

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ARNO PREDONZAN

Alcune questioni di separabilità

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 30 (1960), p. 124-148

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1960__30__124_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

ALCUNE QUESTIONI DI SEPARABILITÀ

Memoria () di ARNO PREDONZAN (a Padova)*

1. - In uno spazio proiettivo P_3 , a tre dimensioni, definito sopra un corpo commutativo K , algebricamente chiuso e di caratteristica $p = 0$, si consideri una k -varietà assoluta bidimensionale, F , cioè una superficie algebrica di P_3 , assolutamente irriducibile, definita sopra un sottocorpo k di K . Sia $n \geq 3$ l'ordine di F , e si supponga che la stessa non sia una rigata sviluppabile, (n. 2).

Da un punto semplice $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ di F esce una coppia (r'_x, r''_x) di rette, dette *rette asintotiche*, che si può pensare ottenuta come sezione del piano Π_x con la quadrica Q_x , polari di x rispetto ad F . Tale coppia (r'_x, r''_x) appartiene al corpo $k(x)$, e può spezzarsi nelle sue due componenti (assolute) r'_x, r''_x , o in $k(x)$, o in un'estensione quadratica di $k(x)$.

Al variare di x sopra F , la coppia (r'_x, r''_x) descrive un sistema algebrico bidimensionale, W , di coppie (r'_x, r''_x) , definito sopra k ed assolutamente irriducibile.

Si presenta ora il problema di stabilire sotto quali condizioni per F , il sistema W può, in una opportuna estensione algebrica k_1 di k , ($k \subset k_1 \subset K$), ottenersi come corrispondenza algebrica tra due distinti sistemi algebrici assolutamente irriducibili, W_1, W_2 , di rette asintotiche, cioè come sottoinsieme algebrico del prodotto $W_1 \times W_2$, in cui sono omologhe due rette, l'una r'_x di W_1 e l'altra r''_x di W_2 , costituenti una medesima coppia (r'_x, r''_x) di W .

(*) Pervenuta in Redazione il 4 aprile 1960.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

Una superficie F , il cui sistema W di coppie di rette asintotiche possa ottenersi come sopra indicato, verrà detta ad *asintotiche separabili*.

Risulta ovviamente ad asintotiche separabili ogni rigata F (non sviluppabile): ed in essa i due sistemi W_1, W_2 sono l'uno unidimensionale, l'altro bidimensionale, essendo quello unidimensionale costituito dalle generatrici della rigata stessa¹⁾.

È inoltre appena opportuno rilevare che se una superficie F è ad asintotiche separabili, tale risulta anche ogni sua trasformata mediante una qualsiasi omografia (non degenerare) di P_3 .

In questo lavoro, poggiando su considerazioni svolte nei nn. 2, 3, 4, 7, si giunge nei nn. 5, 8, 9 a tre condizioni necessarie e sufficienti perchè una superficie F sia ad asintotiche separabili. Nel n. 6 si dà invece una condizione necessaria per la separabilità delle asintotiche, facendo poi vedere, con un semplice esempio, come tale condizione (contrariamente a quanto può apparire in una prima indagine) non risulta affatto sufficiente.

Nel n. 10 si considera una particolare classe di superficie ad asintotiche separabili, ottenendo poi, nel n. 11, per le superficie monoidali della classe stessa, alcune suggestive proprietà delle relative curve paraboliche.

Nei nn. 12, 13 vengono trattati alcuni casi di superficie monoidali degli ordini tre e quattro, indicando come in relazione ad alcune di queste ultime, la separabilità delle asintotiche si traduca in semplici proprietà armoniche.

Infine nei nn. 14, 15 si considerano superficie riferite ad altre ad asintotiche separabili (in particolare a quadriche) mediante corrispondenze per piani tangenti paralleli, facendo vedere come la condizione per la sepa-

¹⁾ Il problema posto in precedenza, nel caso che F sia un cono, o una rigata sviluppabile, è banale, in quanto si ha $W_1 = W_2$.

Se poi $n = 2$, cioè se F è una quadrica, essa risulta sempre ad asintotiche separabili, ed i due sistemi W_1, W_2 sono entrambi unidimensionali.

rabilità delle asintotiche delle prime possa esprimersi semplicemente, poggiando sul concetto di involuzione delle tangenti coniugate.

2. - Si consideri l'anello $k[X] = k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ dei polinomi nelle indeterminate X_0, X_1, X_2, X_3 , costruito sopra il corpo k , e sia $\mathcal{H}_k(F)$ l'ideale omogeneo (primo e principale) della superficie F ; può allora porsi:

$$\mathcal{H}_k(F) = (f(X_0, X_1, X_2, X_3)) = (f(X)),$$

essendo $f(X)$ un polinomio omogeneo di $k[X]$, di grado $n \geq 3$, ed assolutamente irriducibile: tale $f(X)$ viene chiamato — come noto — *equazione di F^2* .

Indicata con $f''_{X_i X_j}$ la derivata seconda di $f(X)$ rispetto ad X_i, X_j , ($i, j = 0, 1, 2, 3$), il polinomio di $k[X]$:

$$h(X) = h(X_0, X_1, X_2, X_3) = \begin{vmatrix} f''_{X_0 X_0} & f'_{X_0 X_1} & f''_{X_0 X_2} & f''_{X_0 X_3} \\ f'_{X_1 X_0} & f''_{X_1 X_1} & f''_{X_1 X_2} & f''_{X_1 X_3} \\ f''_{X_2 X_0} & f''_{X_2 X_1} & f''_{X_2 X_2} & f''_{X_2 X_3} \\ f''_{X_3 X_0} & f'_{X_3 X_1} & f''_{X_3 X_2} & f''_{X_3 X_3} \end{vmatrix},$$

è notoriamente il polinomio hessiano di $f(X)$, e risulta di grado $4(n-2)$, a meno che esso non sia lo zero di $k[X]$, il che implica che F sia un cono (o rigata sviluppabile impropria). Esclusa quest'ultima eventualità, $h(X)$ è l'equazione della *superficie hessiana H* di F , ed è pur essa una superficie algebrica di P_3 , definita sopra il corpo k .

Supporremo nel seguito che F non sia una rigata sviluppabile (propria o impropria), cioè che $h(X)$ non appartenga all'ideale $\mathcal{H}_k(F)$, (e non sia lo zero di $k[X]$). In tale ipotesi l'intersezione $F \cap H$ è una curva algebrica Γ di P_3 , definita

2) Ved. P. SAMUEL, *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*, Ergebnisse der Mathematik, Berlin-Springer, (1955).

sopra k , detta *curva parabolica* di F in quanto in ogni suo punto x , semplice per F , le due rette asintotiche r'_x , r''_x , di cui al n. 1, vengono a coincidere.

Indicata infine con f'_{X_i} la derivata prima di $f(X)$ rispetto ad X_i , ($i=0, 1, 2, 3$), e posto:

$$(1) \quad \delta(X) = \delta(X_0, X_1, X_2, X_3) = \begin{vmatrix} f''_{X_1 X_1} & f''_{X_1 X_2} & f''_{X_1 X_3} & f'_{X_1} \\ f''_{X_2 X_1} & f''_{X_2 X_2} & f''_{X_2 X_3} & f'_{X_2} \\ f''_{X_3 X_1} & f''_{X_3 X_2} & f''_{X_3 X_3} & f'_{X_3} \\ f'_{X_1} & f'_{X_2} & f'_{X_3} & 0 \end{vmatrix}$$

con facili calcoli si verifica che:

$$(2) \quad \delta(X) = \frac{X_0^2}{(n-1)^2} h(X) - \frac{n}{n-1} f(X) \cdot A_{00},$$

stando A_{00} ad indicare il complemento algebrico dell'elemento 0 nel determinante (1).

3. - Giova qui ricordare che la superficie F , in una opportuna estensione del corpo k , può essere dotata di *punto generico* su k . Ad. es., si consideri l'anello $k[X]/\mathcal{H}_k(F)$ delle coordinate (omogenee) di F sopra k , e sia φ il k -omomorfismo ³⁾ canonico di $k[X]$ su $k[X]/\mathcal{H}_k(F)$. Se si indicano allora con x_i , ($i=0, 1, 2, 3$), le classi $\{X_i\}$ corrispondenti ad X_i in tale k -omomorfismo φ — per il che l'anello $k[X]/\mathcal{H}_k(F)$ può scriversi nella forma $k[x] = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ — l'elemento $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ di $k(x)^4 = k(x_0, x_1, x_2, x_3)^4$ può interpretarsi come *punto generico* di F su k , ed ogni punto $x' = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$ di F è *specializzazione* di x sopra k : nel corpo $k(x)$ — che è un sopracorpo del corpo $\mathcal{F}_k(F)$ delle funzioni razionali di F su k — la superficie F ammette dunque il punto generico $x =$

³⁾ Un omomorfismo φ di un sopra-anello R di k in (o su) un altro sopra-anello R' di k , dicesi *k-omomorfismo* se risulta $\varphi(a) = a$ per ogni $a \in k$.

$= (x_0, x_1, x_2, x_3)$, che è anche punto generico di F ove questa si supponga definita sopra un qualunque sopracampo algebrico k_1 di k . Se poi x ed x^* sono due punti generici di F su k , i due corpi $k(x)$ e $k(x^*)$ sono k -isomorfi ⁴⁾.

4. - Dalla teoria della polarità ⁵⁾ discende che il piano polare Π_x e la quadrica polare Q_x del punto generico $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ di F su k , (n. 3), hanno le equazioni rispettive:

$$p_x(X) = p_x(X_0, X_1, X_2, X_3) = \sum_{i=0}^3 f'_{x_i} X_i,$$

$$q_x(X) = q_x(X_0, X_1, X_2, X_3) = \sum_{i,j=0}^3 f''_{x_i x_j} X_i X_j,$$

dove f'_{x_i} ed $f''_{x_i x_j}$ sono le trasformate, mediante il k -omomorfismo ψ di $k[X]$ su $k[x]$, definito da $\psi(X_i) = x_i$.

La conica $C_x = \Pi_x \cap Q_x$ non è altro che la coppia (r'_x, r''_x) delle due rette asintotiche di F uscenti dal punto x , (n. 1): essa è definita su $k(x)$ e risulta riducibile nelle sue due componenti r'_x, r''_x o in $k(x)$, o in una estensione quadratica di $k(x)$.

Si consideri ora la proiezione, Ω , di P_3 , su una faccia P_2 del simpleso fondamentale delle coordinate, avente come centro il vertice del simpleso opposto a P_2 . La trasformata mediante Ω di C_x è una conica $C_x = (r'_x, r''_x)$, la cui intersezione con uno, P_1 , degli spigoli del simpleso fondamentale che risulti situato su P_2 , è un insieme algebrico zerodimensionale costituito da una coppia di punti: anch'esso è definito su $k(x)$ e risulta riducibile o in $k(x)$, o in un'estensione quadratica di $k(x)$. L'equazione di tale insieme, appena lo si pensi come insieme algebrico dello spazio unidimensionale P_1 , può

⁴⁾ Ved. P. SAMUEL, op. cit. in nota ²⁾.

⁵⁾ È noto che la teoria della polarità intesa in senso classico (cioè sul corpo complesso) può essere integralmente trasportata su un qualunque corpo di caratteristica $p = 0$.

scriversi:

$$(3) \quad a_{ii}X_i^2 + 2a_{ij}X_iX_j + a_{jj}X_j^2,$$

essendo a_{ii} , a_{ij} , a_{jj} , elementi di $k(x)$, e dove i, j sono due, distinti, degli interi 0, 1, 2, 3.

Ove si assuma come centro di Ω ad esempio il punto $(0, 0, 0, 1)$, e come spigolo P_1 quello congiungente i due vertici $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0)$, con semplici calcoli si può constatare che il discriminante $d(x) = d(x_0, x_1, x_2, x_3)$ della (3) — pur esso elemento di $k(x)$ — assume la forma:

$$(4) \quad d(x) = f_{x_3}^{\prime 2} \cdot \delta(x),$$

avendo indicato con $\delta(x)$ il trasformato, mediante il k -omomorfismo ψ , del polinomio $\delta(X)$.

La (4), a norma della (2) e tenuto conto che in $k(x)$ si ha $f(x) = 0$, può infine scriversi:

$$(5) \quad d(x) = \frac{x_0^2 \cdot f_{x_3}^{\prime 2}}{(n-1)^2} h(x),$$

essendo, come di consueto, $h(x)$ il trasformato di $h(X)$ mediante ψ .

5. - Dal n. 4 discende chiaramente che il sistema W delle coppie di rette asintotiche di F , risulta sottoinsieme del prodotto $W_1 \times W_2$, così come specificato nel n. 1, se, e soltanto se, il discriminante $d(x)$ della (3), e quindi — a norma della (5) — il fattore $h(x)$ di $d(x)$, è il quadrato di un elemento di $k_1(x)$, con k_1 estensione quadratica di k (eventualmente coincidente con k). Si può pertanto affermare che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie (non sviluppabile) F , d'ordine $n \geq 3$, definita sopra un corpo k ed (assolutamente) irriducibile, sia ad asintotiche separabili è che per un punto generico x di F su k si abbia:

$$(6) \quad h(x) = l(x)^2,$$

dove $l(x)$ è un elemento di $k_1(x)$, con k_1 estensione quadratica di k (eventualmente coincidente con k), ed essendo $h(X)$ l'equazione della superficie hessiana H di F .

Un esempio molto indicativo di superficie ad asintotiche separabili è fornito dalle *superficie tetraedrali* d'ordine pari, cioè da quelle superficie le cui equazioni, per un'opportuna scelta del sistema di coordinate proiettive di riferimento, possono scriversi nella forma:

$$a_0 X_0^{2m} + a_1 X_1^{2m} + a_2 X_2^{2m} + a_3 X_3^{2m},$$

con $a_i \in k$, ($i=0, 1, 2, 3$), ed m intero ≥ 1 ⁶).

6. - Noi diremo che la curva parabolica $\Gamma = F \cap H$ di F è doppia ⁷), se risulta pari la molteplicità d'intersezione di F ed H in ogni componente (assoluta) Γ_s di Γ ; cioè se:

$$i(\Gamma_s; F \cdot H) = 2m_s,$$

con m_s intero ≥ 1 .

Dalla (6) discende allora che:

Condizione necessaria perchè la superficie F sia ad asintotiche separabili è che la sua curva parabolica Γ sia doppia.

Questa condizione non è però sufficiente, come resta provato dal seguente esempio.

Sia F la superficie cubica, (con quattro punti doppi conici nei vertici del simpleso fondamentale delle coordinate), di equazione:

$$X_0 X_1 X_2 + X_1 X_2 X_3 + X_2 X_3 X_0 + X_3 X_0 X_1.$$

La relativa superficie hessiana H ha l'equazione:

$$\begin{aligned} & X_0^2(X_1 X_2 + X_2 X_3 + X_3 X_1) + X_1^2(X_2 X_3 + X_3 X_0 + X_0 X_2) + \\ & + X_2^2(X_3 X_0 + X_0 X_1 + X_1 X_3) + X_3^2(X_0 X_1 + X_1 X_2 + X_2 X_0). \end{aligned}$$

⁶) Ved. B. SEGRE, *The biaxial surfaces, and the equivalence of binary forms*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, v. 41, pt. 3 (n. 5).

⁷) Più precisamente bisognerebbe dire che Γ è di molteplicità pari.

La curva parabolica Γ di tale superficie F è costituita — come è immediato verificare — dai sei spigoli del semplice fondamentale delle coordinate, ed in ogni suo punto (che non sia uno spigolo del semplice) le due superficie F ed H hanno lo stesso piano tangente: Γ è perciò curva doppia.

Un punto generico $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ di F su k è dato da:

$$\begin{cases} x_0 = t_0(t_0t_1 + t_1t_2 + t_2t_0), \\ x_1 = t_1(t_0t_1 + t_1t_2 + t_2t_0), \\ x_2 = t_2(t_0t_1 + t_1t_2 + t_2t_0), \\ x_3 = -t_0t_1t_2, \end{cases}$$

essendo t_0, t_1, t_2 elementi trascendenti sul corpo k di definizione di F (corpo che ora è quello dei numeri razionali, ed uno ad esso isomorfo) ed algebricamente indipendenti ⁸⁾.

L'espressione che fornisce $h(x)$ può allora porsi nella forma:

$$h(x) = -\lambda^2(t_0t_1 + t_1t_2 + t_2t_0),$$

con λ polinomio omogeneo di $k[t_0, t_1, t_2]$. Quest'ultima, a norma del teorema del n. 5, ci assicura che la considerata superficie F non è ad asintotiche separabili.

⁸⁾ La determinazione del punto generico indicato si ottiene facilmente appena si osservi che in un sistema di coordinate affini Y_1, Y_2, Y_3 , ($Y_1 = X_1X_0^{-1}$, $Y_2 = X_2X_0^{-1}$, $Y_3 = X_3X_0^{-1}$), l'equazione di F può scriversi:

$$Y_3(Y_1Y_2 + Y_1 + Y_2) + Y_1Y_2,$$

e quindi un punto generico affine (y_1, y_2, y_3) è dato da:

$$\begin{cases} y_1 = \lambda_1, \\ y_2 = \lambda_2, \\ y_3 = \frac{-\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_2}, \end{cases}$$

con λ_1, λ_2 trascendenti su k ed algebricamente indipendenti.

7. - Appena si fissi nello spazio proiettivo P_3 un piano ω da considerarsi come *piano improprio*, il complemento di ω in P_3 è uno spazio affine A_3 , pure definito sopra il corpo K .

Se ω è il piano di P_3 di equazione X_0 , e se i punti $y = (y_1, y_2, y_3)$ di A_3 sono quelli $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ di P_3 per i quali si ha:

$$(7) \quad y_1 = x_1 x_0^{-1}, \quad y_2 = x_2 x_0^{-1}, \quad y_3 = x_3 x_0^{-1}, \quad (x_0 \neq 0),$$

lo spazio affine A_3 si dirà *associato* a quello proiettivo P_3 ; ed è appunto ad un tale spazio che nel seguito ci riferiremo.

Le superficie proiettive F ed H di P_3 , sin qui considerate, e che in P_3 avevano le equazioni rispettive:

$$(8) \quad f(X) = f(X_0, X_1, X_2, X_3), \quad h(X) = h(X_0, X_1, X_2, X_3),$$

con $f(X)$ ed $h(X)$ polinomi omogenei, dei grandi n e $4(n-2)$, dell'anello $k[X] = k[X_0, X_1, X_2, X_3]$, diverranno in A_3 superficie affini (e si indicheranno ancora con gli stessi simboli F ed H), e le loro equazioni in A_3 si scriveranno:

$$(9) \quad \bar{f}(Y) = \bar{f}(Y_1, Y_2, Y_3), \quad \bar{h}(Y) = \bar{h}(Y_1, Y_2, Y_3),$$

essendo $\bar{f}(Y)$ ed $\bar{h}(Y)$ polinomi (non omogenei), dei gradi rispettivi n ed $m \leq 4(n-2)$ ⁹⁾, dell'anello $k[Y] = k[Y_1, Y_2, Y_3]$, legati a quelli (8) dalle relazioni:

$$f(X) = X_0^n \bar{f}(X_1 X_0^{-1}, X_2 X_0^{-1}, X_3 X_0^{-1}),$$

$$h(X) = X_0^{4(n-2)} \bar{h}(X_1 X_0^{-1}, X_2 X_0^{-1}, X_3 X_0^{-1}),$$

essendo i secondi membri ottenuti dalle (9) con le posizioni:

$$Y_1 = X_1 X_0^{-1}, \quad Y_2 = X_2 X_0^{-1}, \quad Y_3 = X_3 X_0^{-1};$$

⁹⁾ Risulta $m < 4(n-2)$ se, e soltanto se, il piano improprio ω è componente di molteplicità $4(n-2) - m$ della superficie (proiettiva) hessiana H di F .

Si potrebbe però supporre, senza restrizione (bastando per ciò un opportuno cambiamento delle coordinate proiettive di P_3 , e di conseguenza di quelle affini dell' A_3 associato), che sia sempre $m = 4(n-2)$.

$\bar{f}(Y)$ ed $\bar{h}(Y)$ sono dunque i trasformati di $f(X)$ ed $h(X)$ nel k -omomorfismo τ dell'anello $k[X]$ su quello $k[Y]$, definito da:

$$\tau(X_0) = 1, \quad \tau(X_i) = Y_i \quad \text{per } i = 1, 2, 3.$$

Si osservi infine che se $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ è punto generico (proiettivo) su k di F in P_3 , il punto $y = (y_1, y_2, y_3)$, definito dalle (7), è punto generico (affine) su k di F in A_3 .

8. - In uno spazio affine A_4 , di cui lo spazio A_3 del n. 7 sia quello di equazione Y_4 , si consideri la k -varietà assoluta tridimensionale, V , d'ordine $4(n-2)$, di equazione:

$$Y_4^2 - \bar{h}(Y_1, Y_2, Y_3),$$

dove il polinomio $\bar{h}(Y_1, Y_2, Y_3)$ è quello indicato nella seconda delle (9), ed è quindi in A_3 l'equazione della superficie hessiana H di F .

Si consideri ora la corrispondenza E tra A_3 e V così definita: sia E quel sottoinsieme del prodotto $A_3 \times V$ per cui il trasformato totale $E(y)$ di ogni singolo punto $y = (y_1, y_2, y_3)$ di A_3 sia costituito dalla coppia $(y_1, y_2, y_3, \pm \sqrt{\bar{h}(y_1, y_2, y_3)})$ di punti di V .

In virtù di tale corrispondenza, lo spazio affine A_3 è l'immagine dell'involuzione razionale I_2 di V costituita dalle coppie $E(y)$, e può perciò atteggiarsi a spazio doppio con superficie di diramazione H .

Consideriamo ora quel sottoinsieme algebrico E' di E per cui si abbia:

$$pr_{A_3}(E') = F,$$

cioè la cui proiezione su A_3 sia la superficie F , la cui equazione è data dalla prima delle (9).

Dalle considerazioni dei nn. 4, 5, [in particolare dalla (5), trasformata mediante le (7)], si ha allora che la F risulta ad asintotiche separabili se, e soltanto se, il trasformato totale $E'(F)$ di F mediante la corrispondenza E' , è un sottoinsieme algebrico di V , riducibile in k , o in un'estensione quadratica k_1 di k , in due componenti V_1, V_2 , corrisponden-

tisi nell'involuzione I_2 (cioè tali che il corrispondente in I_2 di ogni punto dell'una giaccia sull'altra). Perchè ciò avvenga occorre e basta che la superficie F sia tangente alla superficie di diramazione H ovunque la incontri, il che equivale a dire che — dette Γ_s le componenti di Γ (assolutamente) irriducibili e distinte — deve aversi (cfr. n. 6):

$$i(\Gamma_s; F \cdot H) = 2m_s, \quad (m_s \geq 1),$$

per cui risulta:

$$\Gamma = 2 \sum_s m_s \Gamma_s;$$

inoltre la curva $\frac{1}{2}\Gamma$, (appartenente al corpo k o ad un'estensione quadratica di k), definita da:

$$\frac{1}{2}\Gamma = \sum_s m_s \Gamma_s,$$

deve essere linearmente equivalente a quelle segate su F dal sistema lineare che si ottiene come bisezione di quello generato da H in A_3 ¹⁰).

Si può pertanto concludere che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè una superficie non sviluppabile F , dell'ordine $n \geq 3$, definita sopra un corpo k ed (assolutamente) irriducibile, sia ad asintotiche separabili, è che:

a) *la sua curva parabolica Γ sia doppia;*

b) *la curva $\frac{1}{2}\Gamma$, definita su k o su un'estensione quadratica di k , sia linearmente equivalente a quelle segate su F dal sistema lineare ottenuto come bisezione di quello generato dalla superficie hessiana H di F .*

¹⁰) Questa condizione è un'immediata estensione di una analoga, relativa ai *piani doppi*, ed ottenuta nel corpo complesso con i metodi della geometria algebrica classica [ved. F. ENRIQUES, *Superficie algebriche* (litografie)]. La sua validità sussiste però anche quando al corpo complesso si sostituisce un altro corpo (commutativo) di caratteristica $p = 0$.

Si osservi che la superficie cubica considerata nell'esempio del n. 6, e che si è già visto non essere ad asintotiche separabili, soddisfa alla condizione a), ma non ovviamente alla b).

9. - Siano $r_{11}(Y)$, $r_{12}(Y)$, $r_{22}(Y)$ gli elementi del corpo $k(Y) = k(Y_1, Y_2, Y_3)$ delle *funzioni razionali* nelle indeterminate Y_1, Y_2, Y_3 , definiti da:

$$r_{ij}(Y) = \bar{f}'_{Y_3}{}^{-3} [\bar{f}'_{Y_3} \bar{f}'_{Y_i} \bar{f}'_{Y_j Y_3} + \bar{f}'_{Y_j} \bar{f}'_{Y_i Y_3}] - \bar{f}'_{Y_i} \bar{f}'_{Y_j} \bar{f}''_{Y_3 Y_3} - \bar{f}'_{Y_3}{}^2 \bar{f}''_{Y_i Y_j},$$

($i, j = 1, 2$),

e si ponga:

$$(10) \quad \Delta(Y) = r_{12}^2(Y) - r_{11}(Y) \cdot r_{22}(Y).$$

Se $y = (y_1, y_2, y_3)$ è un *punto generico (affine)* su k della superficie F di A_3 , la cui equazione è data dalla prima delle (9), il k -omomorfismo Ψ di $k(Y)$ su $k(y)$, definito da $\Psi(Y_i) = y_i$, ($i = 1, 2, 3$), muta la (10) nella:

$$(10') \quad \Delta(y) = r_{12}^2(y) - r_{11}(y) \cdot r_{22}(y).$$

Con facili calcoli si vede allora che sussiste l'uguaglianza:

$$(11) \quad \bar{h}(y) = (n - 1)^2 \bar{f}'_{y_3}{}^4 \cdot \Delta(y),$$

essendo $\bar{h}(y)$ ed \bar{f}'_{y_3} i trasformati, mediante il k -omomorfismo Ψ , del polinomio $h(Y)$, di cui alla seconda delle (9), e della derivata prima, rispetto ad Y_3 , di quello $\bar{f}(Y)$.

A norma del teorema del n. 5, ed appena si tenga conto delle (7) e dell'osservazione finale del n. 7, dalla (11) discende che:

La superficie (affine) F , non sviluppabile, definita sopra un corpo k , risulta ad asintotiche separabili se, e soltanto se:

$$(12) \quad \Delta(y) = r_{12}(y)^2 - r_{11}(y) \cdot r_{22}(y) = l(y)^2,$$

essendo $l(y)$ un elemento (non nullo) del corpo $k_1(y)$, con k_1 estensione algebrica di k di grado ≤ 2 .

10. - Una classe, \mathcal{C} , particolarmente notevole di superficie ad asintotiche separabili è costituita da quelle superficie, definite sopra un corpo k , di cui un modello proiettivo F su k ammette, in un prefissato riferimento affine, un punto generico $y = (y_1, y_2, y_3)$ su k , per cui si abbia:

$$(13) \quad \Delta(y) = r_{12}(y)^2 - r_{11}(y) \cdot r_{22}(y) = \rho^2,$$

essendo ρ un arbitrario elemento non nullo di k .

Se F è *razionale*, risulta punto generico di F su k un punto $y = (y_1, y_2, y_3)$ di coordinate:

$$(14) \quad \begin{cases} y_1 = \rho^{-1}[\varphi_2'(\lambda_2) - \varphi_1'(\lambda_1)], \\ y_2 = \rho^{-1}(\lambda_1 - \lambda_2), \\ y_3 = \rho^{-1} \{ (\lambda_1 + \lambda_2)[\varphi_2'(\lambda_2) - \varphi_1'(\lambda_1)] + 2[\varphi_1(\lambda_1) - \varphi_2(\lambda_2)] \}, \end{cases}$$

oppure un qualunque altro punto $y' = (y_1', y_2', y_3')$ ad esso k -isomorfo, cioè tale che esiste un k -isomorfismo Φ tra $k(y)$ e $k(y')$ per cui sia $\Phi(y_i) = y_i'$, ($i = 1, 2, 3$), [ved. n. 3].

Nelle (14), $\varphi_1(\lambda_1)$, $\varphi_2(\lambda_2)$ sono due elementi dei due corpi $k(\lambda_1)$, $k(\lambda_2)$, ottenuti dal corpo k con l'aggiunzione di due elementi λ_1 , λ_2 , trascendenti su k ed algebricamente indipendenti: tali $\varphi_1(\lambda_1)$, $\varphi_2(\lambda_2)$ possono essere arbitrariamente scelti purchè non nulli e tali che $\varphi_1''(\lambda_1) \neq \varphi_2''(\lambda_2)$, essendo gli indici in alto simboli di derivazione ¹¹).

Il fatto che una superficie *razionale* F per cui valga la (13) abbia un *punto generico* su k dato dalle (14), si trae come immediata conseguenza (opportunamente adattata al tenore delle nostre considerazioni) di un noto risultato classico relativo alla ricerca dell'integrale generale di un'equazione differenziale alle derivate parziali, il quale appunto afferma che l'integrale generale di un'equazione differenziale del tipo (13), è proprio dato dalle (14) ¹²).

¹¹) La condizione $\varphi_1''(\lambda_1) \neq \varphi_2''(\lambda_2)$ garantisce che la *matrice jacobiana* delle tre funzioni (14), [pensate come funzioni di λ_1 , λ_2], è diversa da zero.

¹²) Ved. G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, v. III, Paris, Gauthier-Villars (1894), pp. 273, 274.

Un semplice esempio di superficie razionale appartenente alla classe \mathcal{C} suddetta, è fornito dalla superficie F di equazione:

$$4(Y_1 + Y_2)^3 + 27Y_2Y_3^2,$$

di cui un *punto generico* si ottiene dalle (14) appena si ponga $\varphi_1(\lambda_1) = \lambda_1^4$, $\varphi_2(\lambda_2) = \lambda_2^4$.

11. - Consideriamo ora nello spazio affine A_3 una superficie monoidale F , dell'ordine n , la cui equazione $f(Y)$ sia data da:

$$(15) \quad \bar{f}(Y) = Y_3 b(Y_1, Y_2) - a(Y_1, Y_2),$$

essendo $a(Y_1, Y_2)$, $b(Y_1, Y_2)$ polinomi dell'anello $k[Y_1, Y_2]$, dei gradi rispettivi n ed $n_1 \leq n - 1$.

Assunto come *punto generico* y di F su k quello di coordinate:

$$(16) \quad \begin{cases} y_1 = Y_1, \\ y_2 = Y_2, \\ y_3 = \frac{a(Y_1, Y_2)}{b(Y_1, Y_2)}, \end{cases}$$

(Y_1, Y_2 trascendenti su k ed algebricamente indipendenti), dalle (15), (16) si trae che:

$$(17) \quad \bar{f}'_{y_3} = b(Y_1, Y_2).$$

Supposto ora $\Delta(y) = \rho^2$, cioè supposto che F appartenga alla classe \mathcal{C} , (n. 10), la (11), in virtù della (17), si scrive:

$$(18) \quad \bar{h}(y) = (n - 1) b(Y_1, Y_2)^4 \cdot \rho^2.$$

Dalla (18), appena si ricordi che $h(y)$ è il trasformato mediante il k -omomorfismo Ψ , di cui al n. 9, del polinomio $\bar{h}(Y)$ di grado $m \leq 4(n - 2)$, discende che nella limitazione $n_1 \leq n - 1$, a cui deve soddisfare il grado n_1 di $b(Y_1, Y_2)$, non

può valere l'uguaglianza, e pertanto deve aversi $n_1 < n - 1$, cioè:

$$(19) \quad n - n_1 - 2 \geq 0.$$

Nello spazio proiettivo P_3 , associato a quello affine A_3 , (n. 7), l'equazione di F può scriversi:

$$(20) \quad f(X) = X_3 \cdot X_0[X_0^{n-n_1-2}b(X_1, X_2)] - a(X_1, X_2),$$

ed il polinomio:

$$(21) \quad X_0g(X_0, X_1, X_2),$$

con

$$(22) \quad g(X_0, X_1, X_2) = X_0^{n-n_1-2}b(X_1, X_2),$$

rappresenta il cono γ delle tangenti ad F nel suo punto $(n-1)$ -plo $(0, 0, 0, 1)$: γ si spezza dunque nel piano improprio ω , (n. 7), ed in un ulteriore cono γ_1 , di equazione (22), dell'ordine $n-2$ [il quale può, a sua volta, avere ω come componente di molteplicità $n - n_1 - 2$, se nella (19) vale la limitazione superiore].

Dalle (18), (20), (21), (22), discende che la curva parabolica Γ di F può essere rappresentata dalle equazioni:

$$\begin{cases} X_3[X_0g(X_0, X_1, X_2)] - a(X_1, X_2), \\ g(X_0, X_1, X_2)^4; \end{cases}$$

la Γ è costituita dunque dalle $n(n-2)$ rette — dette pur esse *asintotiche* — intersezioni di F col cono γ_1 , ciascuna contata quattro volte. Appena si ricordi che γ_1 si ottiene dal cono γ delle tangenti ad F in $(0, 0, 0, 1)$ quando si tolga da quest'ultimo il piano ω , e si osservi inoltre che tale piano ω non è componente della superficie hessiana H di F (nel senso che se ω è componente di molteplicità $n - n_1 - 2$ di H , esso è componente di molteplicità $n - n_1 - 1$ del cono γ), si può concludere che:

Se una superficie monoidale F , dell'ordine n , appartiene

alla classe \mathcal{C} , (n. 10), ed è quindi ad asintotiche separabili, si ha che:

a) il cono γ delle tangenti ad F nel suo punto di molteplicità $n-1$ si spezza in un piano ω , non appartenente (nel senso sopra indicato) alla superficie hessiana H di F , e in un cono γ_1 dell'ordine $n-2$;

b) la curva parabolica Γ di F è costituita dalle $n(n-2)$ rette asintotiche intersezioni di γ_1 con F , ciascuna contata quattro volte.

Un semplice esempio di superficie monoidale del tipo suddetto è dato dalla superficie F di equazione:

$$6Y_2Y_3 - 3Y_2^4 + Y_1^2;$$

un punto generico della F stessa può ottenersi dalle (14), ivi ponendo $\varphi_1(\lambda_1) = \lambda_1^3$, $\varphi_2(\lambda_2) = \lambda_2^3$.

12. - Dopo aver considerato, nei nn. 10, 11, monoidi ad asintotiche separabili dell'ordine $n \geq 3$ arbitrario, vogliamo in questo n. e nel successivo fare alcune considerazioni su monoidi cubici e quartici.

Cominciamo subito col verificare che:

*Se un monoide cubico con punto doppio uniplanare è ad asintotiche separabili, esso risulta necessariamente rigato*¹³).

Un monoide cubico, F , con punto doppio uniplanare ammette, in un opportuno riferimento affine, un'equazione della forma:

$$(23) \quad Y_3 - \varphi(Y_1, Y_2),$$

dove:

$$(24) \quad \varphi(Y_1, Y_2) = \sum_{i,j=0}^3 \frac{a_{ij}}{i!j!} Y_1^i Y_2^j, \quad (i+j \leq 3),$$

con a_{ij} elementi di un corpo k .

¹³ Questo teorema è caso particolare di un altro più generale (dimostrato dall'A. mentre questa Memoria stava per uscire alle stampe) e che assicura che ogni superficie cubica ad asintotiche separabili è necessariamente o la superficie cubica con tre punti doppi biplanari, oppure una rigata. Ved. A. PREDONZAN, Una nuova caratterizzazione delle rigate cubiche, questi Rendiconti, questo volume.

Assunto come *punto generico* y di F su k quello di coordinate: $y_1 = Y_1$, $y_2 = Y_2$, $y_3 = \varphi(Y_1, Y_2)$, si ha (ved. n. 9):

$$(25) \quad \Delta(y) = r_{12}(y)^2 - r_{11}(y) \cdot r_{22}(y) = \varphi''_{Y_1 Y_2} - \varphi''_{Y_1 Y_1} \varphi''_{Y_2 Y_2},$$

dove le:

$$(26) \quad \begin{cases} \varphi''_{Y_1 Y_1} = a_{30} Y_1 + a_{21} Y_2 + a_{20}, \\ \varphi''_{Y_2 Y_2} = a_{12} Y_1 + a_{03} Y_2 + a_{02}, \\ \varphi''_{Y_1 Y_2} = a_{21} Y_1 + a_{12} Y_2 + a_{11}, \end{cases}$$

non sono altro che le derivate parziali seconde della (24), rispetto ad Y_1, Y_2 .

Se F è ad asintotiche separabili deve esistere — a norma del teorema del n. 9 — in $k_1(y)$, o meglio in questo caso in $k_1[Y_1, Y_2]$, (k_1 estensione algebrica di k di grado ≤ 2), un polinomio $\psi = \psi(Y_1, Y_2)$ per cui si abbia:

$$(27) \quad \varphi''_{Y_1 Y_2} - \varphi''_{Y_1 Y_1} \varphi''_{Y_2 Y_2} = \psi^2.$$

Da ciò segue che deve risultare:

$$\varphi''_{Y_1 Y_1} \varphi''_{Y_2 Y_2} = (\varphi''_{Y_1 Y_2} - \psi)(\varphi''_{Y_1 Y_2} + \psi),$$

e quindi, poichè $k[Y_1, Y_2]$ è un *dominio a fattorizzazione unica*:

$$(28) \quad \begin{cases} \varphi''_{Y_1 Y_1} = \lambda (\varphi''_{Y_1 Y_2} - \psi), \\ \varphi''_{Y_2 Y_2} = \lambda^{-1} (\varphi''_{Y_1 Y_2} + \psi), \end{cases} \quad (\lambda \neq 0).$$

Dalle (28) segue che le tre rette, rappresentate in uno spazio affine A_2 dalle equazioni (26), appartengono ad uno stesso fascio. Ciò comporta che sia:

$$(29) \quad \begin{vmatrix} a_{30} & a_{21} & a_{20} \\ a_{12} & a_{03} & a_{02} \\ a_{21} & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix} = 0.$$

Potendosi senza restrizione supporre ¹⁴⁾:

$$(30) \quad a_{30} = a_{12} = 0,$$

la condizione (29) diviene:

$$a_{21}(a_{21}a_{02} - a_{03}a_{20}) = 0,$$

e quindi o $a_{21} = 0$, o $a_{21}a_{02} - a_{03}a_{20} = 0$.

Se $a_{21} = 0$, sempre tenendo conto delle (30), la (25) si scrive:

$$\Delta(y) = a_{11}^2 - a_{20}(a_{03}Y_2 + a_{02}),$$

e questa, dovendo essere $a_{03} \neq 0$, [perchè in caso opposto il polinomio (24) sarebbe del secondo grado], può verificare la (27) se, e solo se, $a_{20} = 0$, nel qual caso (come è immediato osservare) la F di equazione (23) è rigata, avendo come retta doppia la retta impropria del piano di equazione Y_2 .

Se invece $a_{21}a_{02} - a_{03}a_{20} = 0$, si ha $\varphi''_{Y_2Y_2} = \rho\varphi''_{Y_1Y_1}$, ($\rho \neq 0$), ed allora la (25) diviene:

$$\Delta(y) = \varphi''_{Y_1Y_1} - \rho\varphi''_{Y_1Y_1} = (a_{21}Y_1 + a_{11})^2 - \rho(a_{21}Y_2 + a_{20})^2,$$

e questa può soddisfare alla (27) se, e solo se, $a_{21} = 0$, per cui si ricade nel caso precedente.

13. - Qui considereremo monoidi, F , del quarto ordine a punto triplo, z , uniplanare e che ammettono in un loro punto, x , un piano iperosculatore, cioè un piano (non passante per z) che seghi F in quattro rette per x . In relazione a monoidi siffatti ci proponiamo di verificare che:

Un monoide quartico F del tipo suddetto, che non sia rigato, risulta ad asintotiche separabili se, e soltanto se, le quattro rette per il suo punto x di iperosculazione formano,

¹⁴⁾ Per ottenere ciò basta assoggettare A_3 da un'opportuna trasformazione affine, definita su k , che muti in sè il piano A_2 .

opportunamente ordinate, un gruppo armonico; oppure se tali quattro rette costituiscono una sola coppia di rette distinte, ciascuna contata due volte.

Cominciamo col supporre che tre (almeno) delle quattro rette di F uscenti da x siano distinte. Allora, in un opportuno riferimento affine A_3 , l'equazione del monoide F può scriversi nella forma ¹⁵⁾:

$$(31) \quad Y_3 - Y_1 Y_2 (Y_1 + Y_2) (a Y_1 + b Y_2),$$

con a, b elementi del corpo k , non entrambi nulli.

Preso come *punto generico* y di F su k quello di coordinate: $y_1 = Y_1$, $y_2 = Y_2$, $y_3 = Y_1 Y_2 (Y_1 + Y_2) (a Y_1 + b Y_2)$, la (10') — come si verifica facilmente — può scriversi:

$$(32) \quad \Delta(y) = 9a^2 Y_1^4 + 12a(a+b) Y_1^3 Y_2 + 6(2a^2 + ab + 2b^2) Y_1^2 Y_2^2 + \\ + 12b(a+b) Y_1 Y_2^3 + 9b Y_2^4.$$

Affinchè sia verificata la condizione imposta dal teorema del n. 9, che ci assicura la razionale separabilità delle asintotiche di F , occorre e basta che nell'anello $k_1[Y_1, Y_2]$, (k_1 estensione algebrica di k di grado ≤ 2) esista un polinomio omogeneo del secondo grado:

$$(33) \quad \psi(Y_1, Y_2) = c_{11} Y_1^2 + c_{12} Y_1 Y_2 + c_{22} Y_2^2,$$

per cui si abbia:

$$(34) \quad \Delta(y) = \psi(Y_1, Y_2)^2.$$

¹⁵⁾ Basta infatti assumere nello spazio proiettivo P_3 , associato a quello affine A_3 (n. 7), il punto $z = (0, 0, 0, 1)$ come punto triplo di F , con piano tangente (triplo) quello (improprio) ∞ di equazione X_0 . Inoltre si assuma come piano iperosculatore nel punto $x = (1, 0, 0, 0)$ quello di equazione X_3 , e delle quattro rette intersezioni di tale piano con F , tre (distinte) abbiano le equazioni rispettive, nel piano iperosculatore: $X_1, X_2, X_1 + X_2$.

Per la validità della (34) debbono essere soddisfatte, appena si tenga conto delle (32), (33), le seguenti condizioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}^2 = 9a^2, \\ c_{11}c_{12} = 6a(a + b), \\ 2c_{11}c_{22} + c_{12}^2 = 6(2a^2 + ab + 2b^2), \\ c_{22}c_{12} = 6b(a + b), \\ c_{22}^2 = 9b^2, \end{array} \right.$$

per il verificarsi delle quali occorre e basta che gli elementi a, b di k che compaiono nella (31) soddisfino ad una delle seguenti tre condizioni:

$$(35) \quad a = -b, \quad a = 2b, \quad 2a = b.$$

Quando si osservi che, a norma della (31), le quattro rette per il punto x di iperosculatione di F hanno, sul piano coordinato di equazione Y_3 , le equazioni rispettive:

$$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_1 + Y_2, \quad aY_1 + bY_2,$$

e si assumano come coordinate affini di tali rette i rapporti dei coefficienti della Y_1 con quelli della Y_2 delle relative equazioni, si ha che le quattro rette in questione hanno, rispettivamente nei tre casi indicati nella (35), le seguenti coordinate affini:

$$\infty, 0, 1, -1; \quad \infty, 0, 1, 2. \quad \infty, 0, 1, 1/2;$$

tanto basta per concludere che le rette stesse formano, opportunamente ordinate, un gruppo armonico.

Se invece due delle quattro rette per x vengono a coincidere, l'equazione di F può scriversi:

$$(36) \quad Y_3 - Y_1^2(aY_1^2 + bY_2^2),$$

e dalla (36) si trae:

$$(37) \quad \Delta(y) = 12bY_1^2(bY_2^2 - 2aY_1^2).$$

Perchè la (37) soddisfi alla condizione del teorema del n. 9, bisogna che o $a=0$, o $b=0$.

Nel caso $a=0$, la (36) diviene:

$$Y_3 - bY_1^2Y_2^2,$$

per cui le quattro rette per x costituiscono una coppia di rette distinte, ciascuna contata due volte, come indicato nell'enunciato del teorema.

Invece nel caso $b=0$, la (36) diviene:

$$Y_3 - aY_1^4,$$

ed allora la F è un cono (un cilindro), in contrasto con l'ipotesi del teorema.

Se infine tre (almeno) delle quattro rette per x coincidono, l'equazione di F si scrive:

$$Y_3 - Y_1^3(aY_1 + bY_2),$$

per cui F è chiaramente una rigata, e le sue generatrici vengono segate su F dai piani di equazione $Y_1 = c$.

Tanto basta per concludere come inizialmente enunciato.

14. - Siano F ed F' due superficie (non sviluppabili) di P_3 , definite sopra uno stesso corpo k , (assolutamente) irriducibili e birazionalmente equivalenti su k , cioè tali che i relativi corpi delle funzioni razionali $\mathcal{F}_k(F)$ ed $\mathcal{F}_k(F')$ siano k -isomorfi. Esiste allora una corrispondenza birazionale T tra F ed F' , in guisa che se x è un punto generico di F su k , il suo omologo in T è quel punto (generico) $x' = T(x)$ di F' di cui un sistema di coordinate omogenee (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) è legato a quello (x_0, x_1, x_2, x_3) di x dalle:

$$(38) \quad tx'_i = P_i(x_0, x_1, x_2, x_3), \quad (i = 0, 1, 2, 3),$$

ove le P_i sono forme dello stesso grado nelle x_0, x_1, x_2, x_3 , con i coefficienti in k , e dove t è un fattore di proporzionalità; le (38) poi sono razionalmente invertibili in k .

Sia s la retta in cui si incontrano i piani tangenti α ed α' ad F ed F' , rispettivamente in x ed x' , retta che supporremo non passante nè per x , nè per x' .

È noto che T induce tra i due fasci di α ed α' , di centri x ed x' , una proiettività η , la cui sezione con s è una proiettività π (non degenera), definita su $k(x)$.

Facciamo ora l'ipotesi che la retta s appartenga ad uno stesso piano ω di P_3 , qualunque sia la specializzazione x di x in cui T è biregolare. Una corrispondenza T soddisfacente a questa condizione verrà nel seguito detta *corrispondenza per piani tangenti paralleli*, e tale denominazione sarà giustificata dal fatto che nello spazio affine A_3 , ottenuto come associato a quello proiettivo P_3 , appena in questo ultimo si assuma ω come piano improprio, (n. 7), due piani tangenti in punti omologhi risultano tra loro paralleli.

Nell'ipotesi suddetta le due *involuzioni delle tangenti coniugate* ad F in x e ad F' in x' , (involuzioni certamente non degeneri perchè F ed F' non sono sviluppabili), segano su s due involuzioni ξ e ξ' , pure definite su $k(x)$, e legate all'involuzione π dalla relazione ¹⁶⁾:

$$(39) \quad \pi = \xi \cdot \xi'.$$

Congiungendo con x i due punti uniti u, v di ξ , e con x' quelli uniti u', v' di ξ' , si ottengono le due coppie $(r', r_{x'})$ ed $(r'_{x'}, r''_{x'})$ di rette asintotiche di F ed F' uscenti rispettivamente da x ed x' . Perchè allora F sia ad asintotiche separabili occorre e basta che la coppia (u, v) , definita su $k(x)$, sia riducibile in un corpo $k_1(x)$, con k_1 estensione algebrica di k di grado ≤ 2 ; e poichè la coppia (u, v) può rappresentarsi con un'equazione di secondo grado con i coefficienti in $k(x)$, il cui discriminante è l'opposto del modulo D_ξ dell'involuzione ξ , si ha che la separabilità delle asintotiche di F avviene se, e soltanto se: $D_\xi = l_\xi(x)^2$, con $l_\xi(x)$ elemento di $k_1(x)$.

¹⁶⁾ Ved. B. SEGRE, *Sui riferimenti fra superficie per incidenza o parallelismo di piani tangenti*, Rend. Acc. dei Lincei, s. VIII, v. XXV, f. 6 (1958).

Supposta allora F ad asintotiche separabili, ed osservato che dalla (39) discende:

$$D_{\xi'} = D_{\xi} \cdot D_{\pi},$$

avendo indicato con $D_{\xi'}$ e D_{π} i moduli di ξ' e π , rispettivamente. si può concludere che:

Una superficie F' , riferita ad una superficie F ad asintotiche separabili in una corrispondenza birazionale T per piani tangenti paralleli, risulta pur essa ad asintotiche separabili se, e soltanto se, il modulo D_{π} della proiettività π indotta da T sulla retta s , intersezione dei due piani tangenti ad F ed F' in due punti generici x ed x' , omologhi in T , risulta il quadrato di un elemento di $k_1(x)$, essendo k_1 un'estensione algebrica, di grado ≤ 2 , del corpo k di definizione di F , F' e T .

È immediato osservare che la condizione richiesta dal teorema è certo soddisfatta se π è l'identità, oppure se π è una proiettività parabolica. Nel primo caso la superficie F' è la trasformata di F in un'omologia di piano fondamentale ω ¹⁷).

15. - In un riferimento affine A_3 , in cui il piano ω di cui al n. precedente sia il piano improprio, le coordinate (y_1, y_2, y_3) e (y'_1, y'_2, y'_3) di due punti generici di F ed F' su k , omologhi in T , potranno esprimersi con:

$$(40) \quad y_j = \mu_j(t_1, t_2),$$

$$(41) \quad y'_j = \nu_j(t_1, t_2). \quad (j = 1, 2, 3),$$

essendo $\mu_j(t_1, t_2)$, $\nu_j(t_1, t_2)$ elementi del corpo $k(t_1, t_2)$, estensione trascendente pura di k , di grado di trascendenza due. I punti di F ed F' omologhi in T , si otterranno allora per le medesime specializzazioni di t_1, t_2 .

¹⁷⁾ Ved. B. SEGRE, loc. cit in nota ¹⁶⁾.

La condizione perchè nei due punti y ed y' i piani tangenti ad F ed F' siano paralleli, si esprime con:

$$(42) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y'_j}{\partial t_1} = a_1 \frac{\partial y_j}{\partial t_1} + a_2 \frac{\partial y_j}{\partial t_2} \\ \frac{\partial y'_j}{\partial t_2} = b_1 \frac{\partial y_j}{\partial t_1} + b_2 \frac{\partial y_j}{\partial t_2} \end{array} \right. \quad (j = 1, 2, 3),$$

essendo a_1, a_2, b_1, b_2 , quattro elementi del corpo $k(t_1, t_2)$, il cui determinante:

$$(43) \quad D_\pi = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

può assumersi come modulo della proiettività π indotta da T sulla retta s , (n. 14).

Ne deriva che:

Se F è una superficie ad asintotiche separabili di cui un punto generico affine su k si esprima mediante le (40), le superficie F' ad asintotiche separabili riferite ad F in una corrispondenza T per piani tangenti paralleli sono tutte e sole quelle che ammettono un modello proiettivo di cui un punto generico affine (41) soddisfi alle (42), nelle quali le a_i, b_i , ($i=1, 2$), siano elementi non nulli del corpo $k(t_1, t_2)$ e tali che il determinante (43) risulti il quadrato di un elemento di $k_1(t_1, t_2)$, essendo k_1 un'estensione algebrica di k di grado ≤ 2 .

Le (42) vengono ad assumere una forma particolarmente semplice nel caso che le superficie F' di cui sopra abbiano i relativi involuppi monoidali (cioè siano involuppi di classe m , con un piano $\tilde{\omega}$ di molteplicità $m-1$). Tali superficie infatti possono sempre essere riferite ad una quadrica Q mediante una corrispondenza per piani tangenti paralleli: basta a tale scopo scegliere Q in giusa che risulti tangente al piano ω suddetto.

Qualora si assuma un opportuno riferimento affine per il quale $\tilde{\omega}$ sia il piano improprio, e si scelga come quadrica Q

quella di equazione:

$$Y_3 - \frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2),$$

di cui un *punto generico* si esprima con:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = t_1, \\ y_2 = t_2, \\ y_3 = \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2), \end{array} \right.$$

le (42) vengono a scriversi nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y'_1}{\partial t_1} = a_1, \\ \frac{\partial y'_2}{\partial t_1} = a_2, \\ \frac{\partial y'_3}{\partial t_1} = a_1 t_1 + a_2 t_2, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y'_1}{\partial t_2} = b_1, \\ \frac{\partial y'_2}{\partial t_2} = b_2, \\ \frac{\partial y'_3}{\partial t_2} = b_1 t_1 + b_2 t_2, \end{array} \right.$$

di cui è evidente la particolare semplicità.