RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

Sulle superficie monoidali del quarto ordine ad asintotiche separabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 30 (1960), p. 215-231

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__215_0>

SULLE SUPERFICIE MONOIDALI DEL QUARTO ORDINE AD ASINTOTICHE SEPARABILI

Nota (*) *di* ARNO PREDONZAN (*a Padova*)

1. - In alcune questioni relative al corpo delle funzioni razionali sopra un'ipersuperficie algebrica V, d'ordine quattro e di dimensione d (≥ 3), definita su un corpo commutativo k di caratteristica $p = 0$ [1]), si è notato come l'esistenza di uno spazio tridimensionale osculante V, cioè secante V in una superficie monoidale F del quarto ordine [2]), garantisca l'unirazionalità della V stessa, in un sopracorpo algebrico k^* di k, appena si supponga che la superficie F sia ad *asintotiche separabili* [3]). Si presenta pertanto il problema di caratterizzare

---

(*) Pervenuta in Redazione il 27 giugno 1960.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) Ved. A. PREDONZAN, *Osservazioni sul corpo delle funzioni razionali sopra un'ipersuperficie algebrica del quarto ordine*, di imminente pubblicazione in questi Rend.. questo vol.

2) L'esistenza di spazi tridimensionali osculanti una V *generale*, d'ordine quattro e di dimensione $d \geq 4$. è provata in: A. PREDONZAN, *Sui monoidi* V^n_{k-1} *di* S_k *situati sulla forma generale* F^n_{r-1} *di* S_r. Rend. Sem. Mat. di Padova, v. XXI (1952). In questo lavoro resta anche precisato che il sistema algebrico dei monoidi giacenti sulla suddetta V generale è irriducibile nel corpo di definizione della V stessa ed ha dimensione $D = 4d - 15$.

3) Una superficie algebrica (non rigata sviluppabile) F di uno spazio proiettivo $P_3(K)$ dicesi ad asintotiche separabili se il sistema algebrico bidimensionale W delle coppie $(r'_x,\ r''_x)$ di rette asintotiche uscenti dai punti x di F può ottenersi (nel corpo di definizione di F, o in un sopracorpo algebrico di questo) come corrispondenza algebrica tra due distinti sistemi algebrici W_1, W_2 di rette asintotiche di F, cioè come sottoinsieme algebrico del prodotto $W_1 \times W_2$ in cui sono omologhe due rette, l'una r'_x di W_1 e l'altra r''_x di W_2, costituenti una medesima coppia $(r'_x,\ r''_x)$ di W; [ved. A. PREDONZAN, *Alcune questioni di separabilità*, Rend. Sem. Mat. di Padova, v. XXX, (1960)].

proiettivamente le superficie monoidali del quarto ordine ad asintotiche separabili in modo di poter constatare se esistono (e la risposta sarà affermativa) ipersuperficie unirazionali V, del quarto ordine e di dimensione $d \geq 3$, le quali, pur non essendo *generali* nel loro spazio di appartenenza — il che certamente avverrà per $d = 3$, [ved. nota [3])] — siano però prive di singolarità.

In questo lavoro risolvo appunto il problema sopra indicato, giungendo alle seguenti conclusioni [4]):

Una superficie algebrica monoidale F, del quarto ordine, di uno spazio proiettivo tridimensionale $P_3(K)$, costruito sopra un corpo K algebricamente chiuso e di caratteristica $p = 0$, è ad asintotiche separabili se, e soltanto se, appartiene ad uno dei seguenti tipi proiettivamente distinti:

I) *Superficie monoidale F a punto triplo triplanare T, con sei punti doppi P_j, $(j = 1, \ldots, 6)$, costituenti i sei vertici di un quadrilatero piano completo.*

II) *Superficie monoidale F con due punti tripli triplanari T_1, T_2, necessariamente situati su una retta d doppia per F, e due ulteriori punti doppi D_1, D_2, tali però che i due piani che li proiettano da d separino armonicamente quei due piani per d che sono componenti comuni dei due coni cubici riducibili delle tangenti ad F rispettivamente in T_1 e T_2.*

III) *Superficie monoidale F con punto triplo biplanare T, tale che la retta d intersezione delle due componenti lineari σ_1 (semplice) e σ_2 (doppia) del relativo cono cubico riducibile delle tangenti sia retta doppia tacnodale per F con piano tangente tacnodale (fisso) quello σ_2; la F deve inoltre avere un ulteriore punto doppio D, necessariamente situato sul piano σ_1, e la retta $l = T \cup D$ deve essere l'unica componente (di*

---

[4]) Il problema della classificazione proiettiva delle superficie cubiche ad asintotiche separabili è stato già risolto; [ved. A. PREDONZAN, *Una nuova caratterizzazione delle rigate cubiche ed alcuni problemi di classificazione*, Rend. Sem. Mat. di Padova, v. XXX, (1960)].

molteplicità otto) dell'intersezione di F con il cono quadrico delle tangenti ad F in D [5]).

IV) *Superficie monoidale F con due punti tripli biplanari T_1, T_2, necessariamente situati su una retta d doppia per F, ed un ulteriore punto doppio biplanare D; i due coni cubici riducibili delle tangenti ad F rispettivamente in T_1* e *T_2 debbono avere in comune la loro componente lineare doppia, mentre la retta l intersezione delle due componenti il cono quadrico riducibile delle tangenti ad F in D deve essere osculante la superficie F in D (cioè non deve incontrarla in alcun punto fuori di D).*

V) *Superficie monoidale F con punto triplo uniplanare T, sulla quale esista un punto (semplice) O il cui relativo piano tangente la seghi secondo quattro rette a_1, a_2, a_3, a_4 per O formanti gruppo armonico.*

VI) *Superficie monoidale F come del tipo* V) *in cui però* si abbia $a_1 = a_2 \neq a_3 = a_4$.

VII) *Superficie monoidale rigata, cioè superficie del quarto ordine con retta tripla.*

Le equazioni delle superficie dei primi sei tipi (cioè le basi dei relativi ideali omogenei $\mathcal{H}_K(F)$ dell'anello $K[X_0, X_1, X_2, X_3]$ di polinomi) possono scriversi nella seguente *forma canonica* [6]):

---

5) Si noti che sulla superficie F in questione la d è *retta tacnodale simmetrica*, il che significa che la quartica $\mathcal{C}$. sezione piana *generica* di F, presenta nel suo punto P appartenente a d un *tacnodo simmetrico*, cioè un punto tale che la relativa cubica polare rispetto a $\mathcal{C}$ abbia due componenti rettilinee di cui una, di molteplicità due, sia la tangente tacnodale a $\mathcal{C}$ in P; [ved. C. SEGRE, *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie*, Rend. Acc. dei Lincei, v. VI, f. 6°, (1897)].

6) È chiaro che una trasformazione di coordinate proiettive in $P_3(K)$, che muti l'equazione di una superficie monoidale non rigata F ad asintotiche separabili in una delle sei forme I'), ..., VI'), non risulta generalmente definita sul corpo k di definizione di F, ma su un sopracorpo algebrico di k. L'equivalenza proiettiva di due superficie ad asintotiche separabili sarà perciò considerata sul corpo algebricamente chiuso K.

I') $X_0X_1X_2X_3 + X_0^4 + X_1^4 + X_2^4 - 2(X_0^2X_1^2 + X_1^2X_2^2 + X_2^2X_0^2)$.

II') $X_0X_1X_2X_3 + (X_1^2 - X_2^2)^2$.

III') $X_1^2X_2X_3 + X_0^2X_1^2 + X_2^4$.

IV') $X_1^2X_2X_3 + X_0^4$.

V') $X_0^3X_3 + X_1X_2(X_1^2 - X_2^2)$.

VI') $X_0^3X_3 + X_1^2X_2^2$.

Da quanto precede appare che non esistono superficie monoidali del quarto ordine ad asintotiche separabili nel cui punto triplo il relativo cono cubico delle tangenti sia irriducibile, o si spezzi in un cono quadrico ed un piano.

Giova infine ricordare che le superficie del tipo VII si possono distribuire, a loro volta, in quattro tipi proiettivamente distinti.

2. - Sia k un corpo commutativo di caratteristica $p = 0$, e K un sopracorpo algebricamente chiuso di k.

In uno spazio proiettivo $P_3(K)$, di dimensione tre su K, si consideri una superficie (proiettiva) monoidale F, del quarto ordine, definita su k ed assolutamente irriducibile, il cui punto triplo sia $T = (0, 0, 0, 1)$.

L'*equazione* di una tale F, cioè il polinomio (omogeneo) dell'anello $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ che è base dell'ideale (omogeneo) $\mathcal{H}_k(F)$ di F, può scriversi nella forma:

$$X_3\beta(X_0, X_1, X_2) - \alpha(X_0, X_1, X_2), \tag{1}$$

dove $\alpha(X_0, X_1, X_2)$ e $\beta(X_0, X_1, X_2)$ sono polinomi (omogenei) dell'anello $k[X_0, X_1, X_2]$, assolutamente primi tra loro, dei gradi rispettivi quattro e tre.

La F ammette in T un cono cubico τ delle tangenti, la cui equazione è notoriamente $\beta(X_0, X_1, X_2)$.

Nello spazio affine $A_3(K)$, di cui $P_3(K)$ è il *prolungamento proiettivo* [7]), la superficie (affine) $\bar{F}$, che abbia F come

[7]) A ogni punto (x, y, z) di $A_3(K)$ corrisponde il punto $(1, x, y, z)$ di $P_3(K)$. Resta così definita un'applicazione h di $A_3(K)$ *in* $P_3(K)$ in guisa che $h(A_3(K))$ è il complemento dell'iperpiano (*improprio*) $X_0 = 0$ in $P_3(K)$.

chiusura proiettiva, può allora rappresentarsi con il seguente polinomio dell'anello $k[X, Y, Z]$:

$$Z\bar{\beta}(X, Y) - \bar{\alpha}(X, Y), \tag{1'}$$

dove $\bar{\alpha}(X, Y)$ e $\bar{\beta}(X, Y)$ sono polinomi non nulli dell'anello $k[X, Y]$, dei gradi rispettivi $n_1 \leq 4$, $n_2 \leq 3$, (non potendo mai valere contemporaneamente le due limitazioni superiori), legati a quelli $\alpha(X_0, X_1, X_2)$, $\beta(X_0, X_1, X_2)$ delle note relazioni:

$$\begin{aligned} \alpha(X_0, X_1, X_2) &= X_0^4\bar{\alpha}(X_1/X_0, X_2/X_0), \\ \beta(X_0, X_1, X_2) &= X_0^3\bar{\beta}(X_1/X_0, X_2/X_0); \end{aligned} \tag{2}$$

il polinomio $\bar{\beta}(X, Y)$ rappresenta poi il cono (o meglio il cilindro) $\bar{\tau}$, di cui τ è la *chiusura proiettiva* [8]).

Nel corpo $k(X, Y)$ delle funzioni razionali (*corpo quoziente* dell'anello $k[X, Y]$), si considerino le tre funzioni razionali:

$$f_1 = X, \qquad f_2 = Y, \qquad f_3 = \frac{\bar{\alpha}(X, Y)}{\bar{\beta}(X, Y)};$$

si ha allora che i punti di $\bar{F}$ sono i punti (x, y, z) di $A_3(K)$ che risultano *specializzazioni* di (f_1, f_2, f_3) su k.

Se K è un *dominio universale* su k, (caso in cui ci si può sempre mettere estendendo opportunamente il corpo K), esiste un k-isomorfismo λ del corpo $k(X, Y)$ *in* K [9]). Posto

---

[8]) Si noti che, ove ciò sia conveniente, si può supporre che sia proprio $n_2 = 3$ il grado di $\bar{\beta}(X, Y)$, in quanto ci si può sempre mettere in tali condizioni con un opportuno cambiamento delle coordinate proiettive in $P_3(K)$ e conseguentemente di quelle affini in $A_3(K)$.

[9]) Per l'esistenza di un tale k-isomorfismo basta anzi che sia ≥ 2 il grado di trascendenza di K su k.

$\xi = \lambda(X)$, $\eta = \lambda(Y)$, il punto di $A_3(K)$:

$$\left(\xi,\ \eta,\ \frac{\bar{\alpha}(\xi,\ \eta)}{\bar{\beta}(\xi,\ \eta)}\right)$$

risulta *punto generico* di $\bar{F}$ su k [10]).

3. - Indicati, per brevità, con $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ i polinomi $\bar{\alpha}(X,\ Y)$, $\bar{\beta}(X,\ Y)$ che compaiono nella (1′), e posto:

$$\Delta = \left[\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y}\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right)\right]^2 - \left[\frac{\partial^2}{\partial X^2}\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right)\right] \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial Y^2}\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\right)\right], \tag{3}$$

è noto che [11]) la superficie $\bar{F}$ (e di conseguenza la sua chiusura proiettiva F) risulta ad *asintotiche separabili* se, e soltanto se, esiste un elemento $\dfrac{\bar{\varphi}(X,\ Y)}{\bar{\psi}(X,\ Y)}$ del corpo $k_1(X,\ Y)$, [k_1 estensione algebrica di k di grado ≤ 2], per cui si abbia:

$$\Delta = \left[\frac{\bar{\varphi}(X,\ Y)}{\bar{\psi}(X,\ Y)}\right]^2. \tag{4}$$

Poichè la (4) è certamente soddisfatta se F è superficie rigata, questo caso verrà nel seguito escluso dalle nostre considerazioni.

È immediato verificare che la funzione razionale Δ, data

---

10) Ved. P. SAMUEL, *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*, Ergebnisse der Mathematik, Berlin-Springer, (1955).

Alle volte si usa chiamare punto generico di $\bar{F}$ su k quello $(f_1,\ f_2,\ f_3)$. Questa dizione però è impropria in quanto esso non è in effetti un punto di $\bar{F}$ perchè $f_i \notin K$, $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Resta però sempre, a giustificare la denominazione di punto generico, il fatto che i punti di $\bar{F}$ sono tutti e soli i punti di $A_3(K)$ che sono *specializzazioni* di $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ su k.

11) Ved. A. PREDONZAN, loc. cit. in 3).

dalla (3), può scriversi nella forma:

(5) $$\Delta = \frac{A_0\bar\beta^3 + A_1\bar\beta^2 + A_2\bar\beta - 2\bar\alpha^2 B}{\bar\beta^5},$$

dove A_0, A_1, A_2 sono opportuni elementi di $k[X, Y]$, e dove si è posto:

$$B = \begin{vmatrix} \bar\beta_{11} & \bar\beta_{12} & \bar\beta_1 \\ \bar\beta_{21} & \bar\beta_{22} & \bar\beta_2 \\ \bar\beta_1 & \bar\beta_2 & 0 \end{vmatrix},$$

con $\bar\beta_1 = \frac{\partial\bar\beta}{\partial X}$, $\bar\beta_2 = \frac{\partial\bar\beta}{\partial Y}$, $\bar\beta_{11} = \frac{\partial^2\bar\beta}{\partial X^2}$, $\bar\beta_{12} = \bar\beta_{21} = \frac{\partial^2\bar\beta}{\partial X\partial Y}$, $\bar\beta_{22} = \frac{\partial^2\bar\beta}{\partial Y^2}$.

Ammessa la validità della (4), la stessa, in virtù della (5), può scriversi:

$$\bar\beta(A_0\bar\beta^3 + A_1\bar\beta^2 + A_2\bar\beta - 2\bar\alpha^2 B)\bar\psi^2 = (\bar\beta^3\bar\varphi)^2,$$

e da questa, dovendo il suo primo membro risultare il quadrato di un polinomio, discende:

(6) $$B \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \bar\beta),$$

nell'ipotesi che il polinomio $\bar\beta$, di grado $n_2 = 3$ [ved. nota [8])] e primo con α, non abbia una componente lineare doppia.

Qualora si osservi che la totalità degli zeri dell'ideale $(B, \bar\beta)$ rappresenta il k-insieme algebrico dei punti costituenti le generatrici inflessionali [12]) e quelle multiple del cilindro $\bar\tau$ definito nel n. 2, dalla (6) consegue che, in un sopracorpo algebrico di k, $\bar\tau$ è riducibile in piani. Tenuto anche conto del caso prima escluso che $\bar\beta$ abbia una componente doppia [nel quale vale ovviamente la (6) per il particolare significato di B], e riferendoci ora alla superficie (proiettiva) F, si ha dunque che:

Se F è ad asintotiche separabili, il cono τ delle tangenti

---

[12]) Una generatrice g di $\bar\tau$ dicesi notoriamente *inflessionale* se essa è semplice per $\bar\tau$ e se $i(g: \bar\tau \cdot \pi) = 3$, avendo indicato con π il piano tangente (fisso) a $\bar\tau$ lungo g.

nel suo punto triplo T risulta riducibile in k, o in un sopracorpo algebrico di k, e le sue componenti assolutamente irriducibili sono tutte lineari.

4. - Sia H la *superficie hessiana* di F, la cui equazione, a norma della (1), può scriversi:

$$(7)\qquad h(X_0, X_1, X_2, X_3) =$$

$$= \begin{vmatrix} X_3\beta_{00} - \alpha_{00} & X_3\beta_{01} - \alpha_{01} & X_3\beta_{02} - \alpha_{02} & \beta_0 \\ X_3\beta_{10} - \alpha_{10} & X_3\beta_{11} - \alpha_{11} & X_3\beta_{12} - \alpha_{12} & \beta_1 \\ X_3\beta_{20} - \alpha_{20} & X_3\beta_{21} - \alpha_{21} & X_3\beta_{22} - \alpha_{22} & \beta_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & 0 \end{vmatrix},$$

$h(X_0, X_1, X_2, X_3)$ essendo dunque un polinomio (omogeneo) dell'ottavo grado dell'anello $k[X_0, X_1, X_2, X_3,]$ e le α_i, β_i e le α_{ij}, β_{ij} stando ad indicare le derivate parziali prime e seconde di $\alpha(X_0, X_1, X_2)$, $\beta(X_0, X_1, X_2)$ rispetto ad X_i e ad X_i, X_j, $(i, j = 0, 1, 2)$.

La superficie H, di cui H è la chiusura proiettiva, può allora rappresentarsi con:

$$(7')\qquad h(X, Y, Z),$$

essendo (7') un polinomio dell'anello $k[X, Y, Z]$, legato a quello (7) da una relazione analoga alle (2). Ove ciò sia conveniente, si potrà supporre senza restrizione che anche il polinomio (7') — come già quello (7) — sia dell'ottavo grado, potendosi sempre mettere in queste condizioni con un'opportuna trasformazione delle coordinate proiettive in $P_3(K)$, e di conseguenza di quelle affini in $A_3(K)$.

Indicata con Γ la *curva parabolica* di F, (curva dell'ordine $4 \times 8 = 32$), è noto che[13]:

La superficie F è ad asintotiche separabili se, e solo se, la sua curva parabolica Γ è doppia, ed inoltre la curva $\frac{1}{2}\Gamma$

---

13) Ved. A. PREDONZAN, loc. cit. in 3).

è linearmente equivalente a quelle segate su F dal sistema lineare metà di quello generato dalla relativa superficie hessiana H [14]).

La (5), tenuto conto della (6) e della (4), nella quale può ora supporsi $\bar{\psi}(X, Y) = [\bar{\beta}(X, Y)]^2$, può scriversi:

$$\Delta = \frac{[\bar{\varphi}(X, Y)]^2}{[\bar{\beta}(X, Y)]^4}; \tag{8}$$

e poichè risulta (come si verifica con semplice calcolo):

$$\bar{h}\left(X, Y, \frac{\bar{\alpha}(X, Y)}{\bar{\beta}(X, Y)}\right) = 9\bar{\beta}^4\Delta, \tag{9}$$

dalla (8) discende che:

$$\bar{h}\left(X, Y, \frac{\bar{\alpha}(X, Y)}{\bar{\beta}(X, Y)}\right) = 9[\bar{\varphi}(X, Y)]^2. \tag{10}$$

Essendo la curva Γ rappresentata dal sistema (1), (7), si ha che, a norma della (10), la $\bar{\Gamma}$, di cui Γ è la chiusura proiettiva, può rappresentarsi con:

$$\begin{cases} Z\bar{\beta}(X, Y) - \bar{\alpha}(X, Y), \\ [\bar{\varphi}(X, Y)]^2. \end{cases} \tag{11}$$

---

[14]) Noi diciamo che la curva parabolica $\Gamma = F \cdot H$ è doppia se risulta pari la molteplicità d'intersezione di F con H in ogni componente assolutamente irriducibile Γ_s di Γ: cioè se:

$$i(\Gamma_s;\ F \cdot H) = 2m_s,$$

con m_s intero ≥ 1. Posto allora:

$$\Gamma = 2\,\Sigma_s\, m_s \Gamma_s,$$

la sommatoria essendo estesa a tutte le componenti assolutamente irriducibili di Γ, la curva $\frac{1}{2}\Gamma$, resta definita da:

$$\frac{1}{2}\Gamma = \Sigma_s\, m_s \Gamma_s.$$

Dalla (11) deriva allora che la curva $\frac{1}{2}\Gamma$ può rappresentarsi mediante il sistema:

$$(12) \qquad \begin{cases} X_3\beta(X_0, X_1, X_2) - \alpha(X_0, X_1, X_2), \\ \varphi(X_0, X_1, X_2), \end{cases}$$

dove $\varphi(X_0, X_1, X_2)$ è un polinomio (omogeneo) del quarto grado dell'anello $k[X_0, X_1, X_2]$, legato a quello $\bar{\varphi}(X, Y)$ da una relazione analoga alle (2).

Dalle (12) consegue che:

a) *Se F è ad asintotiche separabili, la curva (del sedicesimo ordine) $\frac{1}{2}\Gamma$ ha nel punto $T \equiv (0, 0, 0, 1)$, triplo per F, molteplicità (almeno) dodici.*

Dallo sviluppo del determinante (7) deriva poi immediatamente che:

b) *Se il cono cubico τ delle tangenti ad F in T si spezza (in k o in un sopracorpo algebrico di k) in tre piani distinti non passanti per una stessa retta, il punto T ha molteplicità sei per H ed il relativo cono del sesto ordine delle tangenti è riducibile nelle tre componenti lineari di τ, ciascuna con molteplicità due*[15]).

Infine è facile constatare che:

c) *Se il cono cubico τ delle tangenti ad F in T si spezza in piani, e se la curva parabolica Γ di F è doppia, sono componenti di $\frac{1}{2}\Gamma$ tutte le rette di F uscenti da T, cioè le rette*

---

[15]) Si ricordi a tal proposito che in un punto T di molteplicità s per una superficie algebrica F, la relativa superficie hessiana H ha molteplicità almeno $4s-6$, ed il cono delle tangenti ad H in T si spezza nel cono, d'ordine s, delle tangenti ad F in T ed in un ulteriore cono dell'ordine $3(s-2)$, che è il cono hessiano del precedente; [ved., ad es., *Repertorium der Höheren Mathematik*, b. 2°: *Geometrie*, pg. 684].

componeti la varietà W (del dodicesimo ordine) intersezione di F con τ [16]).

5. - In questo n. determineremo i tipi proiettivamente distinti [ved. nota [6])], delle superficie monoidali F del quarto ordine, ad asintotiche separabili, nel caso che il cono cubico τ delle tangenti ad F nel punto triplo T si spezzi (in k o in un sopracorpo algebrico di k) in tre piani distinti, non passanti per una stessa retta.

Sia r una delle componenti (rettilinee) di $\frac{1}{2}\Gamma$ che passano per T, [n. 4, prop. c)], e si supponga che r non sia retta doppia per F ed appartenga ad uno solo, σ, dei tre piani componenti il cono τ.

Poichè il piano tangente ad F in un punto generico P di r non varia al variare di P su r [17]), esso si dirà *piano tangente stazionario* lungo r.

Risulta subito che: *il piano tangente stazionario lungo r coincide con il piano σ, e su r vi è un punto, distinto da T, doppio per F.* Infatti, scritta l'equazione di F nella forma:

$$X_3 \cdot X_0 X_1 (X_2 + aX_0) - \Sigma_{i_0 i_1 i_2} a_{i_0 i_1 i_2} X_0^{i_0} X_1^{i_1} X_2^{i_2}, \tag{13}$$
$$(i_0 + i_1 + i_2 = 4),$$

ed assunto come piano σ quello $X_1 = 0$, e come retta r quella congiungente i due punti $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1)$ — il che com-

---

[16]) L'appartenenza di una componente r di W alla superficie hessiana H di F, e quindi alla relativa curva parabolica Γ, sussiste — anche senza l'ipotesi che Γ sia curva doppia — nel caso che r sia retta intersezione di due piani componenti semplici di τ, oppure r appartenga ad un piano che sia componente di τ di molteplicità ≥ 2.

[17]) Il piano π_P tangente ad F in un punto P di r, semplice per F, sega infatti F in una quartica $\mathcal{C}_P$ avente in P un tacnodo o, in particolare, un punto triplo, [ved. C. SEGRE, loc. cit. in [5])]; ne viene che $\mathcal{C}_P$ ha r come componente di molteplicità (almeno) due, dal che si deduce che π_P tocca F lungo tutta la r, e pertanto r è componente di $\frac{1}{2}\Gamma$.

porta che nella (13) sia $a_{400}=0$ — il piano tangente ad F nel punto generico $(\lambda, 0, 0, \mu)$ di r ha per equazione:

$$(14) \qquad (a\mu - a_{310}\lambda)X_1 - a_{301}\lambda X_2 ,$$

ed è quindi stazionario (appena si osservi che $a \neq 0$ perchè per ipotesi r appartiene ad uno solo, σ, dei tre piani componenti τ), se, e solo se, $a_{301}=0$, divenendo in tal caso proprio il piano σ. Inoltre il polinomio (14) diviene il polinomio nullo per la specializzazione $(a, 0, 0, a_{310})$ di $(\lambda, 0, 0, \mu)$, per cui il punto $(a, 0, 0, a_{310})$ è doppio per F, risultando sempre distinto da $T=(0, 0, 0, 1)$.

Poichè il piano σ, a norma della proposizione b) del n. 4, ha molteplicità due quale componente del cono, del sesto ordine, delle tangenti ad H in T, si ha che vale (almeno) quattro la molteplicità di r come componente di Γ e perciò: *r è componente di molteplicità (almeno) due per $\frac{1}{2}\Gamma$*. Inoltre: *r è componente di molteplicità (almeno) due anche per la varietà $W=F\cdot\tau$, del dodicesimo ordine*[15]).

Facciamo ora l'ipotesi che ciascuna delle componenti r_j di $\frac{1}{2}\Gamma$ uscenti da T soddisfi alle condizioni già ammesse per r. Dall'ultima proposizione enunciata discende allora che il numero ν delle componenti r_j (distinte) soddisfa alla limitazione $\nu \leq 6$.

Se $\nu=6$, la superficie F ha, per quanto sopra stabilito, oltre al punto triplo triplanare T, sei punti doppi P_j, ciascuno situato su una delle r_j, $(j=1, 2, \dots, 6)$. Poichè in tale caso si ha $i(r_j;\ F\cdot H)=4$, cioè r_j è componente di molteplicità due per $\frac{1}{2}\Gamma$, e poichè in ogni punto doppio P_j di

---

15) Ciò è già noto perchè σ è piano tangente stazionario ad F lungo r, ed è confermato dal fatto che, per $X_1=0$, la (13) — nella quale si è posto $a_{400}=a_{301}=0$ — diviene:

$$X_2^2(a_{004}X_2^2 + a_{103}X_0X_2 + a_{202}X_0^2).$$

F la curva $\frac{1}{2}\Gamma$ ha molteplicità (almeno) tre [19]), ne viene che la quartica $\mathfrak{L}$, residua di $2\sum_{j=1}^{6} r_j$ rispetto a $\frac{1}{2}\Gamma$, deve passare per i sei punti P_j, che devono ovviamente risultare doppi per la stessa. Si conclude allora che: *la quartica $\mathfrak{L}$ è costituita dai quattro lati di un quadrilatero piano completo i cui sei vertici sono i sei punti doppi P_j di F ed il cui trilatero diagonale è la sezione con il piano di $\mathfrak{L}$ dei tre piani componenti il cono cubico τ delle tangenti ad F nel suo punto triplo triplanare T.*

L'equazione (1) di una superficie F che abbia le caratteristiche ora indicate può assumere — appena si scelga come piano di $\mathfrak{L}$ quello $X_3 = 0$, e come cono τ delle tangenti nel punto triplo $T = (0, 0, 0, 1)$ quello spezzato nei tre piani $X_0 = 0$, $X_1 = 0$, $X_2 = 0$ — la seguente forma:

$$(15) \qquad X_0X_1X_2X_3 + a_0^2X_0^4 + a_1^2X_1^4 + a_2^2X_2^4 -$$
$$- 2(a_0a_1X_0^2X_1^2 + a_1a_2X_1^2X_2^2 + a_2a_0X_2^2X_0^2),$$

con a_0, a_1, $a_2 \neq 0$, e per essa è facile vedere che sono soddisfatte le condizioni dei nn. 3, 4 per la separabilità delle asintotiche. Si trova così la superficie I) del n. 1, e la sua equazione canonica I') si ottiene dalla (15) per una opportuna trasformazione di coordinate proiettive di $P_3(K)$, definita su K.

Il caso ora considerato è, per le superficie monoidali F ad asintotiche separabili con il cono τ delle tangenti nel punto triplo T spezzato in tre piani non per una stessa retta, quello *generale*. Gli altri eventuali casi, da esso proiettivamente distinti, sono allora *specializzazioni* dello stesso, (corrispondenti alle possibili degenerazioni del quadrilatero piano completo $\mathfrak{L}$, fisso restando il suo triangolo diagonale), e quindi si ottengono dalla (15) per particolari valori delle a_i, ($i = 0, 1, 2$), che ne alterino la natura proiettiva. Ciò

---

[19]) In un punto di molteplicità s per una superficie algebrica F, la relativa curva parabolica ha molteplicità $s(4s-5)$ almeno; [ved. op. cit., in [15]), pg. 686].

avviene quando una sola delle a_i, ad es. a_0, è nulla [20]), ed allora la (15) assume la forma:

$$X_0X_1X_2X_3 + (a_1X_1^2 - a_2X_2^2)^2, \tag{16}$$

con a_1, $a_2 \neq 0$. Si ottiene così la superficie II) del n. 1, la cui equazione canonica II') è immediatamente deducibile dalla (16).

6. - Tratteremo qui il caso in cui il cono τ delle tangenti ad F nel suo punto triplo $T=(0, 0, 0, 1)$ si spezzi in tre piani distinti passanti per una medesima retta.

L'equazione di una superficie di questo tipo si può ottenere per la seguente particolarizzazione della (1):

$$X_1X_2X_3(X_1 + X_2) - \alpha(X_0, X_1, X_2), \tag{17}$$

con:

$$\alpha(X_0, X_1, X_2) = \Sigma_{i_0i_1i_2}X_0^{i_0}X_1^{i_1}X_2^{i_2}, \qquad (i_0 + i_1 + i_2 = 4). \tag{18}$$

L'equazione (7) della relativa superficie hessiana H si scrive:

$$\begin{aligned} 6X_1X_2X_3(X_1 + X_2)(X_1^2 + X_1X_2 + X_2^2)\alpha_{00} + \\ + X_1^2(X_1 + 2X_2)^2(\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}^2) + 2X_1X_2(X_1 + 2X_2)(X_2 + \\ + 2X_1)(\alpha_{01}\alpha_{02} - \alpha_{00}\alpha_{12}) + X_2^2(X_2 + 2X_1)^2(\alpha_{00}\alpha_{22} - \alpha_{02}^2). \end{aligned} \tag{19}$$

Eliminando X_3 dalle (17), (19), si ottiene l'equazione della proiezione Γ' di Γ dal punto $T=(0, 0, 0, 1)$ sul piano $X_3=0$, che risulta essere una curva dell'ottavo ordine. Imponendo a questa di essere curva doppia — il che equivale, a norma della (9), ad imporre, in coordinate affini, la validità della

[20]) Non possono essere nulle due delle a_i per la supposta irriducibilità della superficie F.

(4) — si ottengono, con calcolo diretto[21]), che per brevità si omette, le seguenti condizioni per i coefficienti della (18):

$$a_{220} = a_{211} = a_{202} = a_{310} = a_{301} = a_{400} = 0.$$

le quali comportano che F sia rigata, con retta tripla la congiungente i due punti (1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1).

Si conclude che *non esistono monoidi quartici non rigati ad asintotiche separabili il cui punto triplo sia triplanare con il relativo cono delle tangenti spezzato in tre piani per una stessa retta.*

7. - Consideriamo ora il caso che il cono τ delle tangenti ad F in T abbia due sole componenti lineari, una delle quali di molteplicità due.

L'equazione di una F di questo tipo può scriversi:

(20) $$X_1^2X_2X_3 - \alpha(X_0, X_1, X_2),$$

dove $\alpha(X_0, X_1, X_2)$ è data dalla (18).

L'equazione di H allora diviene:

(21) $$X_1^2[6X_1^2X_2X_3\alpha_{00} + X_1^2(\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}^2) + \\ + 4X_1X_2(\alpha_{01}\alpha_{02} - \alpha_{00}\alpha_{12}) + 4X_2^2(\alpha_{00}\alpha_{22} - \alpha_{02}^2)].$$

---

21) Questo calcolo, e così quello analogo del n. successivo, si semplifica notevolmente appena si tenga conto che le componenti assolutamente irriducibili della curva Γ' debbono essere, se la superficie F è ad asintotiche separabili, tutte rettilinee. Ciò deriva dal fatto che non solo, per quanto si è visto nel n. 4, prop. c), $\Gamma\left(o\ \frac{1}{2}\ \Gamma'\right)$ ha come componenti rettilinee tutte quelle di $W = F \cdot \tau$, ma sono altresì rettilinee le componenti di Γ che non passano per T, il che si verifica facilmente poggiando su C. SEGRE [loc. cit. in [5])] e servendosi di una rappresentazione piana di F, ottenuta per proiezione dal punto T ad es. sul piano $X_3 = 0$. Mediante tale rappresentazione si ottiene il sistema lineare Σ, immagine di quello delle sezioni piane di F, e si constata che in esso non vi possono essere ∞^1 curve aventi un tacnodo, variabile su una curva (non retta), il che dovrebbe avvenire se esistesse una componente di Γ non passante per T, non rettilinea.

Eliminando X_3 tra le (20), (21), e con il procedimento indicato nel n. 7, si ottengono due diverse particolarizzazioni dei coefficienti della (18) che, come è facile constatare, caratterizzano appunto i due tipi III) e IV) del n. 1.

Per quanto riguarda il tipo III), appena si assuma come punto doppio D quello (0, 1, 0, 0), la sua equazione (20) diviene:

$$X_1^2 X_2 X_3 - [X_1^2(a_{220}X_0^2 + a_{121}X_0X_2 + a_{022}X_2^2) + a_{004}X_2^4],$$

e questa, mediante la trasformazione di coordinate:

$$\begin{cases} X_0 = \overline{X}_0, \\ X_1 = \overline{X}_1, \\ X_2 = \overline{X}_2, \\ X_3 = a_{121}\overline{X}_0 + a_{022}\overline{X}_2 + \overline{X}_3, \end{cases}$$

si scrive:

$$X_1^2 X_2 X_3 - (a_{220}X_0^2 X_1^2 + a_{004}X_2^4),$$

donde si ottiene facilmente la III′) del n. 1.

Per quanto riguarda invece il tipo IV), la sua equazione (20), qualora si prenda come ulteriore punto triplo T_2 quello (0, 0, 1, 0) e come punto doppio D quello (0, 1, 0, 0), assume la forma:

$$X_1^2 X_2 X_3 - (a_{400}X_0^4 + a_{121}X_0X_1^2X_2),$$

ed essa, mediante la trasformazione:

$$\begin{cases} X_0 = \overline{X}_0, \\ X_1 = \overline{X}_1, \\ X_2 = \overline{X}_2, \\ X_3 = a_{121}\overline{X}_0 + \overline{X}_3, \end{cases}$$

diviene:

$$X_1^2 X_2 X_3 - a_{400}X_0^4,$$

donde la IV′) del n. 1.

8. - Consideriamo infine il caso che il punto triplo T di F sia uniplanare. L'equazione (1) della F stessa può allora scriversi sulla forma:

$$X_0^3 X_3 - \alpha(X_0, X_1, X_2), \tag{22}$$

con $\alpha(X_0, X_1, X_2)$ dato dalla (18).

L'equazione della superficie hessiana H di F diviene di conseguenza:

$$X_0^4(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2), \tag{23}$$

e da questa discende che la condizione di separabilità delle asintotiche di F si traduce nella determinazione dei coefficienti della (18) in guisa che risulti doppia la quartica Γ' rappresentata dal secondo fattore della (23). Ciò conduce, come lo conferma una facile verifica, ai due tipi V), VI) del n. 1, le cui equazioni canoniche possono chiaramente assumere, mediante un'opportuna trasformazione di coordinate proiettive definita su K, le due forme V'), VI'); in esse il punto O è quello (1, 0, 0, 0,) ed il relativo piano tangente quello $X_3 = 0$ [22]).

---

[22]) Ved. — in relazione al caso considerato in questo n. — il n. 13 del lavoro cit. in [3]). In tale lavoro si erano già trovati i due tipi V, VI), ma non si aveva ancora verificato ch'essi erano, per i monoidi quartici ad asintotiche separabili con punto triplo uniplanare, i due soli tipi possibili.