

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Condizioni di distributività ed associatività unilaterali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 30 (1960), p. 178-193

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__178_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

CONDIZIONI DI DISTRIBUTIVITÀ ED ASSOCIATIVITÀ UNILATERALI

Nota () di DOMENICO BOCCIONI (a Padova)*

In un precedente lavoro ([2]¹⁾) è stato eseguito uno studio delle condizioni di s -distributività (cioè di distributività a sinistra):

$$x(y + z) = (xy) + (xz),$$

in relazione al problema della loro indipendenza.

L'analogo problema per le condizioni di associatività era stato in precedenza risolto da G. Szász ([4]).

Nella presente nota viene studiato come si influenzino mutuamente le condizioni di distributività unilaterale (per esempio, appunto, di distributività a sinistra) e le condizioni di associatività additiva (α -associatività):

$$(x + y) + z = x + (y + z),$$

o, rispettivamente, moltiplicativa (μ -associatività):

$$(xy)z = x(yz).$$

In termini precisi (cfr. n.° 1), viene studiato il problema di determinare un sottinsieme costituito da condizioni indipendenti ed equivalente all'insieme formato dalle $2\nu^3$ condizioni di s -distributività e di α -associatività (o, rispettivamente, μ -associatività) di un insieme B avente numero cardinale ν .

(*) Pervenuta in Redazione il 9 maggio 1960.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

¹⁾ I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

Tale problema viene risolto per ogni valore di ν , determinando, anzi, tutti i sottinsiemi predetti (teoremi 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Si è trovato, in particolare, che: Sia le $2\nu^3$ condizioni di s -distributività e di α -associatività, sia le $2\nu^3$ condizioni di s -distributività e di μ -associatività, sono indipendenti se, e soltanto se, $\nu \geq 4$, (corollari 1, 2).

§ 1

1. - Dato un insieme B avente numero cardinale (non necessariamente finito) $\nu \geq 2$, le ν^3 eguaglianze:

$$(\alpha) \quad (x + y) + z = x + (y + z) \quad (x, y, z \in B)$$

si diranno *condizioni di α -associatività* di B , mentre le ν^3 altre:

$$(\mu) \quad (xy)z = x(yz) \quad (x, y, z \in B)$$

si diranno invece *condizioni di μ -associatività* di B .

Se B^0 è un bisistema di sostegno B ([2], n.º 1), ed $x, y, z \in B$, la terna (ordinata) (x, y, z) si dirà *α -associativa* in B^0 se vale l'eguaglianza (α) . La terna (x, y, z) si dirà *α -isolata* in B^0 , se essa non vi è α -associativa mentre tutte le rimanenti terne (di elementi di B) vi sono invece α -associative.

Le definizioni di terna *μ -associativa* e *μ -isolata* in B^0 , si deducono dal precedente capoverso leggendovi μ invece di α .

Diremo che un bisistema è *α -associativo* (risp. *μ -associativo*) se in esso sono α -associative (risp. μ -associative) tutte le terne formate coi suoi elementi.

Consideriamo, oltre alle (α) e (μ) , le ν^3 condizioni di s -distributività di B ([2]):

$$(1) \quad x(y + z) = (xy) + (xz) \quad (x, y, z \in B)$$

Per un sottinsieme *indipendente* (o costituito da condizioni *indipendenti*) di un certo insieme non vuoto di condizioni (quali ad es. le (α) , (μ) , (1)) relative agli elementi di B e interpretabili in un bisistema di sostegno B , intenderemo un

sottinsieme tale che, fissata una sua condizione qualsiasi, esiste sempre un bisistema di sostegno B nel quale la condizione fissata non è soddisfatta mentre tutte le rimanenti condizioni del sottinsieme stesso vi sono invece soddisfatte²⁾.

Diremo che due sottinsiemi dell'insieme di condizioni considerato nel preced. capoverso sono *equivalenti* (o che sono costituiti da condizioni *equivalenti*), e che ognuno è *equivalente* all'altro, se il verificarsi delle condizioni di uno qualsiasi di essi in un bisistema B^0 di sostegno B implica sempre (qualunque sia B^0) il verificarsi in B^0 delle condizioni dell'altro³⁾.

Studieremo separatamente, nei numeri successivi, dapprima (§ 1) l'insieme costituito dalle $2\nu^3$ condizioni (1) e (α) (« condizioni di distributività ed associatività unilaterali contrapposte »), quindi (§ 2) l'insieme costituito dalle $2\nu^3$ condizioni (1) e (μ) (« condizioni di distributività ed associatività unilaterali sovrapposte »), decidendo, per ogni ν , se l'insieme considerato è indipendente, e, nel caso che non lo sia, determinando tutti i suoi sottinsiemi indipendenti e ad esso equivalenti.

2. - LEMMA: *Sia C^0 un sopra-bisistema proprio ([2], n.º 3) di un bisistema B^0 , ed esista un $w \in C \dot{-} B$ tale che in C^0 si abbia*

$$(2) \quad vx = xv = w, \quad v + x = x + v = w$$

per ogni $v \in C \dot{-} B$ e per ogni $x \in C$. Allora ogni terna di elementi di C contenente almeno un elemento di $C \dot{-} B$ è α -associativa, μ -associativa ed s -distributiva ([2], n.º 1) in C^0 .

²⁾ Questa definizione esprime che ogni condizione del sottinsieme gode di una certa proprietà (di essere l'unica condizione del sottinsieme non soddisfatta in un opportuno bisistema di sostegno B). Il sottinsieme vuoto deve dunque ritenersi indipendente ([5], p. 7, inizio nota 1).

³⁾ L'ipotesi di questa implicazione deve ritenersi vera ([5], p. 7, inizio nota 1) quando il relativo sottinsieme è vuoto. Essere equivalente all'insieme vuoto, significherà dunque, per un sottinsieme non vuoto, che (tutte) le sue condizioni sono soddisfatte in un qualsiasi bisistema di sostegno B .

Infatti, si veda il lemma 1 in [2] (n.° 3) e l'Hilfssatz 4 in [4] (§ 2).

Consideriamo allora le $2\nu^3$ condizioni (1) e (α), e dimostriamo anzitutto che:

1) *Ciascuna delle cinque terne* (a, a, a) , (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, a) , (a, b, c) *è s-isolata* ([2], n.° 1) *in un bisistema* α -*associativo di sostegno* $B = \{a, b, c\}$, ([2], inizio n.° 5).

Infatti:

1°) Il bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$ definito dalle due tabelle (5) di [2] (n.° 5), nel quale la terna (a, a, a) è s-isolata, è α -associativo.

E invero, ciascuno dei due membri dell'eguaglianza (α) è $= a$ se, e solo se, $x = y = z = a$.

2°) La terna (a, a, b) è s-isolata nel bisistema α -associativo di sostegno $B = \{a, b, c\}$ definito dalle due seguenti tabelle:

$$(3) \quad \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline a & a & b & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \mu & a & b & c \\ \hline a & c & b & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

E invero, si vedano le (12) di [3] (n.° 4), e, per quanto riguarda l' α -associatività di ciascuna terna (x, y, z) , si distinguono i tre casi $x = a, b, c$.

3°) La terna (b, a, a) è s-isolata nel bisistema α -associativo, di sostegno $B = \{a, b, c\}$, opposto ([2], n.° 3) di quello definito dalle precedenti tabelle (3).

E invero, si veda [3], n.° 4, 3°, e, per l' α -associatività, il lemma 5 di [1], n.° 5.

4°) La terna (a, b, a) è s-isolata nel bisistema α -associativo, di sostegno $B = \{a, b, c\}$, α -opposto ([2], n.° 3) di quello definito dalle precedenti tabelle (3).

E invero, si vedano il lemma 2 di [2], n.° 3, e ancora il lemma 5 di [1], n.° 5.

5°) La terna (a, b, c) è s -isolata nel bisistema α -associativo di sostegno $B = \{a, b, c\}$ definito dalle due seguenti tabelle:

$$(4) \quad \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline a & a & a & a \\ b & a & b & c \\ c & a & a & a \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \mu & a & b & c \\ \hline a & a & a & c \\ b & a & a & a \\ c & a & a & a \end{array}$$

E invero (poiché ogni prodotto è $\neq b$) il 2° membro della (1) è sempre $= a$ (in quanto è una somma il cui primo addendo è $\neq b$), mentre il 1° membro è $\neq a$ se e solo se $(x, y, z) = (a, b, c)$; dunque (a, b, c) è s -isolata. Che ciascuna terna (x, y, z) sia α -associativa, si riconosce poi subito distinguendo i tre casi $x = a, b, c$.

II) *Ciascuna terna di elementi dell'insieme $B = \{a, b, c\}$ è s -isolata in un bisistema α -associativo di sostegno B .*

Questa proposizione II) è una conseguenza immediata della preced. I), in virtù di quanto è detto nel n.° 2 di [2].

3. - Dimostriamo adesso che:

III) *Ciascuna delle quattro terne (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, a) , (a, b, c) è α -isolata in un bisistema s -distributivo ([2], n.° 10) di sostegno $B = \{a, b, c\}$.*

Infatti, un tale bisistema si ottiene ad es. ponendo ogni prodotto $= c$, e definendo l'addizione mediante una delle quattro tabelle (nell'ordine): (3), (4), (5), (6) di [4], § 3, (l' s -distributività è evidente).

IV) *Ciascuna terna di elementi dell'insieme $B = \{a, b, c\}$, che sia diversa da ognuna delle tre terne*

$$(5) \quad (a, a, a), \quad (b, b, b), \quad (c, c, c),$$

è α -isolata in un bisistema s -distributivo di sostegno B .

Infatti, ciò risulta immediatamente dalla III), per quanto detto nel n.° 2 di [2], (cfr. [1], n.° 3).

V) Se, in un bisistema di sostegno $B = \{a, b, c\}$, sono α -associative tutte le 24 terne diverse dalle tre terne (5), allora anche le tre terne (5) vi sono α -associative.

Infatti, questa è una conseguenza immediata del lemma 2 di [4], § 5 (cfr. [1], n.º 3).

VI) La terna (a, a, a) è α -isolata in un bisistema s -distributivo di sostegno $B = \{a, b, c, d\}$.

Infatti la terna (a, a, a) , è α -isolata (v. [4], § 4) nel bisistema definito dalle due seguenti tabelle:

(6)	α	$a \quad b \quad c \quad d$	$a \quad b \quad c \quad d$	μ	$a \quad b \quad c \quad d$	$a \quad b \quad c \quad d$
	a	$b \quad c \quad d \quad d$	a	a	$a \quad b \quad c \quad d$	$a \quad b \quad c \quad d$
	b	$d \quad d \quad d \quad d$	b	b	$a \quad b \quad c \quad d$	$a \quad b \quad c \quad d$
	c	$d \quad d \quad d \quad d$	c	c	$a \quad b \quad c \quad d$	$a \quad b \quad c \quad d$
	d	$d \quad d \quad d \quad d$	d	d	$a \quad b \quad c \quad d$	$a \quad b \quad c \quad d$

che è evidentemente s -distributivo, poiché ogni prodotto è uguale al secondo fattore (quindi $x(y + z) = y + z$, $(xy) + (xz) = y + z$).

4. - Le proposizioni dimostrate nei due numeri precedenti permettono intanto di esaurire, per ogni $v > 2$, lo studio dell'insieme costituito dalle $2v^3$ condizioni (1) e (α) (n.º 1, ult. capov.), mediante i due teoremi seguenti.

TEOREMA 1: Se il numero cardinale v di un insieme B è ≥ 4 , le $2v^3$ condizioni ((1) e (α)) di s -distributività e di α -associatività di B sono indipendenti.

TEOREMA 2: Se il numero cardinale v di un insieme B è $= 3$, l'insieme costituito dalle 54 ($= 2v^3$) condizioni ((1) e (α)) di s -distributività e di α -associatività di B contiene un unico sottinsieme indipendente e ad esso equivalente: quello formato dalle 51 condizioni dedotte dalle (1) e (α) sopprimendo le tre condizioni di α -associatività con $x = y = z$.

Dimostrazione del teor. 1: Si ottiene subito (cfr. [2], n.º 7), sfruttando le precedenti proposizioni I), III), VI), il lemma del n.º 2, e le considerazioni del n.º 2 di [2].

Dimostrazione del teor. 2: Dalle due proposizioni II, IV) e dalla proposiz. V) risulta intanto risp. che il sottinsieme di cui si parla nell'enunciato del teor. 2 è indipendente ed equivalente all'insieme delle $2\nu^3$ condizioni (1) e (α). Che esso sia l'unico sottinsieme che gode di queste due proprietà, si riconosce poi subito, osservando che esso è contenuto in ogni sottinsieme equivalente alle $2\nu^3$ condizioni (1) e (α) (per le II) e IV)), e che esso deve appunto coincidere con quest'ultimo se quest'ultimo è inoltre indipendente (per la V)).

5. - In relazione alle condizioni (1) e (α), rimane dunque da esaminare soltanto il caso $\nu=2$. È ciò che ora faremo (n.º 5-8), cominciando da alcune considerazioni preliminari.

Sia dunque $B = \{a, b\}$ un insieme avente due soli elementi. Suddividiamo l'insieme costituito da tutte le (otto) terne di elementi di B nelle seguenti tre classi a due a due disgiunte A_1, A_2, A_3 (considerate in [4], § 6):

$$A_1: (a, a, a), (a, b, a);$$

$$A_2: (b, b, b), (b, a, b);$$

$$A_3: (a, a, b), (a, b, b), (b, a, a), (b, b, a).$$

Si verifica facilmente che, con la terminologia di [2], n.º 10:

VII) *Fra i sedici gruppoidi di sostegno $B = \{a, b\}$, quelli associativi (cioè in cui sono associative — [4], § 2 — tutte le terne di elementi) sono i seguenti otto:*

$$1, 2, 4, 6, 10, 11, 12, 16.$$

VIII) *Nel gruppoide 3, le terne di A_1 e di A_3 sono associative, quelle di A_2 non lo sono.*

IX) *Nel gruppoide 5, le terne di A_1 e di A_2 sono associative, quelle di A_3 non lo sono.*

X) *Nel gruppoide 7, nessuna terna è associativa.*

XI) *Nel gruppoide 8 le terne di A_2 e di A_3 sono associative, quelle di A_1 non lo sono.*

XII) *Nel gruppoide 9, le terne di A_1 e di A_3 sono associative, quelle di A_2 non lo sono.*

XIII) *Nel gruppoide 13, nessuna terna è associativa.*

XIV) *Nel gruppoide 14, le terne di A_2 e di A_3 sono associative, quelle di A_1 non lo sono.*

XV) *Nel gruppoide 15, le terne di A_1 e di A_2 sono associative, quelle di A_3 non lo sono.*

Per provare la VII), è ad es. sufficiente verificare direttamente l'associatività dei soli quattro gruppoidi 1, 2, 10, 11, ed osservare poi che i gruppoidi 4, 6, 12, 16 sono opposti o isomorfi a questi ([2], n.º 10; [1], lemma 5 e p. 232). La non associatività dei rimanenti otto gruppoidi risulta dalle VIII), ..., XV).

Per provare le VIII), ..., XV), è ad es. sufficiente verificare direttamente soltanto le prime tre di queste proposizioni. Seguono allora immediatamente, dapprima le XI) e XV) (isomorfismo), poi le rimanenti tre (passaggio all'opposto: [1], lemma 5).

6. - Indichiamo con

$$\wedge$$

l'insieme di tutte le otto condizioni di α -associatività *relative* (cfr. [2], n.º 8) alle otto terne di elementi dell'insieme $B = \{a, b\}$.

Denotata con

$$\mathfrak{A}$$

una classe costituita da tre terne (di elementi di $B = \{a, b\}$), delle quali una appartenente ad A_1 , una ad A_2 ed una ad A_3 (n.º 5), indichiamo con

$$\wedge_0$$

l'insieme costituito dalle tre condizioni di α -associatività *relative* alle tre terne di \mathfrak{A} . Ebbene ([4], § 6, Satz 3):

XVI) *Gli insiemi \wedge_0 definiti nel precedente capoverso sono gli unici sottinsiemi dell'insieme \wedge (di tutte le otto condizioni*

di α -associatività di $B = \{a, b\}$ ad esso equivalenti e costituiti, ciascuno, da condizioni indipendenti.

Infatti, ciò risulta dalle proposizioni del n.º 5 e da un ragionamento analogo a quello fatto in [2], n.º 9, ult. capoverso.

Quanto si è detto fin qui in questo n.º 6 si può naturalmente ripetere anche per le condizioni di μ -associatività dell'insieme $B = \{a, b\}$. I simboli corrispondenti a \wedge , \mathcal{A} , \wedge_0 saranno rispettivamente

$$\wedge', \mathcal{A}', \wedge'_0.$$

Poniamo ([2], n.º 8):

$$\Phi = \Sigma \dot{+} \wedge,$$

cioè denotiamo con Φ l'insieme delle (sedici) condizioni ((1) e (a)) di s -distributività e di α -associatività di $B = \{a, b\}$, (Σ è l'insieme delle otto condizioni di s -distributività di B).

Denotiamo inoltre con Φ_0 uno qualunque dei sottinsiemi di Φ ottenuti riunendo uno degli insiemi Σ_0 definiti in [2] (fine n.º 8) con uno degli insiemi \wedge_0 definiti qui sopra (n.º 6):

$$\Phi_0 = \Sigma_0 \dot{+} \wedge_0.$$

Ognuno di questi insiemi Φ_0 consta dunque di sette condizioni: quattro di s -distributività (costituenti Σ_0) e tre di α -associatività (costituenti \wedge_0).

7. - Dimostriamo, in questo numero, che:

XVII) *Se, in un bisistema α -associativo (n.º 1) B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$, sono s -distributive ([2], n.º 1) due terne appartenenti una alla classe C_2 e l'altra alla classe C_4 considerate in [2], n.º 8, allora B^0 è s -distributivo ([2], n.º 10).*

Infatti, in tali ipotesi, risultano intanto s -distributive in B^0 entrambe le terne di C_2 ed entrambe quelle di C_4 (per la VII) e la IX) di [2], n.º 6), cioè risultano s -distributive le seguenti quattro terne:

$$(7) \quad (a, a, b), (a, b, a); (b, b, a), (b, a, b)$$

(delle quali le prime due costituiscono C_2 , e le ultime due C_4).

Il bisistema B^0 abbia le tabelle (di addizione e di moltiplicazione) (10) del n.° 6 di [2]. Useremo, nel corso della dimostrazione, la terminologia del n.° 10 di [2].

Il gruppoide additivo di B^0 ([2], n.° 3) è dunque, per ipotesi, uno di quelli elencati nella VII) del n. 5.

Se il gruppoide additivo di B^0 è il 4 oppure il 10, B^0 è evidentemente s -distributivo (se è il 4: $x(y+z) = xz$, $(xy) + (xz) = xz$; se è il 10: $x(y+z) = xy$, $(xy) + (xz) = xy$).

Se il gruppoide additivo di B^0 è l'1, cioè se

$$s_{11} = s_{12} = s_{21} = s_{22} = a,$$

allora l' s -distributività (v. (7)) delle due terne (a, a, b) , (b, b, a) implica risp.:

$$p_{11} = a, \quad p_{21} = a,$$

quindi il gruppoide moltiplicativo di B^0 è necessariamente (v. [2], p. 20) uno dei tre gruppoidi 2, 3, 4, cioè B^0 è uno dei tre bisistemi.

$$(1, 2), \quad (1, 3), \quad (1, 4)$$

che sono, appunto, tutti s -distributivi ([2], XII), p. 21).

Se il gruppoide additivo di B^0 è il 2, cioè se

$$s_{11} = s_{12} = s_{21} = a, \quad s_{22} = b,$$

allora l' s -distributività delle due terne (a, a, b) , (b, b, a) implica risp. $p_{11} = p_{11} + p_{12}$, $p_{21} = p_{22} + p_{21}$, donde (risp.):

$$(p_{11}, p_{12}) \neq (b, a), \quad (p_{21}, p_{22}) \neq (b, a),$$

quindi (v. [2], p. 20) B^0 è uno degli otto bisistemi

$$(2, 1), \quad (2, 3), \quad (2, 4), \quad (2, 7), \quad (2, 8), \quad (2, 10), \quad (2, 12), \quad (2, 16),$$

che sono appunto, tutti s -distributivi. E invero essi figurano tutti nella XII) di [2], p. 21, tranne (2, 10) e (2, 16), la cui s -distributività è evidente.

Se il gruppoide additivo di B^0 è il 6, cioè se

$$s_{11} = s_{22} = b, \quad s_{12} = s_{21} = a,$$

allora l' s -distributività delle due terne (a, a, b) , (b, b, a) implica risp. $p_{11} = p_{11} + p_{12}$, $p_{21} = p_{22} + p_{21}$, da cui segue che sia (p_{11}, p_{12}) che (p_{21}, p_{22}) è diversa da ciascuna delle due coppie (a, a) , (b, a) ; quindi (v. [2], p. 20) B^0 è uno dei quattro bisistemi

$$(6, 4), (6, 8), (6, 12), (6, 16),$$

i quali sono, appunto, tutti s -distributivi. E invero, si veda la XII) di [2], p. 21, osservando che gli ultimi tre di questi bisistemi sono risp. isomorfi ai bisistemi $(11, 3)$, $(11, 2)$, $(11, 1)$ ([2], p. 20).

Se, infine, il gruppoide additivo di B^0 è uno dei tre seguenti: 11, 12, 16, allora l'immagine isomorfa di B^0 mediante la corrispondenza $a \rightarrow b$, $b \rightarrow a$ è un bisistema α -associativo di sostegno $B = \{a, b\}$ in cui sono ancora s -distributive le terne (7) (delle due classi C_2 e C_4) ed il cui gruppoide additivo è uno dei tre seguenti (v. [2], p. 20): 6, 2, 1; questo bisistema è dunque s -distributivo, per quanto si è visto nei tre precedenti capoversi. Perciò anche B^0 è s -distributivo, e la XVII) è dimostrata.

Osserviamo, inoltre, che:

XVIII) *Ciascuna delle due classi C_2 e C_4 , considerate nel n.° 8 di [2], è s -isolata ([2], p. 18) in un bisistema α -associativo di sostegno $B = \{a, b\}$.*

Infatti, per la classe C_2 , un tale bisistema è ad es. quello denifito dalle tabelle (14) di [2], p. 18, cioè ([2], n.° 10) il bisistema (2,5), (v. n.° 5, VII)); per la classe C_4 è il (12, 15), cioè ([2], p. 20) l'immagine isomorfa del (2,5) mediante la corrispondenza $a \rightarrow b$, $b \rightarrow a$.

8. - Diremo che la classe A_i ($i=1, 2, 3$) del n.° 5 è α -isolata in un bisistema B^0 di sostegno $B = \{a, b\}$, se le terne di A_i non sono α -associative in B^0 , mentre tutte le rimanenti terne (di elementi di B) vi sono invece α -associative.

XIX) *Ciascuna delle tre classi A_1, A_2, A_3 , considerate nel n.° 5, è α -isolata in un bisistema s -distributivo ([2], n.° 10) di sostegno $B = \{a, b\}$.*

Infatti (n.º 5 e [2], n.º 10) tali bisistemi sono ad es. risp. (8, 4), (3, 4), (5, 4), (l' *s*-distributività è evidente: $x(y + z) = y + z$, $(xy) + (xz) = y + z$).

Siamo ora in grado di concludere lo studio dell'insieme costituito dalle $2\nu^3$ condizioni (1) e (α), (n.º 1), nel caso $\nu = 2$.

Supponiamo perciò che Φ_2 sia un sottinsieme (necessariamente proprio e non vuoto) dell'insieme Φ (n.º 6) a questo equivalente e costituito da condizioni indipendenti. Allora Φ_2 non può contenere (essendo indipendente) due condizioni di *s*-distributività (risp. di α -associatività) relative a due terne di una stessa classe C_i del n.º 8 di [2] (risp. di una stessa classe A_i del n.º 5), poiché due tali condizioni sono sempre o entrambe soddisfatte o entrambe non soddisfatte in un (medesimo) bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ (n.º 5 e [2], n.º 6); dunque Φ_2 è sottinsieme di uno degli insiemi Φ_0 definiti alla fine del n.º 6.

D'altra parte Φ_2 (essendo equivalente a Φ) deve contenere (in virtù delle XVIII) e XIX): *una condizione di s-distributività relativa ad una terna di C_2 , una condizione di s-distributività relativa ad una terna di C_4 ([2], n.º 8) e le tre condizioni di α -associatività di uno degli insiemi \bigwedge_0 (n.º 6); denotiamo con*

$$\Phi_1$$

l'insieme formato da queste cinque condizioni.

Inoltre Φ_2 (essendo indipendente) non può contenere una condizione di *s*-distributività relativa ad una terna di C_1 o di C_3 ([2], n.º 8), e ciò perché, in virtù della XVI) (n.º 6) e della XVII) (n.º 7), Φ_1 è equivalente a Φ ; dunque $\Phi_2 = \Phi_1$.

Viceversa è chiaro che uno qualsiasi degli insiemi Φ_1 è indipendente (per le XVIII) e XIX)) ed equivalente a Φ (v. preced. capoverso). Possiamo dunque concludere col seguente

TEOREMA 3: *Gli insiemi Φ_1 (ognuno formato da 5 condizioni: due di *s*-distributività e tre di α -associatività) definiti nel terzultimo capoverso sono gli unici sottinsiemi dell'insieme Φ (di tutte le 16 condizioni di *s*-distributività e di α -associatività di $B = \{a, b\}$) ad esso equivalenti e costituiti, ciascuno, da condizioni indipendenti.*

Ad esempio, un sottinsieme indipendente ed equivalente all'insieme Φ (cioè uno dei sottinsiemi Φ_1) è quello formato dalle due condizioni di s -distributività relative alle due terne

$$(8) \quad (a, b, a), \quad (b, a, b),$$

e dalle tre condizioni di α -associatività relative alle tre terne

$$(9) \quad (a, b, a), \quad (b, a, b), \quad (a, a, b).$$

Per decidere dunque se un dato bisistema di sostegno $B = \{a, b\}$ sia simultaneamente s -distributivo ([2], n.º 10) ed α -associativo, è sufficiente (e, in generale, necessario) esaminare soltanto queste cinque condizioni (fra tutte le sedici condizioni (1) e (α)).

Dai teoremi 1, 2 (n.º 4) e 3 discende, in particolare, il seguente

COROLLARIO 1: *Le $2\nu^3$ condizioni ((1) e (α)) di s -distributività e di α -associatività di un insieme B , avente numero cardinale ν , sono indipendenti (n.º 1) se, e soltanto se, $\nu \geq 4$.*

§ 2

9. - Esaminiamo adesso l'insieme costituito dalle $2\nu^3$ condizioni (1) e (μ), (n.º 1, ult. capov.).

I') *Ciascuna delle cinque terne (a, a, a) , (a, a, b) , (b, a, a) , (a, b, a) , (a, b, c) è s -isolata ([2], n.º 1) in un bisistema μ -associativo di sostegno $B = \{a, b, c\}$.*

Infatti (cfr. n.º 2), si riconosce facilmente che:

1º) I tre bisistemi (di sostegno $B = \{a, b, c\}$) definiti risp. dalle tabelle (5), (6) e (8) di [2] (n.º 5), nei quali sono risp. s -isolate le terne (a, a, a) , (a, a, b) e (a, b, a) , sono μ -associativi.

2º) La terna (b, a, a) è s -isolata nel bisistema μ -associativo definito dalle due seguenti tabelle:

$$(10) \quad \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline a & b & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \mu & a & b & c \\ \hline a & c & c & c \\ b & c & b & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

3°) La terna (a, b, c) è s -isolata nel bisistema μ -associativo definito dalle due seguenti tabelle:

$$(11) \quad \begin{array}{c|ccc} \alpha & a & b & c \\ \hline a & c & c & c \\ b & c & c & a \\ c & c & c & c \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} \mu & a & b & c \\ \hline a & a & c & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

XX) Valgono le cinque proposizioni $II')$, $III')$, $IV')$, $V')$, $VI')$ che si deducono risp. dalle $II)$, $III)$, $IV)$, $V)$, $VI)$, (n.¹ 2 e 3) leggendo μ invece di α .

Infatti, per dimostrare la $III')$ e la $VI')$, basta ad es. considerare i bisistemi aventi come gruppidi moltiplicativi ([2], n.º 3) i gruppidi additivi dei bisistemi considerati per dimostrare la $III)$ e la $VI)$, e nei quali l'addizione è così definita:

$$x + y = y,$$

qualunque siano gli elementi x ed y , (l' s -distributività è evidente).

Per dimostrare le altre tre proposizioni $II')$, $IV')$, $V')$, basta fare ragionamenti del tutto analoghi a quelli fatti nei n.¹ 2 e 3 (sfruttando adesso la $I')$ e la $III')$).

TEOREMA 4: *Se il numero cardinale ν di un insieme B è ≥ 4 , le $2\nu^3$ condizioni ((1) e (μ)) di s -distributività e di μ -associatività di B sono indipendenti.*

TEOREMA 5: *Se il numero cardinale ν di un insieme B è $= 3$, l'insieme costituito dalle 54 ($= 2\nu^3$) condizioni ((1) e (μ)) di s -distributività e di μ -associatività di B contiene un unico sottinsieme indipendente e ad esso equivalente: quello formato dalle 51 condizioni dedotte dalle (1) e (μ) sopprimendo le tre condizioni di μ -associatività con $x = y = z$.*

Dimostrazione dei teoremi 4 e 5: Si faccia un ragionamento del tutto analogo a quello fatto nel n.º 4, sfruttando adesso le proposizioni $I')$, ..., $VI')$.

10. - In relazione alle $2\nu^3$ condizioni (1) e (μ) , consideriamo infine il caso $\nu = 2$.

La definizione di classe A_i ($i=1, 2, 3$) μ -isolata in un bisistema B° di sostegno $B = \{a, b\}$ si deduce dal primo capoverso del n.º 8 leggendo μ invece di α .

XXI) *Ciascuna delle tre classi A_1, A_2, A_3 , considerate nel n.º 5, è μ -isolata in un bisistema s -distributivo ([2], n.º 10) di sostegno $B = \{a, b\}$.*

Infatti (n.º 5 e [2], n.º 10) tali bisistemi sono ad es. risp. (4, 8), (4, 3), (4, 5), (l' s -distributività è evidente: $x(y + z) = xz$, $(xy) + (xz) = xz$).

XXII) *Ciascuna delle quattro classi C_1, C_2, C_3, C_4 , considerate nel n.º 8 di [2], è s -isolata ([2], p. 18) in un bisistema μ -associativo di sostegno $B = \{a, b\}$.*

Infatti, si verifica facilmente (tenendo conto delle proposizioni del n.º 6 di [2]) che C_1 e C_2 sono rispettivamente s -isolate nel bisistema (3, 6) e nel bisistema (2, 6) (v. [2], n.º 10), i quali sono appunto μ -associativi (n.º 5, VII)). Quindi C_3 e C_4 sono appunto risp. s -isolate nei bisistemi μ -associativi (8, 11) e (12, 11), che sono le immagini isomorfe dei due precedenti mediante la corrispondenza $a \rightarrow b, b \rightarrow a$ ([2], p. 20).

Poniamo (n.º 6 e [2], n.º 8):

$$\Phi' = \Sigma \dot{+} \wedge',$$

cioè denotiamo con Φ' l'insieme delle (sedici) condizioni ((1) e (μ)) di s -distributività e di μ -associatività di $B = \{a, b\}$, (Σ è l'insieme delle otto condizioni di s -distributività, e \wedge' è l'insieme delle otto condizioni di μ -associatività di B).

Denotiamo inoltre con Φ'_0 uno qualunque dei sottinsiemi di Φ' ottenuti riunendo uno degli insiemi Σ_0 definiti in [2] (fine n.º 8) con uno degli insiemi \wedge'_0 definiti nel n.º 6:

$$\Phi'_0 = \Sigma_0 \dot{+} \wedge'_0,$$

(Σ_0 è costituito da quattro condizioni di s -distributività, \wedge'_0 è costituito da tre condizioni di μ -associatività).

TEOREMA 6: *Gli insiemi Φ'_0 (ognuno formato da 7 condizioni: quattro di s -distributività e tre di μ -associatività)*

definiti nel precedente capoverso sono gli unici sottinsiemi dell'insieme Φ' (di tutte le 16 condizioni di s -distributività e di μ -associatività di $B = \{a, b\}$) ad esso equivalenti e costituiti, ciascuno, da condizioni indipendenti.

Dimostrazione: Supponiamo che Φ'_2 sia un sottinsieme (necessariamente proprio e non vuoto) dell'insieme Φ' a questo equivalente e costituito da condizioni indipendenti. Allora Φ'_2 (cfr. n.° 8, 5° capov.) è necessariamente sottinsieme di uno degli insiemi Φ'_0 . Anzi Φ'_2 (essendo equivalente a Φ') deve coincidere (in virtù delle XXI e XXII) con uno di questi insiemi: $\Phi'_2 = \Phi'_0$. Viceversa, uno qualsiasi degli insiemi Φ'_0 è appunto indipendente (per le XXI e XXII) ed equivalente a Φ' (n.° 6 e [2], n.° 8, teor. 2).

Dai teoremi 4, 5 (n.° 9) e 6 si trae, in particolare, il seguente

COROLLARIO 2: *Le $2\nu^3$ condizioni ((1) e (μ)) di s -distributività e di μ -associatività di un insieme B , avente numero cardinale ν , sono indipendenti (n.° 1) se, e soltanto se, $\nu \geq 4$.*

Si noti che il comportamento (n.° 1, ult. capov.) dei due insiemi di condizioni (1), (α) ed (1), (μ) di un insieme B avente numero cardinale ν (≥ 2) è del tutto analogo (si confrontino i teoremi 1, 2 coi teoremi 4, 5) per ogni valore di $\nu > 2$. Tale comportamento è invece diverso (come mettono in evidenza i teoremi 3 e 6) quando $\nu = 2$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BOCCIONI, D.: *Indipendenza delle condizioni di associatività negli ipergruppidi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 27 (1957), pp. 228-244.
- [2] BOCCIONI, D.: *Indipendenza delle condizioni di distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 1-30.
- [3] BOCCIONI, D.: *Indipendenza delle condizioni di mutua distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 40-49.
- [4] SZÁSZ, G.: *Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen*, Acta Scientiarum Math., vol. 15 (1953), pp. 20-28.
- [5] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Moderne Algebra, I*, dritte Auf., Springer (1950).