RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

J. L. LIONS

**Sur la régularité et l'unicité des solutions turbulentes des équations de Navier Stokes**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 30 (1960), p. 16-23

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__16_0>

# SUR LA RÉGULARITÉ ET L'UNICITÉ DES SOLUTIONS TURBULENTES DES EQUATIONS DE NAVIER STOKES

*Nota* (*) *di* J. L. Lions (*a Nancy*)

Le but de cette note est de donner une nouvelle démonstration des Théorèmes 1 et 2 de l'article qui précède de M. Prodi [4], article dont M. Prodi avait eu l'amabilité de me communiquer le manuscrit. Notre méthode apporte quelques compléments aux résultats de M. Prodi et en outre redonne le théorème d'unicité des solutions turbulentes en dimension 2 obtenu dans [3].

Les notations seront les suivantes: $\Omega$ est un ouvert *quelconque* de $R^n$; toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles. On désigne par $L^2(\Omega)$ l'espace des vecteurs $f = \{f_1, \ldots, f_n\}$, où $f_i$ est de carré sommable sur $\Omega$, muni de la structure hilbertienne $(f, g) = \Sigma_i \int_\Omega f_i(x) g_i(x) dx$. On désigne par $H^1(\Omega)$ l'espace des vecteurs $u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ où $u_i$ et $\frac{\partial}{\partial x_j} u_i$ sont, pour tout $i$ et tout $j$, de carré sommable sur $\Omega$; on posera: $((u, v)) = \sum_{i,j} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} v_i dx$ et $[u, v] = (u, v) + ((u, v))$, puis $\| u \| = ((u, u))^{1/2}$, $[u] = [u, u]^{1/2}$. Muni de $[u, v]$, $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

*On désigne par* $V$ l'adhérence dans $H^1(\Omega)$ des vecteurs $\psi$ indéfiniment différentiables à support compact avec div. $\psi = 0$.

---

(*) Pervenuta in Redazione il 12 dicembre 1959.

Indirizzo dell'A: Institut Mathématique, 2 Rue de la Craffe, Nancy, M. M., Francia.

*On désigne par* $K$ l'adhérence dans $L^2(\Omega)$ de $V$. (Donc, avec les notations de [4], $V = \mathcal{N}^1(\Omega,\ K = \mathcal{N}(\Omega))$. Comme dans [4] on pose

$$b(u,\ v,\ w) = \Sigma \int_\Omega u_k(D_k v_i) w_i dx,\ D_k = \partial/\partial x_k,$$

ce qui définit une forme trilinéaire *continue* sur $V \times V \times V$ si la dimension $n \leq 4$. Ceci posé nous avons le

THÉORÈME 1. *Soit* $n \leq 4$, $\Omega$ *étant un ouvert quelconque. Soit* $u$ *une fonction vérifiant*:

(1) $$u \in L^2(0,\ T;\ V),\ u \in L^4(0,\ T;\ L^4(\Omega))$$ [1],

($T$ donné fini), *avec*

(2) $$\int^T \{ -(u(t),\ \Phi'(t)) + \mu((u(t),\ \Phi(t))) - b(u(t),\ \Phi(t),\ u(t)) \} dt = \\ = \int_0^T (f(t),\ \Phi(t))dt + (a,\ \Phi(0)), \qquad \mu > 0,$$

*pour toute fonction* $\Phi$ *continue à valeurs dans* $V$, *avec* $\Phi' \in L^2(0,\ T;\ H)$ [2], $\Phi(T) = 0$, $f$ *étant donné dans* $L^2(0,\ T;\ K)$, $a$ *donné dans* $K$. *Alors, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle,* $u$ *est continue de* $[0,\ T]$ *dans* $K$ *(fort), avec* $u(0) = a$.

DÉMONSTRATION.

1) Comme la forme linéaire $v \to b(u,\ v,\ u)$ est continue sur $V$, on a $b(u,\ v,\ u) = [g(u),\ v]$, ce qui définit $g(u) \in V$ avec $[g(u)] \leq c_1 \|u\|^2_{L^4}$. Donc $b(u(t),\ \Phi(t),\ u(t)) = [g(u(t)),\ \Phi(t)]$

---

1) Si $X$ est un espace de Banach, on désigne par $L^p(0,\ T;\ X)$ l'espace des (classes de) fonctions de puissance $p$ ème sommable sur $(0,\ T)$ à valeurs dans $X$. On désigne par $L^4(\Omega)$ l'espace des vecteurs dont les composantes sont de puissance 4 ème sommable sur $\Omega$.

2) $\Phi' = \frac{d}{dt}\Phi$ est prise au sens des distributions vectorielles. Cf. L. SCHWARTZ, Annales Inst. Fourier (I), t. VII (1957), p. 1-141; (II), t. VIII (1958), p. 1-209.

où $[g(u(t))] \leq c_1 \| u(t) \|_{L^4}^2$, d'où, d'après la deuxième hypothèse (1),

(3) $$g(u) \in L^2(0, T; V).$$

Prenons dans (2), $\Phi(t) = \varphi(t)v$, où $v$ est dans $V$ et où $\varphi$ est dans l'espace $\mathfrak{D}_T$ des fonctions indéfiniment différentiables dans $t \leq T$, à support compact dans $t < T$. Prolongeons toutes les fonctions, $u$, $f$, $g(u)$, ... par 0 pour $t < 0$. Il vient:

$$-\int_{-\infty}^{T} (u(t), v)\varphi'(t)dt + \mu \int_{-\infty}^{T} ((u(t), v))\varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{T} [g(u(t)), v]\varphi(t)dt +$$
$$+ \int_{-\infty}^{T} (f(t), v)\varphi(t)dt + (a, v)\varphi(0),$$

d'où

(4) $$\frac{d}{dt}(u(t), v) + \mu[u(t), v] = [f^*(t), v] + (a, v)\delta,$$

la dérivée $d/dt$ étant prise au sens des distributions sur l'ouvert $]-\infty, T[$, $\delta$ étant la masse de Dirac à l'origine, et d'après (3) et l'hypothèse faite sur $f$, $f^*$ vérifiant

(5) $$f^* \in L^2(-\infty, T; V), \text{ nulle pour } t < 0.$$

2) Le Théorème résulte maintenant de (4) et (5). Pour cela notons $D(\Lambda)$ l'espace des éléments $u$ de $V$ tels que la forme linéaire $v \to [u, v]$ soit continue sur $V$ pour la topologie de $K$; alors $[u, v] = (\Lambda u, v)$, $\Lambda u \in K$, ce qui définit dans $K$ un opérateur auto adjoint $> 0$; $V$ est le domaine de $\Lambda^{1/2}$, racine carrée positive de $\Lambda$. Comme $K$ est séparable, le théorème de décomposition spectrale de J. Von Neumann [3]) nous apprend qu'il existe une somme mesurable hilbertienne $\mathcal{K} = \int^{\oplus} \mathcal{K}(\lambda)d\nu(\lambda)$, $1 \leq \lambda < \infty$, $d\nu$ mesure positive, et une isométrie $\theta$ de $K$ sur $\mathcal{K}$, transformant $\Lambda$ en l'opérateur de multi-

[3]) Cfr. J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien*, Paris, Gauthier Villars, 1957.

plication par $\lambda$, et $V$ en l'espace des champs de vecteurs $g \in \mathcal{H}$, tels que $\lambda^{1/2} g \in \mathcal{H}$ ; on a:

$$[u, v] = \int_1^\infty \lambda(\theta u(\lambda), \theta v(\lambda))_{\mathcal{H}(\lambda)} d\nu(\lambda).$$

Si donc l'on pose:

$$w(t, \lambda) = (\theta u(t))(\lambda), \quad g^*(t, \lambda) = (\theta f^*(t))(\lambda), \quad \theta a = b,$$

(4) donne

$$\frac{d}{dt} w(t, \lambda) + \lambda\mu w(t, \lambda) = \lambda g^*(t, \lambda) + b(\lambda)\delta,$$

$w = 0$ pour $t < 0$, tout cela $\nu$-presque partout en $\lambda$. Donc

$$w(t, \lambda) = b(\lambda) \exp(-\lambda\mu t) + \lambda \int_0 \exp(-\lambda\mu(t-s)) g^*(s, \lambda) ds. \tag{6}$$

On pose:

$$\lambda^{1/2} g^*(t, \lambda) = g(t, \lambda),$$

$$w_1(t, \lambda) = \lambda^{1/2} \int_0^t \exp(-\lambda\mu(t-s)) g(s, \lambda) ds. \tag{7}$$

On désigne par $w(t)$, $g^*(t)$, ... la fonction $\lambda \to w(t, \lambda)$, $\lambda \to g^*(t, \lambda)$, ... . Comme $g^* \in L^2(0, T; \theta V)$, on a: $g \in L^2(0, T; \mathcal{H})$.

Des expressions (6) et (7) on déduit qu'il suffit de montrer que la fonction $t \to w_1(t)$ est continue de $[0, T]$ dans $K$ fort, avec $w_1(0) = 0$.

Pour cela, on note d'abord que $\| w_1(t) \|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{2\mu} \int_0^t \| g(s) \|^2_{\mathcal{H}} ds$, de sorte que $w_1(t) \to 0$ dans $\mathcal{H}$ lorsque $t \to 0$.

On vérifie ensuite ($h$ étant $> 0$ pour fixer les idées):

$$\| w_1(t+h) - w_1(t) \|^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\mu} \int_t^{t+h} \| g(s) \|_{\mathcal{H}} ds +$$

$$+ \frac{1}{\mu} \int_1^\infty (1 - \exp(-\mu\lambda h))^2 \left( \int_0^t \| g(s, \lambda) \|^2_{\mathcal{H}(\lambda)} ds \right) d\nu(\lambda),$$

et découpant la dernière intègrale en deux, on en déduit facilement que $w_1(t+h) \rightharpoonup w(t)$ dans $\mathcal{K}$ lorsque $h \to 0$. Ceci achève la démonstration du théorème.

Remarques diverses.

1) Le raisonnement précédent est valable sans changement si dans le deuxième membre de (2) on remplace $\int_0^T (f(t), \Phi(t))dt$ par $\int_0^T [\tilde{f}(t), \Phi(t)]dt$ où $\tilde{f} \in L^2(0, T; V)$.

2) Une fois établis (4) et (5) la méthode suivie est évidemment générale. La méthode donne donc *des résultats de même type pour toutes les équations considérées dans* [2], ainsi que pour les équations linéaires de type parabolique à coefficients *mesurables* (cf. un fascicule prochain des Ergebnisse, « Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites »).

3) La démonstration qui précède fournit également le renseignement suivant: *si $u_n$ est une suite de fonctions, vérifiant*

(8) $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^2(0, T; V)$ et dans $L^4(0, T; L^4)$,

(9) $\left\{\begin{array}{l}\text{pour chaque } n,\ u_n \text{ vérifie une équation (2), avec } f \text{ et } a \\ \text{remplacés par } f_n \text{ et } a_n,\ \text{où } f_n \rightharpoonup f \text{ dans } L^2(0; T; K), \\ a_n \rightharpoonup a \text{ dans } K.\end{array}\right.$

*Dans ces conditions, $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ dans $K$, uniformément pour $t \in [0, T]$* [4]).

Il suffit en effet de constater que l'équation (4) devient

$$\frac{d}{dt}(u_n(t), v) + \mu[u_n(t), v] = [f_n^*(t), v] + (a_n, v)\delta,$$

où $f_n^* \in L^2(0, T; V)$ et converge dans cet espace vers $f^*$; on termine alors sans difficulté.

---

[4]) Plus précisément: $u_n$ réprésentant continu de la classe de fonctions $u_n$ converge uniformément vers $u$ représentant continu de la classe de fonctions $u$.

4) Voici une autre conséquence facile de la méthode qui précède: *on suppose la dimension $n$ égale à 2; on considère* (2) *comme une équation d'inconnue $u$, $u$ étant assujetti à*

$$u \in L^2(0, T; V) \quad \text{et} \quad u \in L^\infty(0, T; K). \tag{10}$$

*Cette équation admet alors une solution unique* [5]).

Soient en effet $u_1$ et $u_2$ deux solutions de (2), vérifiant toutes deux (10) et soit $u = u_1 - u_2$. Alors

$$\int_0^T \{-(u, \Phi') + \mu((u, \Phi))\}\, dt = \int_0^T \{b(u, \Phi, u_1) + b(u_2, \Phi, u)\}\, dt.$$

Mais $b(u, v, w) = [g(u, w), v]$, où $[g(u, w)] \leq c_1 \| u \|_{L^4} \| w \|_{L^4}$, d'où

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \mu((u, v)) = [g(u, u_1) + g(u_2, u), v].$$

Introduisant $(\theta u(t))(\lambda) = w(t, \lambda)$, $\theta(g(u, u_1) + g(u_2, u))(\lambda) = h(t, \lambda)$, on a donc

$$\frac{d}{dt} w + \mu(\lambda - 1) w = \lambda h(t, \lambda). \tag{11}$$

On déduit de (11) que, $\nu$-presque partout en $\lambda$,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \| w(t, \lambda) \|^2_{\mathcal{K}(\lambda)} + (\lambda - 1)\mu \| w(t, \lambda) \|^2_{\mathcal{K}(\lambda)} = \lambda (h(t, \lambda), w(t, \lambda))_{\mathcal{K}(\lambda)},$$

et en intégrant en $t$ de 0 à $s$:

$$\| w(s, \lambda) \|^2_{\mathcal{K}(\lambda)} + 2\mu(\lambda - 1 \int_0^s \| w(t, \lambda) \|^2_{\mathcal{K}(\lambda)} dt =$$
$$= 2\lambda \int_0^s (h(t, \lambda), w(t, \lambda))_{\mathcal{K}(\lambda)} dt$$

---

[5]) Ce théorème est démontré par une méthode différente dans [3]. On ne s'occupe pas ici de l'existence.

et par intégration en $\lambda$ pour la mesure $d\nu(\lambda)$:

$$|u(s)|^2 + 2\mu \int_0^s \| u(t) \|^2 dt = \int_0^s b(u(t), u(t), u_1(t))dt$$

(en notant que $[g(u, u_1), u] = b(u, u, u_1)$ et que $[g(u_2, u), u] = = b(u_2, u, u) = 0$). Ceci est l'égalité fondamentale (6) de [3]; on en déduit l'unicité comme dans cette note.

On obtient aussi, en dimension 3, l'égalité fondamentale (6) de [5]. (Et en outre pour *tout* $s$).

On va maintenant démontrer le

THÉOREME 2. *On suppose la dimension* $n=2$. *Soit* $u_a$ *la solution de* (2), *avec* (10) (cf. Remarque 4)), $f$ *étant fixé. On suppose que* $u_a$ *est continue de* $[0, T]$ *dans* $K$. *Dans ces conditions, l'application* $a \rightarrow u_a(t)$, $t$ *fixé dans* $]0, T]$ *est continue de* $K$ *faible dans* $K$ *faible.* ($\Omega$ est quelconque).

DÉMONSTRATION.

Soit $a_n \rightarrow a$ dans $K$ faible. Posons: $u_{a_n} = u_n$, $u_a = u$. Puisque $a_n$ demeure en particulier dans un ensemble borné de $K$, on voit que $u_n$ demeure dans un ensemble borné de $L^2(0, T; V) \cap \cap L^\infty(0, T; K)$ donc aussi de $L^4(0, T; L^4(\Omega))$ [6]) et si $0 < \gamma < 1/4$, $\gamma$ fixé, les dérivées d'ordre $\gamma$ de $u_n$ demeurent dans un ensemble borné de $L^2(0, T; K)$ (cf. [1], [2]). On peut donc extraire de $u_n$ une suite $u_m$ telle que:

$$u_m \rightarrow w \text{ dans } L^2(0, T \;\; V),\ L^\infty(0, T; K),\ L^4(0, T; L^4(\Omega)),$$

$$D_t^\gamma u_m \rightarrow D_t^\gamma w \text{ dans } L^2(0, T; K), \quad ^7).$$

tous ces espaces étant munis des topologies faibles. Il en résulte que, sur tout compact de $\bar{\Omega} \times [0, T]$ les composantes de $u_m$ convergent fortement dans $L^2$ vers les composantes de $w$; comme dans (2) on peut supposer que $\Phi$ est continue à support compact,

---

[6]) On utilise ici O. A. LADYZENSKAYA, Doklady Akad, Nauk, t. 123 (1958), p. 427-429.

on peut passer à la limite dans (2), ce qui montre que $w$ vérifie (2) et (10), donc d'après l'unicité $w = u$ par conséquent: $u_n \rightharpoonup u$, $D^\gamma u_n \rightharpoonup D^\gamma u$ dans les espaces çi dessus faibles.

On peut maintenant extraire de $u_n$ une suite $u_p$ telle que $u_{p,i} u_{p,k} \rightharpoonup \psi_{ik}$ dans $L^2(\Omega \times (0, T))$ faible [8]. Comme $u_{p,i} u_{p,k} \rightarrow u_i u_k$ dans l'espace $L^1$ local, fort, on a: $\psi_{ik} = u_i u_k$, donc

$$u_{n,i} u_{n,k} \rightharpoonup u_i u_k \text{ dans } L^2(\Omega \times (0, T)) \textit{ faible.}$$

Reprenant alors la démonstration du Théorème 1, on obtient pour $u_n$ une équation analogue à (4), avec $f^*$ et $a$ remplacés par $f_n^*$ et $a_n$, avec $f_n^* \rightharpoonup f^*$ dans $L^2(0, T; V)$ faible (et naturellement $a_n \rightharpoonup a$ dans $K$ faible). On termine facilement par la méthode du Théorème 1.


BIBLIOGRAPHIE TRÈS SOMMAIRE

(on trouvera d'autres indications bibliographiques dans les articles cités)

[1] J. L. Lions, *Sur l'existence de solutions des équations de Navier Stokes*. C. R. Acad. Sc. aris, t. 248 (1959), p. 2847-2850.

[2] *Quelques résultats d'existence dans des équations aux dérivées partielles non linéaires*. Bull. Soc. Math., (1960).

[3] J. L. Lions et G. Prodi, *Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier Stokes en dimension 2*. C. R. Acad. Sc. Paris, t. 248 (1959), p. 3519-3521.

[4] G. Prodi, *Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale*. Rendiconti del Seminario Mat. di Padova, vol. XXX (1960), p. 1-16.

[5] G. Prodi, *Un teorema di unicità per le equazioni di Navier Stokes*. Annali di Mat. Pura ed applicata, vol. XLVIII (1959), p. 173-182.


[7]) $D^\gamma$ désigne la dérivée d'ordre $\gamma$ en $t$.

[8]) On désigne par $u_{p,i}$ les composantes de $u_p$.