersuperficie V del quarto ordine di $P_r(K)$, su cui giuocia una superficie razionale φ del quarto ordine, ad asintotiche separabili, è, per $r \geq 3$, unirazionale su un sopracorpo algebrico k' di k .

3. - Tra le K -superficie ⁷⁾ razionali del quarto ordine di uno spazio proiettivo $P_3(K)$ sono particolarmente notevoli quelle monoidali. Tra esse è noto che ⁸⁾ quelle, φ , non rigate, ad asintotiche separabili, possono appartenere a sei tipi proiettivamente distinti e caratterizzati da determinate particolarità proiettive. In corrispondenza a questi sei tipi si hanno, in $P_3(K)$, sei sistemi algebrici irriducibili, Φ_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, di superficie φ , potendo qualcuno di questi essere contenuto in uno dei rimanenti ⁹⁾.

⁷⁾ Volendo ora riferirci alle superficie di $P_3(K)$ definite sopra un qualunque sottocorpo di K , parleremo di K -superficie; ed è chiaro che ogni k -superficie, ($k \subset K$), è anche una K -superficie.

⁸⁾ Ved. A. PRENZAN, loc. cit. in 2).

⁹⁾ Così, ad es., il sistema Φ_2 di superficie φ appartenenti al tipo indicato come II) nel lavoro citato in 2), è contenuto nel sistema Φ_1 di superficie φ appartenenti al tipo I).

Tra i sistemi Φ_i , ha dimensione massima — come è immediato verificare — quello Φ_1 costituito dalle superficie φ che nel lavoro cit. in ²⁾ sono del I) tipo, cioè dalle φ con un punto triplo triplanare e sei punti doppi costituenti i sei vertici di un quadrilatero piano completo (il cui trilatero diagonale, proiettato dal punto triplo, determina il cono cubico riducibile delle tangenti a φ nel punto triplo stesso).

Sia ora Φ_1^* il sistema algebrico, ovviamente irriducibile in K , delle superficie φ costituenti i sistemi del tipo Φ_1 , che appartengono a tutti gli spazi tridimensionali di uno spazio proiettivo $P_r(K)$, ($r \geq 3$).

Si consideri inoltre il sistema lineare, Σ , formato dalla totalità della K -ipersuperficie V , del quarto ordine, di $P_r(K)$. Tra queste, quelle che contengono una qualche φ di Φ_1^* , costituiscono un insieme algebrico Σ^* , sottoinsieme dell'insieme Σ , ($\Sigma^* \subseteq \Sigma$).

Poichè le V di Σ che passano per una qualunque, prefissata, φ di Φ_1^* , (ed appartengono perciò a Σ^*), formano un sistema lineare la cui dimensione non varia al variare di φ in Φ_1^* ¹⁰⁾, si ha che la corrispondenza algebrica E tra Φ_1^* e Σ^* , nella quale sono omologhe una φ di Φ_1^* ed una V di Σ^* quando si appartengono, è irriducibile in K , ed è pure irriducibile in K il sistema Σ^* ¹¹⁾. Si può allora applicare alla corrispondenza E il « principio del computo delle costanti », il quale fornisce:

$$(6) \quad \dim(\Phi_1^*) + \dim(E(\varphi)) = \dim(\Sigma^*) + \dim(E^{-1}(V)),$$

avendo indicato con φ e V due elementi generici rispettivamente di Φ_1^* e di Σ^* .

Facilmente si constata che:

$$(7) \quad \begin{aligned} \dim(\Phi_1^*) &= 15 + 4(r-3) = 4r + 3, & \dim(E(\varphi)) &= \binom{r+4}{4} - 35, \\ \dim(\Sigma^*) &= \binom{r+4}{4} - 1 - \epsilon, \end{aligned}$$

¹⁰⁾ Ved. A. PREDONZAN, loc. cit. in ³⁾, n. 3, nota 1).

¹¹⁾ Ved. P. SAMUEL, loc. cit. in ¹⁾, pag. 55.

con ε intero ≥ 0 , ed avendosi $\varepsilon = 0$ se, e soltanto se, la generica V di Σ contiene qualche φ di Φ_1^* , (cioè se $\Sigma^* = \Sigma$).

A norma delle (7), la (6) diviene:

$$(8) \quad \dim (E^{-1}(V)) = 4r - 31 + \varepsilon,$$

e da questa, dovendo risultare $\dim (E^{-1}(V)) \geq 0$, si deduce che se la generica V di Σ contiene qualche φ di Φ_1^* deve necessariamente essere:

$$(9) \quad 4r - 31 \geq 0,$$

cioè:

$$(9') \quad r \geq 8.$$

Con procedimento analogo a quello già adoperato nel lavoro citato in ¹⁰⁾, e che può chiamarsi «metodo del doppio computo delle costanti» ¹²⁾, si può agevolmente verificare che la (9') è anche condizione sufficiente perchè la V generica di Σ contenga qualche φ di Φ_1^* , il che permette di affermare che, per $r \leq 7$, Σ^* è sottinsieme proprio di Σ . Tenuto ora conto che la generica V di Σ^* che passi per una generica, prefissata, φ di Φ_1^* è — anche per $4 \leq r \leq 7$ — priva di singolarità, in quanto sono in numero finito i punti singolari di φ , e tenuto inoltre conto che non vi sono notoriamente superficie unirazionali del quarto ordine di uno spazio tridimensionale che siano prive di punti singolari, si può concludere che:

Il minimo valore di r per cui esistono ipersuperficie unirazionali V di $P_r(K)$, del quarto ordine, che siano prive di singolarità, è $r = 4$.

Ci proponiamo ora di calcolare la dimensione del sistema Σ^* nell'ipotesi $r \leq 7$, cioè nell'ipotesi che la generica V di Σ non contenga alcuna φ di Φ_1^* . È chiaro allora che, in relazione alla generica V di Σ^* non può aversi $\dim (E^{-1}(V)) > 0$: infatti le condizioni perchè una V di Σ contenga una prefissata φ di Φ_1^*

¹²⁾ Tale metodo è stato per la prima volta introdotto dall'A. in: A. PREDONZAN, *Intorno agli S_k giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme*, Rend. Acc. dei Lincei, serie VIII, vol. V (1948). Esso si è manifestato particolarmente adatto alla risoluzione di problemi di immersione di varietà in altre — problemi la cui soluzione, per altre vie, presentava difficoltà notevoli — ed è stato applicato con successo anche da altri Autori.

non comportano — come si può anche constatare con una verifica diretta — che la stessa V contenga alcun'altra ζ . Dunque $\dim(E^{-1}(V))=0$, per cui dalla (8) si ottiene:

$$(10) \quad \varepsilon = 31 - 4r, \quad (r \leq 7).$$

In virtù della (10), la terza delle (7) fornisce:

$$(11) \quad \dim(\Sigma^*) = \binom{r+4}{1} + 4r - 32, \quad (r \leq 7),$$

e questa ci dà appunto la cercata dimensione del sistema Σ^* . In definitiva si può concludere che:

Un'ipersuperficie algebrica assolutamente irriducibile, V , del quarto ordine, di $P_r(K)$ è, per ogni $r \geq 3$, unirazionale in un sopracorpo algebrico del corpo di razionalità dei suoi coefficienti, appena contenga una superficie del quarto ordine con un punto triplo triplanare e sei punti doppi costituenti i sei vertici di un quadrilatero piano completo.

La totalità delle ipersuperficie di questo tipo di $P_r(K)$ costituisce un sistema algebrico, Σ^ , irriducibile in K , la cui dimensione è data, per $r \leq 7$, dalla (11); mentre se $r \geq 8$, il sistema Σ^* coincide con quello, Σ , di tutte le V del quarto ordine di $P_r(K)$.*

Ad analoghe conclusioni si può giungere in relazione agli altri cinque sistemi Φ_i , ($i=2, 3, \dots, 6$), di superficie φ , di cui al primo capoverso di questo numero ed è chiaro che, in relazione ai sistemi stessi, la limitazione (9') non può essere abbassata, non essendo — come già affermato — la loro dimensione superiore a quella di Φ_1 (**).

(**) Mentre sto licenziando le bozze di stampa di questa mia Nota, vengo a conoscere la Memoria del Prof. B. SEGRE: « *Variatione continua ed omotopia in geometria algebrica* », ora uscita sugli *Annali di Matematica* (s. IV, t. L, 1960), nel cui cap. IV viene risolto il problema da me indicato con ii) nel n. 1 della presente Nota, e la cui soluzione trovasi nei successivi nn. 2, 3. Il procedimento dimostrativo da me usato è sostanzialmente uguale a quello del Prof. SEGRE, salvo l'inessenziale sostituzione della superficie monoidale ζ ad asintotiche separabili, con altra di tipo proiettivo diverso: precisamente, in relazione alla classificazione da me data delle superficie monoidali del quarto ordine ad asintotiche separabili [loc. cit. in 2)], quella ζ da me usata appartiene al tipo I), mentre è del tipo V) quella a cui si riferisce il Prof. SEGRE.