Arno Predonzan

Una nuova caratterizzazione delle rigate cubiche ed alcuni problemi di classificazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 30 (1960), p. 161-177

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__161_0>

UNA NUOVA CARATTERIZZAZIONE DELLE RIGATE CUBICHE ED ALCUNI PROBLEMI DI CLASSIFICAZIONE

Memoria (*) *di* ARNO PREDONZAN (*a Padova*)

1. - Sia K un corpo commutativo, algebricamente chiuso e di caratteristica $p = 0$, e P_3 uno spazio proiettivo tridimensionale costruito su K.

Nello spazio P_3 si consideri una superficie algebrica del terzo ordine, F, definita sopra un qualunque sottocorpo k di K, di equazione:

$$f(X_0, X_1, X_2, X_3); \tag{1}$$

$f(X_0, X_1, X_2, X_3)$ è dunque un polinomio omogeneo del terzo grado (irriducibile in K) dell'anello $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$.

Supposto che F non sia un cono [e quindi non sia sviluppabile [1])], si indichi con H la *superficie hessiana* di F, cioè la superficie del quarto ordine (pure definita sopra k) di equazione:

$$h(X_0, X_1, X_2, X_3) = \begin{vmatrix} f''_{X_0X_0} & f''_{X_0X_1} & f''_{X_0X_2} & f''_{X_0X_3} \\ f''_{X_1X_0} & f''_{X_1X_1} & f''_{X_1X_2} & f''_{X_1X_3} \\ f''_{X_2X_0} & f''_{X_2X_1} & f''_{Y_2X_2} & f''_{X_2X_3} \\ f''_{X_3X_0} & f''_{X_3X_1} & f''_{X_3X_2} & f''_{X_3X_3} \end{vmatrix}, \tag{2}$$

dove le $f''_{X_iX_j}$ sono le derivate parziali seconde di $f(X_0, X_1, X_2, X_3)$ rispetto ad X_i, X_j, $(i, j = 0, 1, 2, 3)$.

Sia infine Γ la *curva parabolica* di F, intersezione di F con H. Tale curva Γ risulta dell'ordine $n = 12$ appena si

---

(*) Pervenuta in Redazione il 21 aprile 1960.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

[1]) Non esistono notoriamente sviluppabili proprie del terzo ordine.

computi n_j volte ogni sua componente Γ_j, irriducibile in K, nella quale la molteplicità d'intersezione $i(\Gamma_j;\ F\cdot H)$ di F con H sia proprio n_j.

Indicata con $(r'_x,\ r''_x)$ la coppia di *rette asintotiche* uscenti da un punto (semplice) x di F [2]), (cioè l'intersezione del piano polare Π_x con la quadrica polare Q_x di x rispetto ad F), e detto W il sistema algebrico (definito su k) che tale coppia descrive al variare di x su F, si è convenuto di dire che la superficie F è *ad asintotiche separabili* se W può ottenersi come corrispondenza algebrica tra due distinti sistemi algebrici W_1, W_2, (definiti su k o su un estensione algerica k_1 di k), irriducibili in K, in guisa che siano omologhe, in tale corrispondenza, due rette, l'una r'_x di W_1 e l'altra r''_x di W_2, costituenti una medesima coppia, $(r'_x,\ r''_x)$ di W [3]). Questa condizione è certo soddisfatta se F è rigata. Se poi F è un cono, { ed allora $h(X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3)$ è lo zero dell'anello $k[X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3]$ }, si ha $W_1 = W_2$.

In questo lavoro ci proponiamo di dimostrare che:

I. - *La curva parabolica Γ di una superficie cubica non rigata F è doppia* [4]) *se, e solo se, F appartiene ad uno dei seguenti quattro tipi, proiettivamente distinti*:

1) *superficie cubica con quattro punti doppi conici*;

2) *superficie cubica con due punti doppi conici e un punto doppio biplanare tale che l'intersezione, l, dei due piani tangenti in esso alla superficie appartenga alla superficie stessa*;

---

[2]) Questa coppia, generalmente irriducibile in k, si spezza invece in due rette r_x', r_x'', o in $k(x)$ o in un'estensione quadratica di $k(x)$; le rette stesse vengono poi a coincidere se, e solo se, $x \in \Gamma$.

[3]) Ved. A. PREDONZAN, *Alcune questioni di separabilità*, questi Rendiconti, questo vol.

[4]) Quando si afferma che la curva parabolica Γ è doppia, qui s'intende dire che è pari la molteplicità d'intersezione di F con H in ogni componente Γ_j, irriducibile in K, di Γ; cioè che:

$$i(\Gamma_j;\ F\cdot H) = 2m_j, \qquad (m_j \geq 1).$$

3) *superficie cubica con un punto doppio conico e un punto doppio biplanare del tipo* 2), *ma con l'ulteriore condizione che la retta l sia osculante la superficie, cioè sia tale che valga tre la molteplicità d'intersezione in l, $i(l;\, F\cdot \Pi_l)$, di F con il piano Π_l tangente ad F lungo l,* [ved. n. 3] [5]).

4) *superficie cubica con tre punti doppi biplanari.*

II. - *L'unica superficie cubica non rigata F ad asintotiche separabili è quella con tre punti doppi biplanari.*

Il I teorema viene a classificare proiettivamente le superficie cubiche a curva parabolica doppia.

Il II teorema invece, oltre a fornire una classificazione completa delle superficie cubiche ad asintotiche separabili, ci dà *una nuova caratterizzazione delle rigate cubiche,* in quanto ci permette di affermare che:

Una superficie cubica, che non sia quella con tre punti doppi biplanari, è rigata se, e soltanto se, risulta ad asintotiche separabili.

2. - Se $x = (x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3)$ è un *punto generico* [6]) su k della superficie F di cui al n. 1, è noto che [7]):

A) *Condizione necessaria e sufficiente perchè F sia ad asintotiche separabili è che esista un elemento $l(x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3)$ dell'anello $K[x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3]$ per cui si abbia:*

$$h(x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3) = l(x_0\,, x_1\,, x_2\,, x_3)^2,$$

essendo $h(X_0\,, X_1\,, X_2\,, X_3)$ l'equazione (2) *della superficie hessiana H di F.*

---

[5]) I casi 2), 3) possono considerarsi come *specializzazioni* di quello 1): il punto doppio biplanare può infatti riguardarsi, rispettivamente in 2) e 3), come riunione di due o di tre punti doppi conici.

[6]) Appartenente ad un sopracorpo di k, di grado di trascendenza (almeno) due su k.

[7]) Ved. A. PREDONZAN, loc. cit. in nota [3]).

Se la F ha un punto doppio, e quindi in uno spazio affine A_3 può assumere una equazione del tipo:

$$Z\psi(X, Y) - \varphi(X, Y),$$

con $\varphi(X, Y)$ e $\psi(X, Y)$ polinomi non nulli dell'anello $k[X, Y]$, dei gradi rispettivi $n_1 \leq 3$ ed $n_2 \leq 2$ (non potendo mai valere contemporaneamente le limitazioni superiori), un *punto generico* (*affine*) $u = (x, y, z)$ di F ha le coordinate:

$$\begin{cases} x = X, \\ y = Y, \\ z = \dfrac{\varphi(X, Y)}{\psi(X, Y)}. \end{cases}$$

Posto allora $\Phi(X, Y) = \dfrac{\varphi(X, Y)}{\psi(X, Y)}$, ad indicate con Φ''_{XX}, Φ''_{XY}, Φ''_{YY}, le tre derivate seconde di $\Phi(X, Y)$ rispetto ad X, X; X, Y; Y, Y, il teorema A) può semplificarsi nel:

A′) *Condizione necessaria e sufficiente perchè F sia ad asintotiche separabili è che esista un elemento non nullo $L(X, Y)$ del corpo $K(X, Y)$ delle funzioni razionali, costruito sull'anello $K[X, Y]$ di polinomi, per cui si abbia*:

$$\Phi''^2_{XY} - \Phi''_{XX}\Phi''_{YY} = L(X, Y)^2.$$

Ricordiamo anche che un'altra condizione per la razionale separabilità delle asintotiche di F, avente una veste geometrica più suggestiva, è la seguente:

B) *Condizione necessaria e sufficiente perchè F sia ad asintotiche separabili è che*:

a) *la curva parabolica Γ di F sia doppia* [8]);

b) *la curva $\frac{1}{2}\Gamma$ sia linearmente equivalente a quelle*

---

[8]) Ved. nota [4]).

segate su F dal sistema lineare ottenuto come bisezione del sistema generato da H [9]).

3. - Una retta r di una superficie cubica (non rigata) F per la quale passi un piano Π che sia tangente ad F in ogni punto di r, verrà detta *retta stazionaria* di F, ed il piano Π *piano tangente stazionario*. Quest'ultimo sega F in una cubica C che contiene la retta r per la quale si ha: $2 \leq i(r; F \cdot \Pi) \leq 3$. Se poi, in particolare, $i(r; F \cdot \Pi) = 3$, la retta r stessa ed il piano Π verranno detti *osculanti* F.

Le coniche sezioni di F, fuori di r, con i piani del fascio di sostegno r, tagliano ovviamente r in due punti fissi x', x'', che sono doppi per F. In particolare se tali coniche sono tangenti ad r in uno stesso punto x, questo punto, doppio per F, potrà riguardarsi come la riunione su r dei due punti doppi x', x'' prima considerati. Nel seguito chiameremo i due punti doppi x', x'', $(x' \neq x'')$, *punti doppi di* 1ª *specie*; diremo invece *punto doppio di* 2ª *specie* ogni punto x del secondo tipo. Si conclude dunque che ogni retta stazionaria di F contiene o due punti doppi di 1ª specie, o un punto doppio di 2ª specie.

Viceversa, ogni retta r che congiunge due punti doppi (distinti) x', x'' di F, è per F retta stazionaria ed i due punti doppi x', x'' sono di 1ª specie. Invece se x è punto di 2ª specie, esiste una retta r per esso che è stazionaria per F.

Su una superficie cubica F, non rigata, non vi possono essere notoriamente più di quattro punti doppi, ove ogni punto di 2ª specie venga computato come due punti doppi. Se poi F ha quattro punti doppi (distinti) questi debbono essere necessariamente conici [10]).

---

9) Se si ha [(ved. nota 4)]:

$$i(\Gamma_j;\ F \cdot H) = 2m_j, \qquad (m_j \geq 1),$$

la curva $\frac{1}{2}\Gamma$ è definita da:

$$\frac{1}{2}\Gamma = \Sigma_j\, m_j \Gamma_j,$$

essendo la sommatoria estesa a tutte le componenti Γ_j di Γ, irriducibili in K e t r a l o r o d i s t i n t e.

10) Ciò deriva dalla classificazione completa delle superficie cubiche fatta da CAYLEY; ved., ad es., E. PASCAL, *Repertorio di matematiche superiori*, v. II, Hoepli-Milano (1900).

Inoltre se su una retta r di F vi sono più di due punti doppi (computandosi come due punti doppi ogni punto doppio di 2ª specie che abbia r come retta stazionaria) la retta r è doppia per F e quindi F è rigata.

4. - Per dimostrare il teorema I del n. 1, cominciamo col provare che:

Se la curva parabolica Γ *di una superficie cubica non rigata* F *è doppia, le sue componenti sono tutte rettilinee.*

È infatti noto che se un punto semplice x di una superficie algebrica F è doppio per la curva parabolica Γ di F, la curva C_x, sezione di F col piano tangente Π_x ad F in x, ha in x un tacnodo, oppure un punto triplo [11]).

Applicando questa proprietà ad una superficie cubica F si ha che, nel caso tacnodale, la retta r_x, tangente tacnodale a C_x in x, dovendo avere con C_x in x una molteplicità d'intersezione almeno quattro, appartiene a C_x, per cui C_x si spezza [nel corpo K] nella retta r_x ed in una conica D_x tangente ad r_x in x. Se invece il punto x è triplo, la C_x si spezza [sempre in K] in tre rette. Ciò comporta — nell'ipotesi che per ogni componente irriducibile Γ_j di Γ si abbia $i(\Gamma_j;\, F\cdot H)=2$ — che da ogni punto di Γ_j esca (almeno) una retta situata su F, il che può avvenire — non essendo F rigata — se, e solo se, Γ_j è pur essa una retta. Tale conclusione sussiste a maggior ragione se $i(\Gamma_j;\, F\cdot H)=2m_j$, con $m_j>1$; c.v.d.

---

[11]) Ved. C. SEGRE, *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche, e sulla linea parabolica di una superficie*, Rend. Acc. dei Lincei, s. V, v. VI, f. 5° (1897). I risultati di questo lavoro, di cui quello enunciato nel testo ne è solo una parte, sono stati ottenuti nel corpo complesso. Il ragionamento condotto per dimostrare la parte sopra citata si può però integralmente trasportare ad un corpo commutativo K qualunque, di caratteristica $p=0$. Vogliamo anche ricordare che la condizione necessaria di cui sopra, perchè un punto semplice x di F sia doppio per Γ, diviene anche sufficiente appena nella sua enunciazione si aggiunga che il tacnodo debba essere simmetrico: questa nozione comporterebbe però l'estensione al corpo K del concetto di curvatura, il che, per i nostri scopi, non è indispensabile.

Da quanto precede discende dunque che se Γ è doppia [nel senso indicato nella nota [4])], essa è costituita da un numero $\nu \leq 6$ di rette r_j, ciascuna con molteplicità pari $2m_j$ per Γ, e tali molteplicità debbono verificare la condizione:

$$\sum_{j=1}^{\nu} 2m_j = 12, \qquad (1 \leq \nu \leq 6). \tag{3}$$

Si ha poi che:

Se Γ è doppia, tutte le sue componenti r_j sono rette stazionarie per F (e quindi — n. 3 — su ciascuna di esse vi sono o due punti doppi di 1ª specie, o uno di 2ª specie).

Ciò deriva dalle considerazioni del quarto capoverso di questo n. e dal fatto che una superficie cubica non può possedere una retta r non stazionaria, tale che il piano tangente Π_x ad F in ogni punto x di r, semplice per F, seghi F, fuori di r, in una conica D_x tangente ad r in x. [12]).

---

[12]) Infatti l'equazione di una superficie F su cui giace la retta r che congiunge i due punti (1, 0, 0, 0) e (0, 1, 0, 0) può scriversi nella forma:

$$a_{00}^{(1)}X_0^2 + 2a_{01}^{(1)}X_0X_1 + a_{11}^{(1)}X_1^2 + 2a_{02}^{(2)}X_0 + 2a_{12}^{(2)}X_1 + a_{22}^{(3)},$$

stando le $a_{ij}^{(q)}$ ad indicare polinomi omogenei dell'anello $k[X_2, X_3]$, i cui gradi hanno i valori degli indici in alto.

La condizione perchè i piani per r seghino F, fuori di r, in coniche tangenti ad r, si esprime con:

$$a_{01}^{(1)2} - a_{00}^{(1)}a_{11}^{(1)} = 0,$$

e da questa si ricava:

$$a_{00}^{(1)} = \rho^2 a_{11}^{(1)}, \qquad a_{01}^{(1)} = \rho a_{11}^{(1)},$$

essendo ρ un elemento non nullo di k.

L'equazione del piano tangente ad F nel punto $(x_0, x_1, 0, 0)$ di r assume la forma:

$$x_0^2 a_{00}^{(1)} + 2x_0x_1a_{01}^{(1)} + x_1^2 a_{11}^{(1)},$$

o meglio, a norma delle precedenti relazioni:

$$(\rho x_0 + x_1)^2 a_{11}^{(1)},$$

donde segue che r è retta stazionaria.

Viceversa:

Se r è retta stazionaria per F, essa è componente almeno doppia di Γ.

Per giungere a questa conclusione basta osservare che in un riferimento affine, ($X = X_1X_0^{-1}$, $Y = X_2X_0^{-1}$, $Z = X_3X_0^{-1}$)[13]), in cui si assuma come retta stazionaria r l'asse delle Z di cui si supponga doppio il relativo punto improprio, e come piano tangente stazionario quello YZ, l'equazione di F si scrive nella forma:

$$X[Z \cdot \varphi_1(X, Y) + \varphi_2(X, Y)] + Y^2 \cdot \psi_1(Y, Z), \tag{4}$$

essendo $\varphi_1(X, Y)$ e $\varphi_2(X, Y)$ due polinomi, rispettivamente del primo e del secondo grado, dell'anello $k[X, Y]$, mentre $\psi_1(Y, Z)$ è un polinomio del primo grado dell'anello $k[Y. Z]$.

L'equazione della superficie hessiana H di F di conseguenza diviene del tipo:

$$X \cdot \Phi_3(X, Y, Z) + Y^2 \cdot \Phi_2(X, Y, Z). \tag{5}$$

con $\Phi_3(X, Y, Z)$ e $\Phi_2(X, Y, Z)$ polinomi del terzo e secondo grado dell'anello $k[X, Y, Z]$.

Dal confronto delle (4), (5) segue subito quanto sopra asserito.

5. - Per concludere come enunciato nel I teorema del n. 1 è opportuno mettere in evidenza anche le seguenti tre proprietà relative ad una superficie cubica F, non rigata:

a) Un punto doppio di 2ª specie è biplanare o uniplanare.

---

13) In tale riferimento affine chiameremo, come di consueto, assi delle X, delle Y, delle Z, quegli spigoli del simplesso fondamentale delle coordinate di P_3 che congiungono il punto (1, 0, 0, 0) — detto punto origine — rispettivamente con i punti (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1). Questi ultimi tre punti verranno poi detti « punti impropri » dei relativi assi, ed il piano che li congiunge « piano improprio ». Si chiameranno invece piani YZ, ZX, XY, quelli che congiungono rispettivamente gli assi Y e Z, gli assi Z e X, e gli assi X e Y, e si diranno « rette improprie » dei piani stessi le loro intersezioni con il piano improprio.

b) Un punto che sia doppio di 2ª specie per due distinte rette stazionarie uscenti da esso, è uniplanare.

c) Su una retta non vi possono essere due punti doppi di 2ª specie distinti.

Per la verifica della proprietà a) basta osservare che se alla superficie F si impone la condizione che per essa sia doppio di 2ª specie il punto improprio dell'asse delle Z, con relativa retta stazionaria l'asse delle Z stesso, l'equazione di F, in un riferimento affine, si scrive:

$$Z \cdot \alpha_2(X,\ Y) + \beta_3(X,\ Y) + \beta_2(X,\ Y) + \beta_1(X,\ Y), \tag{6}$$

con $\alpha_2(X,\ Y)$ e $\beta_i(X,\ Y)$, polinomi omogenei dell'anello $k[X,\ Y]$, i cui gradi rispettivi hanno i valori degli indici in basso.

Per quanto riguarda la proprietà b) si osservi che, imponendo alla superficie F di equazione (6) l'ulteriore condizione che sia stazionaria per essa anche la retta impropria del piano ZX, con relativo punto doppio di 2ª specie ancora il punto improprio dell'asse Z, l'equazione della superficie F può scriversi:

$$ZY^2 + Y \cdot \gamma_2(X,\ Y) + \beta_2(X,\ Y) + \beta_1(X,\ Y), \tag{7}$$

con $\gamma_2(X,\ Y)$ polinomio omogeneo del secondo grado.

Infine la validità della c) consegue dal fatto che se la superficie F di equazione (6) ha doppio di 2ª specie anche il punto improprio dell'asse X, con relativa retta stazionaria quella impropria del piano XY, la sua equazione diviene:

$$Y^2Z + aY^2 + bX + cY, \tag{8}$$

dalla quale appare chiaramente che F è rigata, (a, b, c sono elementi del corpo k)[14]).

[14]) Ad analoga conclusione si giunge se i due punti impropri degli assi X e Z, doppi di 2ª specie per F, hanno le relative rette stazionarie coincidenti con quella impropria del piano ZX; e così anche se questa retta impropria è stazionaria solo per il punto improprio dell'asse X ma non per quello improprio dell'asse Z, potendosi assumere come retta stazionaria di quest'ultimo ad es. l'asse delle Z stesso.

Sia dunque F una superficie cubica, non rigata, la cui curva parabolica Γ sia doppia e quindi si spezzi (n. 4) in ν componenti rettilinee r_j, le cui relative molteplicità per Γ debbono verificare la (3).

Da quanto stabilito nei nn. 3, 4 e dalle tre proposizioni iniziali di questo n. 5 si possono allora trarre, in relazione ai sei possibili valori di ν, le seguenti conclusioni:

1°: $\nu = 6$. - Due (almeno) delle sei componenti r_j di Γ, $(j = 1, 2, \dots, 6)$, sono tra loro sghembe. Se infatti le r_j fossero a due a due incidenti, o esse apparterrebbero ad uno stesso piano, il che è assurdo; oppure passerebbero per uno stesso punto x, il quale dovrebbe risultare doppio di 2ª specie per almeno cinque di esse: questo perchè se, ad es., su r_1 ed r_2 vi fossero rispettivamente i due punti doppi x_1 ed x_2, distinti da x, la retta $x_1 \cup x_2$ apparterrebbe a Γ, che pertanto avrebbe più di sei componenti rettilinee. Ma se x fosse doppio di 2ª specie per (almeno) due componenti di Γ, esso sarebbe, per la proprietà b), uniplanare, il che è assurdo perchè da x escono tutte le componenti di Γ, che sono sei rette di F certo non complanari.

Siano dunque r_1 ed r_2 due componenti sghembe di Γ. Il caso che su r_1 ed r_2 giacciano rispettivamente due punti x_1 ed x_2, entrambi doppi di 2ª specie per F, non può verificarsi perchè allora sulla retta $x_1 \cup x_2$ vi sarebbero due punti doppi di 2ª specie, in contrasto con la proprietà c).

Analogamente non può verificarsi il caso che su r_1 vi siano due punti doppi x_1', x_1'' di 1ª specie, e su r_2 un punto doppio x_2 di 2ª specie. Infatti allora le due rette $r_3 = x_1' \cup x_2$, $r_4 = x_1'' \cup x_2$ sarebbero due componenti di Γ, ed i punti doppi delle due ulteriori componenti r_5, r_6 dovrebbero (ved. penultimo capoverso del n. 3) coincidere con x_2 ed essere di 2ª specie per entrambe. Ciò comporterebbe, per la proprietà b), che x_2 fosse punto doppio uniplanare per F, il che è assurdo perchè da x_2 escono le cinque rette r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 di F, non certo complanari.

Resta il caso che su ciascuna delle due rette r_1, r_2, vi siano due punti doppi di 1ª specie: x_1', x_1'' su r_1 ed x_2', x_2'' su r_2. Le sei componenti di Γ sono allora i sei spigoli del tetraedro di vertici x_1', x_1'', x_2', x_2'', per cui F è la superficie cubica con quattro punti doppi conici ed è quindi del tipo 1) del teorema I del n. 1.

Ove si assumano tali punti doppi come vertici del simplesso fondamentale delle coordinate, l'equazione di F si scrive:

$$a_0X_1X_2X_3 + a_1X_2X_3X_0 + a_2X_3X_0X_1 + a_3X_0X_1X_2,$$

con a_i, $(i = 0, 1, 2, 3)$, elementi non nulli del corpo k.

Quest'ultima equazione, con la trasformazione di coordinate definita su k:

$$X_i = a_i\overline{X}_i \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

assume la forma canonica:

$$1) \qquad X_1X_2X_3 + X_2X_3X_0 + X_3X_0X_1 + X_0X_1X_2,$$

dove le indeterminate sono state indicate ancora con X_0, X_1, X_2, X_3.

In corrispondenza alla 1), l'equazione della superficie hessiana H di F si scrive:

$$1') \quad X_0^2(X_1X_2 + X_2X_3 + X_3X_1) + X_1^2(X_2X_3 + X_3X_0 + X_0X_2) + \\ + X_2^2(X_3X_0 + X_0X_1 + X_1X_3) + X_3^2(X_0X_1 + X_1X_2 + X_2X_0).$$

La curva parabolica Γ di F è rappresentata dal sistema 1), 1'), od anche dal sistema ad esso equivalente:

$$1'') \qquad \begin{cases} X_1X_2X_3 + X_2X_3X_0 + X_3X_0X_1 + X_0X_1X_2, \\ X_0X_1X_2X_3, \end{cases}$$

intendendosi per «equivalenti» due sistemi le cui equazioni sono basi di un medesimo ideale dell'anello $k[X_0, X_1, X_2, X_3]$.

Le 1'') ci dicono chiaramente che Γ è doppia e che le sue sei componenti r_j hanno ciascuna molteplicità due per Γ.

2°: $\nu = 5$. - Questo caso non può ovviamente verificarsi. Ripetendo infatti il ragionamento del caso 1°, si vedrebbe che Γ dovrebbe possedere due componenti sghembe r_1, r_2, su ciascuna delle quali vi sarebbero due punti doppi di 1ª specie per F. Ne verrebbe che sarebbero sei le componenti rettilinee di Γ, e precisamente i sei spigoli del tetraedro di vertici i quattro punti doppi in questione, contro l'ipotesi iniziale $\nu = 5$.

3°: $\nu = 4$. - Anche qui, con ragionamento analogo a quello della prima parte del caso 1°, si viene a concludere che Γ possiede due componenti sghembe r_1, r_2. Su ciascuna di esse non vi possono essere due punti doppi di 1ª specie, perchè allora F avrebbe quattro punti doppi il che comporterebbe $\nu = 6$; inoltre, per la proposizione c), su ciascuna delle r_1, r_2, non può esservi un punto doppio di 2ª specie.

Si conclude che su r_1 vi sono due punti doppi di 1ª specie x_1', x_1'', e su r_2 un punto doppio di 2ª specie x_2. Le altre due componenti di Γ sono le rette $r_3 = x_1' \cup x_2$, ed $r_4 = x_1'' \cup x_2$.

Assumendo $x_1' = (0, 1, 0, 0)$, $x_1'' = (0, 0, 1, 0)$, $x_2 = (0, 0, 0, 1)$, e come retta r_2 quella congiungente x_2 con il punto $(1, 0, 0, 0)$, l'equazione di F si scrive:

$$X_1X_2X_3 + X_0^2(a_1X_1 + a_2X_2) + bX_0X_1X_2$$

con a_1, a_2, b, elementi del corpo k, i primi due dei quali non nulli: la F è dunque del tipo 2) del I teorema del n. 1.

Mediante la trasformazione di coordinate, definita su k:

$$\begin{cases} X_0 = \overline{X}_0, \\ X_1 = a_1^{-1}\overline{X}_1, \\ X_2 = a_2^{-1}\overline{X}_2, \\ X_3 = a_1a_2\overline{X}_3 - b\overline{X}_0, \end{cases}$$

ed indicando ancora le indeterminate con X_0, X_1, X_2, X_3, l'ultima equazione assume la forma canonica:

$$2) \qquad X_1X_2X_3 + X_0^2(X_1 + X_2),$$

e quella della relativa superficie hessiana:

$$2') \qquad 2X_0^2X_1X_2 - X_1^2X_2X_3 - X_1X_2^2X_3 - X_0^2X_1^2 - X_0^2X_2^2.$$

La curva parabolica Γ di F si può rappresentare col seguente sistema, equivalente a quello 2), 2'):

$$2'') \qquad \begin{cases} X_1X_2X_3 + X_0^2(X_1 + X_2), \\ X_0^2X_1X_2, \end{cases}$$

donde appare che Γ è doppia e le sue quattro componenti rettilinee r_1, r_2, r_3, r_4 hanno molteplicità rispettive 2, 2, 4, 4.

4°: $\nu = 3$. - Due qualunque delle tre componenti di Γ, ad es. r_1, r_2, non possono essere sghembe tra loro. Se infatti così fosse, su ciascuna di esse potrebbe giacere un solo punto doppio, il quale dovrebbe perciò essere di 2ª specie, in contrasto con la proprietà c).

Ne viene che r_1, r_2, r_3, sono a due a due incidenti e quindi, o passano per uno stesso punto x, o sono complanari.

Nel primo caso il punto x dovrebbe essere di 2ª specie per almeno due di esse (altrimenti vi sarebbero due punti doppi fuori di x, e quindi si avrebbe una quarta componente di Γ). Tale x risulterebbe allora, per la proprietà b), uniplanare per cui r_1, r_2, r_3 sarebbero complanari, ed x sarebbe doppio di 2ª specie per ciascuna di queste tre rette (non potendo una superficie cubica non rigata, con un punto doppio uniplanare, possedere altri punti doppi). Se la curva Γ fosse doppia per F, e quindi se ciascuna delle sue tre componenti avesse molteplicità quattro per Γ [15]), la curva $\frac{1}{2}\Gamma$ sarebbe segata su F dalla quadrica Q costituita dal piano delle r_1, r_2, r_3, contato due volte, per il che, [ved. teorema B) del n. 2], F sarebbe ad asintotiche separabili, mentre invece è noto che una superficie cubica monoidale, a punto doppio uniplanare, non è ad asintotiche separabili [16]).

---

15) Che ciascuna delle tre componenti r_1, r_2, r_3, abbia molteplicità quattro per Γ, discende dal fatto che l'equazione di una tale F, quando si assuma $x = (1, 0, 0, 0)$ ed r_1, r_2, r_3 di equazioni rispettive:

$$\begin{cases} X_2 + X_3, \\ X_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} X_3 + X_2, \\ X_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} X_1 + X_2, \\ X_3, \end{cases}$$

può scriversi nella forma:

$$X_1X_2X_3 + (X_1 + X_2 + X_3)^2,$$

donde appare chiaramente il comportamento simmetrico rispetto alle componenti stesse.

16) Ved. A. PREDONZAN, loc. cit. in nota 3).

Non potendo dunque r_1, r_2, r_3 passare per uno stesso punto, esse debbono incidersi a due a due in tre punti distinti, e questi punti, a norma delle proposizioni b), c), e del fatto che una superficie cubica non rigata con un punto doppio uniplanare non può avere altri punti doppi, debbono essere doppi di 1ª specie per F. Essi poi debbono essere tutti biplanari in quanto — come è facile verificare direttamente — una componente r_j di Γ, sulla quale giacciano due punti doppi di 1ª specie non entrambi biplanari, ha per Γ molteplicità inferiore a quattro. La superficie F in questione è dunque del tipo 4) del I teorema del n. 1, e la sua equazione, appena si assumano come punti doppi quelli (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), può scriversi nella forma:

$$X_1X_2X_3 + X_0(a_1X_2X_3 + a_2X_3X_1 + a_3X_1X_2) +$$
$$+ X_0^2(a_2a_3X_1 + a_3a_1X_2 + a_1a_2X_3) + bX_0^3,$$

con a_1, a_2, a_3, b, elementi del corpo k, soddisfacenti alla condizione $b - a_1a_2a_3 \neq 0$.

Mediante la trasformazione di coordinate, definita sopra k:

$$\begin{cases} X_0 = \overline{X}_0, \\ X_1 = \overline{X}_1 - a_1\overline{X}_0, \\ X_2 = \overline{X}_2 - a_2\overline{X}_0, \\ X_3 = (b - a_1a_2a_3)\overline{X}_3 - a_3\overline{X}_0, \end{cases}$$

la precedente equazione di F può scriversi (indicando ancora con X_0, X_1, X_2, X_3 le indeterminate) nella forma canonica:

4) $$X_1X_2X_3 + X_0^3,$$

e quindi l'equazione della hessiana H di F diviene:

4') $$X_0X_1X_2X_3.$$

La curva parabolica Γ di F può essere rappresentata dal sistema, equivalente a quello 4), 4'):

4'') $$\begin{cases} X_1X_2X_3 + X_0^3, \\ X_0^4, \end{cases}$$

dal quale discende che Γ è doppia, e le sue tre componenti (rettilinee) r_1, r_2, r_3 hanno ciascuna molteplicità quattro per essa.

5°: $\nu = 2$. - Poichè su ciascuna delle due componenti r_1, r_2 di Γ debbono giacere o due punti doppi di 1ª specie, od uno di 2ª specie, e poichè la congiungente due punti doppi appartiene a Γ, le componenti stesse non possono essere sghembe tra loro: r_1, r_2 si incontrano quindi in un punto x, che deve essere doppio di 2ª specie almeno per una di esse.

Se x fosse doppio di 2ª specie per entrambe, esso risulterebbe, a norma della proprietà b), uniplanare, il che — come si vede facilmente con analogo ragionamento a quello del caso 4° — non può verificarsi.

Dunque x è doppio di 1ª specie per r_1, e di 2ª specie per r_2; su r_1 vi è perciò un altro punto x_1, doppio di 1ª specie.

Ove si riferisca F ad un sistema di coordinate per cui sia $x = (0, 0, 0, 1)$, $x_1 = (0, 1, 0, 0)$, la retta stazionaria r_2 la congiungente x con il punto $(1, 0, 0, 0)$ ed il relativo piano tangente stazionato quello congiungente r_2 con il punto $(0, 0, 1, 0)$, l'equazione di F può scriversi:

$$X_2X_3(a_1X_1 + a_2X_2) + b_3X_2^3 + b_2X_1X_2^2 + b_1X_0X_1X_2 + \\ + b_0X_0^2X_1 + c_1X_0X_2^2,$$

con a_i, b_j, c_1, elementi del corpo k tali però che risulti $a_1 \neq 0$, $b_0 \neq 0$,[17]). Si può inoltre supporre, senza restrizione, che sia: $d = a_1b_3 - a_2b_2 \neq 0$, in quanto tale condizione implica che la conica sezione di F, fuori della retta $l = x_1 \cup (0, 0, 1, 0)$, con il piano $l \cup x$, sia (assolutamente) irriducibile.

Mediante la trasformazione di coordinate, definita su k:

$$\begin{cases} X_0 = \bar{X}_0, \\ X_1 = a_1^2b_0^{-1}d^{-2}\bar{X}_1, \\ X_2 = a_1d^{-1}\bar{X}_2, \\ X_3 = -b_1a_1^{-1}\bar{X}_0 - b_2d^{-1}\bar{X}_2 + b_0a_1^{-2}d\bar{X}_3, \end{cases}$$

[17]) Se fosse $a_1 = 0$, la F sarebbe rigata; se fosse invece $b_0 = 0$, la F sarebbe riducibile.

la precedente equazione di F diviene (indicando sempre le indeterminate con X_0, X_1, X_2, X_3):

$$X_2X_3(X_1 + aX_2) + X_2^3 + cX_0X_2^2 + X_0^2X_1,$$

dove si è posto:

$$a = a_1^{-2}a_2b_0d, \qquad c = a_1^{-1}d.$$

Appena si ricavi l'equazione della superficie hessiana H di F [18]), e si faccia sistema della stessa con la precedente equazione, si vede immediatamente che, perchè la somma delle molteplicità delle due componenti r_1, r_2 di Γ valga 12, deve essere $a = c = 0$, dal che discende che la superficie F è del tipo 3) del I teorema del n. 1. La sua equazione canonica si scrive:

$$3) \qquad X_1X_2X_3 + X_0^2X_1 + X_2^3,$$

e quindi quella della relativa superficie hessiana assume la forma:

$$3') \qquad X_1(3X_2^3 - X_1X_2X_3 - X_0^2X_1).$$

La curva parabolica Γ di F può rappresentarsi con il sistema:

$$3'') \qquad \begin{cases} X_1X_2X_3 + X_0^2X_1 + X_2^3, \\ X_1X_2^3, \end{cases}$$

dal quale consegue che le due componenti rettilinee r_1, r_2 hanno entrambi molteplicità sei.

6°: $\nu = 1$. - Questo caso non può verificarsi perchè una superficie cubica F, la cui linea parabolica sia costituita da una sola retta r_1 per cui si abbia $i(r_1;\ F \cdot H) = 12$, è necessariamente la rigata cubica di CAYLEY.

Resta così provato il teorema I del n. 1.

---

18) L'equazione della superficie H è:

$$X_0X_1X_2(4aX_0 - 3cX_2) + X_1X_2X\ (X_1 + aX_2) + 4aX_0X_2^2(aX_0 - cX_2) +$$
$$+ X_2^2(c^2X_2^2 \quad 3X_1X_2) + X_0^2X_1^2.$$

6. - Le superficie F dei tipi 1), 2), 3), le cui equazioni sono contrassegnate nel n. 5 con gli stessi numeri, pur avendo doppie le relative curve paraboliche Γ, non sono ad asintotiche separabili: ciò perchè, come si può facilmente trarre dalle 1''), 2''), 3''), le curve $\frac{1}{2}\Gamma$ non possono essere segate sulle F da quadriche, come richiede invece la condizione b) del teorema B) del n. 2.

Si può altresì verificare che non è, per le superficie stesse, soddisfatta la condizione del teorema A') del n. 2. Si ha infatti, rispettivamente per le superficie dei tipi 1), 2), 3):

1''') $$\Phi''^2_{XY} - \Phi''_{XX}\Phi''_{YY} = \frac{-4X^2Y^2}{(XY+X+Y)^5},$$

2''') $$\Phi''^2_{XY} - \Phi''_{XX}\Phi''_{YY} = \frac{-4}{X^3Y^3},$$

3''') $$\Phi''^2_{XY} - \Phi''_{XX}\Phi''_{YY} = \frac{-4}{X^3Y}.$$

La superficie F del tipo 4) è invece ad asintotiche separabili, come appare chiaramente dalle 4'') del n. 5: la curva $\frac{1}{2}\Gamma$ è infatti segata su F dalla quadrica di equazione X_0^2.

Infine si può constatare che, per tale superficie, è soddisfatta la condizione del teorema A') del n. 2, in quanto si ha:

4''') $$\Phi''^2_{XY} - \Phi''_{XX}\Phi''_{YY} = \frac{-3}{X^4Y^4}.$$

Tanto basta per concludere come enunciato nel teorema II del n. 1.