RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDMONDO MORGANTINI

Sulla configurazione di tre omologie piane in posizione omologica

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 29 (1959), p. 328-400

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1959__29__328_0>

SULLA CONFIGURAZIONE DI TRE OMOLOGIE PIANE IN POSIZIONE OMOLOGICA

Memoria (*) *di* EDMONDO MORGANTINI (*a Padova*)

INTRODUZIONE

Questo lavoro non ha eccessive pretese di originalità, nè si distingue per la modernità o la difficoltà del suo contenuto. L'Autore l'ha iniziato per curiosità e l'ha terminato per divertimento, prendendo lo spunto dal noto [1]) teorema di geometria elementare: « *dato un triangolo equilatero, i simmetrici* $P_1P_2P_3$ *di un medesimo punto* P *rispetto ai suoi lati* $b_1b_2b_3$ *sono vertici di un triangolo omologico al dato* ».

È chiaro che, data nel piano una qualsiasi terna di omologie Ω_1, Ω_2, Ω_3, il triangolo $P_1P_2P_3$ degli omologhi di uno stesso punto P è sempre omologico a quello $A_1A_2A_3$ dei centri delle Ω_i. Invece non sempre $P_1P_2P_3$ è omologico a quello avente per lati gli assi b_i delle Ω_i. Se però ciò accade per ogni scelta del punto P, come nel caso delle tre simmetrie di cui sopra, diremo che le tre omologie Ω_i sono *in posizione omologica puntuale.*

Sorge quindi spontanea la ricerca e la caratterizzazione delle terne di omologie piane in posizione omologica puntuale e — dualmente — quella delle terne di omologie piane *in*

(*) Pervenuta in Redazione il 18 giugno 1959.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Padova.

[1]) Cfr. ad es. M. BALDASSARRI, *Guida allo studio della geometria analitica e proiettiva*, vol. II (Padova, Randi, 1958), p. 287.

posizione omologica radiale, ossia tali che il triangolo avente per lati le omologhe $g_1 g_2 g_3$ di una retta generica g sia sempre omologico al triangolo $A_1 A_2 A_3$ dei centri delle Ω_i.

Tale ricerca e tale caratterizzazione sono appunto svolte nelle pagine seguenti, con i metodi analitici e sintetici della geometria proiettiva. Facendo poi assumere alle configurazioni trovate particolari atteggiamenti metrici, si ritrovano anche — inquadrati in una teoria organica — numerosi ed eleganti teoremi di geometria del triangolo.

* * *

Escluso preliminarmente il caso banale, di contemporanea posizione omologica assiale e radiale, in cui il triangolo dei centri coincide col triangolo degli assi delle Ω_i, si suppone dapprima non accada che contemporaneamente i centri delle Ω_i siano allineati e gli assi concorrenti.

Allora, condizione *necessaria* affinchè le tre Ω_i siano in posizione omologica è che siano *omologici il triangolo* $(A_i) \equiv (a_i)$ *dei loro centri e quello* $(b_i) \equiv (B_i)$ *dei loro assi* (nn. 1, 2). Detti r ed S l'asse ed il centro di questa omologia, si riconosce poi che, se i centri A_i non sono allineati, nessuno di essi appartiene alla retta r, mentre se gli assi b_i non concorrono, a nessuno di essi appartiene il punto S (n. 3). Inoltre:

Fissati ad arbitrio la retta r ed i centri A_i (non allineati, nè appartenenti ad r) *di tre omologie Ω_i in posizione omologica radiale, se ne possono scegliere ad arbitrio anche gli assi b_i, rispettivamente nei fasci di centri $R_i \equiv r \cdot a_i$*, purchè distinti dalle a_i (per evitare il caso banale) e dalle coniugate armoniche r_i di r rispetto alle coppie di rette a_i, $R_i A_i$. Dopo di che *le tre Ω_i sono completamente determinate, dovendo in ciascuna di esse alla retta r_i corrispondere la retta a_i*. In altre parole questa è la condizione *sufficiente* per la posizione omologica radiale, quando i centri A_i delle Ω_i non sono allineati (n. 4).

Dualmente, *si possono scegliere ad arbitrio gli assi non concorrenti b_i di una terna di omologie Ω_i in posizione omologica puntuale ed il punto S, non appartenente ad alcuno di essi.* Dette s_i le rette SB_i, *sulle s_i si possono poi scegliere,* *pure ad arbitrio, i centri* A_i *delle* Ω_i, purchè distinti da B_i e dal coniugato armonico S_i di S rispetto alla coppia di punti B_i, $s_i \cdot b_i$. Ed infine *ogni* Ω_i *risulta determinata, in quanto in essa ad* S_i *corrisponde il punto* B_i.

Si ha così anche la condizione *sufficiente* per la posizione omologica puntuale delle Ω_i (n. 4), quando i loro assi b_i non sono concorrenti.

Nel n. 5 si osserva che (se gli assi delle Ω_i non concorrono) le condizioni per la posizione omologica puntuale sono quelle necessarie e sufficienti affinchè sia concorrente la trilinearità tra i fasci B_i ottenuta da quella concorrente tra i fasci S_i riferendo ciascun fascio S_i a quello B_i mediante la prospettività di asse b_i. E dualmente.

D'altra parte si riconosce subito che *se tre omologie* Ω_i *sono in posizione omologica radiale, le loro inverse sono in posizione omologica puntuale* (nn. 7, 8).

Da quanto precede consegue che una terna di omologie Ω_i non può essere contemporaneamente in posizione omologica puntuale e radiale — ossia, brevemente, in *posizione omologica* — se le Ω_i non sono omologie *armoniche*. A questo proposito conviene considerare il polo armonico R della retta r rispetto al triangolo (A_i) dei centri e la polare armonica s del punto S rispetto al trilatero (b_i) degli assi delle Ω_i. Si dimostra che, *se i tre centri* A_i *non sono allineati, le* Ω_i *sono armoniche solo se i tre loro assi* b_i *passano per il punto* R e, dualmente, *se i loro tre assi* b_i *non sono concorrenti, le* Ω_i *sono armoniche solo se i loro centri* A_i *appartengono alla retta* s (nn. 6, 9). Ciò caratterizza i due tipi di terne di omologie Ω_i in posizione omologica non banale (puntuale e, contemporaneamente, radiale) rispettivamente con i centri non allineati oppure con gli assi non concorrenti.

Può infine accadere che contemporaneamente *i centri delle* Ω_i *siano allineati* (su di una retta r), *e gli assi concorrenti* (in un punto R). *Allora* (se R ed r non si appartengono) *la posizione omologica si ha solo quando le* Ω_i *sono involutorie* (e quindi è contemporaneamente radiale e puntuale) *e quando con una omografia la loro configurazione si può trasformare* *in quella delle tre simmetrie ortogonali rispetto alle altezze di un triangolo equilatero* (nn. 22, 23, 24).

Si noti che la posizione omologica, ad es. puntuale, diviene meno espressiva quando gli assi delle Ω_i concorrono, ma non svanisce, rimanendo vincolante la condizione che siano allineate le intersezioni con gli assi b_i dei lati del triangolo $P_1P_2P_3$ opposti ai vertici P_i. Dualmente per la posizione omologica radiale, quando sono allineati i centri delle Ω_i.

* * *

Gli enunciati precedenti dànno una *caratterizzazione proiettiva* delle terne di omologie in posizione omologica radiale o puntuale non banale. Risulta così che di fronte al gruppo delle omografie del piano vi sono ∞^3 ***tipi distinti*** di terne di omologie in posizione omologica puntuale, le cui inverse sono in posizione omologica radiale. Indichiamo con W questa varietà ∞^3 di tipi omograficamente distinti di terne di omologie Ω_i.

Ogni reciprocità del piano induce la stessa corrispondenza biunivoca ed involutoria della W in se. Se P e P' sono due generici punti corrispondenti nella R (generici nel senso che le terne di omologie Ω_i di cui P è l'immagine hanno i centri non allineati e gli assi non concorrenti), le omologie delle terne aventi per immagine P' sono le inverse di quelle delle terne aventi per immagine il punto P (n. 8).

La varietà W contiene due sottovarietà ∞^2, V e V': una di terne omograficamente distinte di omologie in posizione omologica radiale con i centri non allineati e gli assi concorrenti, le cui inverse sono in posizione omologica puntuale; l'altra di terne omograficamente distinte di omologie in posizione omologica puntuale con gli assi non concorrenti ed i centri allineati, le cui inverse sono in posizione omologica radiale. La V e la V' sono mutate una nell'altra dalla R.

Il punto A di V, immagine delle terne di omologie *armoniche* in posizione omologica con i centri non allineati è trasformato dalla R nel punto A' di V' immagine delle terne di omologie armoniche in posizione omologica con gli assi non concorrenti.

La R lascia unito il punto B comune a V e V' ed immagine delle terne di omologie armoniche in posizione omologica con gli assi concorrenti ed i centri allineati.

* * *

Per ciascuno dei tipi omograficamente distinti di terne di omologie in posizione omologica radiale o puntuale è interessante assegnare uno o più particolari *modelli metrici,* ad es. come si è già fatto sopra per quelle la cui immagine sulla W è il punto B comune a V e a V'.

Come modello metrico delle terne aventi per immagine il punto A' della V' si può assumere (n. 9) la *terna delle simmetrie rispetto ai lati di un triangolo equilatero,* dal quale ha preso l'avvio questa ricerca.

Per il caso duale (punto A della V) si possono prendere le tre *omologie armoniche aventi per centri i vertici di un triangolo equilatero e per assi le parallele ai lati opposti per il suo centro* (n. 9).

Tanto in questo caso come nei precedenti le particolarità metriche dei modelli permettono non solo di enunciare dei teoremi abbastanza notevoli di geometria del triangolo, ma anche di scoprire altre proprietà proiettive della posizione omologica. Si confrontino ad es. gli enunciati e le figure dei nn. 9, 24.

* * *

Per la ricerca di convenienti modelli metrici del caso generale si premettono (nn. 10, 11) alcune considerazioni sulla cubica Γ luogo dei punti P i cui omologhi P_i in una *qualsiasi* terna di omologie Ω_i (anche non in posizione omologica) sono allineati. Questa cubica Γ si spezza in una conica γ circoscritta al triangolo degli assi delle Ω_i e in una retta r quando i loro centri sono allineati su r. Trasformando con una omografia r nella retta impropria e γ in un circolo si ritrova una nota [2]) generalizzazione di Poncelet del teorema

---

[2]) Cfr. I. V. PONCELET, *Traité des propriétés proiectives des figures,* Vol. I, 2ª éd. (Paris, 1865), p. 261.

di R. Simson [3]) sull'allineamento delle proiezioni ortogonali sui lati di un triangolo di un punto del circolo circoscritto. Anche il teorema duale è suscettibile di una interessante particolarizzazione metrica (n. 11).

Nel caso di tre Ω_i in posizione omologica puntuale, fissati il triangolo non degenere $(B_i) \equiv (b_i)$ dei loro assi ed il centro S e l'asse r di omologia col triangolo (A_i) dei loro centri, la scelta della posizione di uno dei centri A_i sulla retta $s_i \equiv SB_i$ determina la posizione degli altri due, e quindi le stesse Ω_i e la cubica Γ. Si riconosce (n. 12) che, *al variare di A_i su s_i, Γ varia nel fascio individuato dalla cubica spezzata nei tre assi b_i e dall'altra spezzata nella retta r e nella conica Γ_2 trasformata di r nella involuzione quadratica col triangolo fondamentale $B_1B_2B_3$ ed il punto S unito. La cubica Γ si spezza nella retta r e nella conica Γ_2 solo se i tre centri A_i delle Ω_i sono allineati* (su r). *Solo se r ed S si appartengono la conica Γ_2 tocca la retta r* (n. 14). Detti s_i' i lati del triangolo (S_i), *su r la involuzione I dei punti coniugati rispetto a Γ_2 è quella cui appartengono le tre coppie di punti segate dalle tre coppie di rette s_i, s_i'* (n. 14).

Osservazioni duali valgono ovviamente per il caso duale di tre omologie (ad es. le Ω_i^{-1}) in posizione omologica radiale col triangolo dei centri non degenere e per l'inviluppo di 3ª classe Γ delle rette le cui tre omologhe concorrono in un punto.

Quando Γ si spezza nella retta r e nella conica Γ_2 (ossia quando i centri A_i delle Ω_i sono allineati sulla retta r) *allora l'inviluppo $\overline{\Gamma}$ relativo alle Ω_i^{-1} si spezza nei tre fasci di rette aventi per centro il punto S ed i punti M', N' di r comuni omologhi nelle Ω_i dei punti M, N di intersezione di Γ_2 con r.* E dualmente (n. 17).

La costruzione dei punti M', N' si ricollega (n. 18) ad alcuni teoremi della teoria delle coniche, un atteggiamento metrico

[3]) Cfr. V. Retali e G. Biggiogero, *La geometria del triangolo*, p. 199[88] [in *Enciclop. delle Matem. Elementari* (Milano, Hoepli, 1937), vol. II, P. I].

dei quali riguarda eleganti proprietà del *circolo dei nove punti* [4]).

Si perviene così (n. 19) alla seguente caratterizzazione proiettiva dei legami che intercorrono tra la conica Γ_2 e la configurazione dei centri e degli assi delle Ω_i, in posizione omologica puntuale:

Fissata la conica Γ_2 e, su di essa, i punti B_i e quelli M, N, siano $\bar{I}$ il polo della retta $r = MN$ e B_i' i vertici del trilatero circoscritto a Γ_2 nei punti B_i. Le rette $\bar{I}B_i'$ segano Γ_2 in tre coppie di punti C_i, C_i'. Le tre coppie di rette B_iC_i, B_iC_i' sono lati opposti di uno stesso quadrangolo piano completo. Solamente uno (qualsiasi) dei suoi quattro vertici può assumersi come centro S della omologia di asse r che lega il trilatero $(b_i) = (B_i)$ degli assi al triangolo (A_i) dei centri delle Ω_i, che restano completamente determinate dalla successiva scelta di uno dei vertici A_i sulla SB_i.

* * *

I teoremi ora ricordati, assieme ai loro duali, permettono di costruire diversi *modelli metrici reali della totalità ∞^8 delle terne omograficamente distinte di omologie in posizione omologica.*

Così (n. 15) per il caso che r ed S si appartengano è sufficiente trasformare r nella retta impropria. Si ottengono eleganti teoremi di geometria elementare, di cui basterà qui segnalare quello illustrato dalla fig. 17 che esprime *essere concorrenti le rette congiungenti i vertici B_i di un triangolo con i simmetrici rispetto ad un punto P delle intersezioni Q_i dei suoi lati b_i con una retta arbitraria per P.*

Nel caso (n. 16) che r ed S non si appartengano, la I sia ellittica e gli assi b_i non concorrenti, si può trasformare r nella retta impropria, Γ_2 nel circolo circoscritto al triangolo (B_i) degli assi ed S nel centro di uno dei circoli ad esso *inscritti.*

---

[4]) Cfr. il n. 13 dell'articolo di V. RETALI e G. BIGGIOGERO citato sopra in [3]).

La figura resta determinata a meno di una similitudine ed il modello resta valido anche nel caso limite che i centri siano allineati (sulla retta impropria).

Nello stesso caso, supposta però I iperbolica, un modello metrico reale si può ottenere (n. 19) scegliendo come conica Γ_2 un circolo e ad es. fissando su di esso i vertici B_i del triangolo degli assi. Allora la figura resta determinata ed M, N debbono appartenere entrambi ad uno degli archi B_kB_l non contenenti B_i. Anche ora il modello resta valido nel caso limite che i centri A_i siano allineati.

Sempre nel caso che r ed S non si appartengano, ma supposti i centri non allineati, modelli metrici reali validi anche nel caso che gli assi siano concorrenti si ottengono (n. 20) fissando come conica (inviluppo) $\overline{\Gamma}_2$ un circolo e come triangolo (A_i) dei centri un triangolo ad esso circoscritto. La figura resta così determinata e se la involuzione I^* (duale della I) è iperbolica, S risulta esterno al circolo ed interno a quella contenente il circolo delle quattro regioni triangolari individuate nel piano ampliato dalle tre rette a_i.

Se invece I^* è ellittica S risulta interno a $\overline{\Gamma}_2$.

In questo caso si può anche (n. 21) trasformare con una omografia reale r nella retta impropria e le tangenti a $\overline{\Gamma}_2$ uscenti da S nelle rette isotrope. Allora la figura resta determinata a meno di una similitudine ed il triangolo dei centri (A_i) diviene un qualsiasi triangolo non degenere di cui S è il circocentro. $\overline{\Gamma}_2$ è la conica inscritta in (A_i) col fuoco in S. Gli assi possono essere anche concorrenti.

Inutile dire che anche in tutti questi casi e nei loro casi limite la posizione omologica delle Ω_i fornisce altrettanti teoremi di geometria del triangolo.

D'altra parte il particolare atteggiamento metrico spesso consente di intuire prima e di dimostrare poi altre proprietà proiettive della posizione omologica.

* * *

Avvertiamo il Lettore che alla fine della Memoria si trova un indice del testo ed un indice delle figure.

CAP. I.

LA POSIZIONE OMOLOGICA NON BANALE, NEL CASO CHE NON SIANO CONTEMPORANEAMENTE ALLINEATI I CENTRI E CONCORRENTI GLI ASSI

1. - Premesse algoritmiche.

Fissato nel piano un riferimento proiettivo con i punti fondamentali A_1, A_2, A_3, una qualsiasi omologia non degenere Ω_1 col centro in $A_1 = (1, 0, 0)$ si rappresenta con una sostituzione lineare del tipo:

$$(1.1) \qquad y_1 : y_2 : y_3 = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) : x_2 : x_3 \,,$$

dove $x_1 x_2 x_3$, $y_1 y_2 y_3$ sono le coordinate omogenee di due punti corrispondenti $(x \rightarrow y)$; oppure, nelle coordinate di due rette corrispondenti $(u \rightarrow v)$:

$$(1.2) \quad v_1 : v_2 : v_3 : = u_1 : (-a_2 u_1 + a_1 u_2) : (-a_3 u_1 + a_1 u_3) .$$

L'asse b_1 della Ω_1 ha le coordinate:

$$b_{11} : b_{12} : b_{13} = (a_1 - 1) : a_2 : a_3 \,,$$

cosicchè, volendole porre in evidenza, le (1.2) si scrivono:

$$(1.3) \; v_1 : v_2 : v_3 = u_1 : \{-b_{12} u_1 + (1 + b_{11}) u_2\} : \{-b_{13} u_1 + (1 + b_{11}) u_3\}.$$

Ovviamente, la Ω_1 risulterà speciale o non speciale secondo che sia $b_{11} = 0$, oppure $b_{11} \neq 0$.

Se non speciale, la sua caratteristica puntuale è:

$$k_1 = b_{11} + 1 \,,$$

cosicchè la Ω_1 sarà armonica se $b_{11} = -2$.

Si noti che nelle (1.3) figura una *particolare* delle ∞^1 terne proporzionali di coordinate omogenee $b_{11}b_{12}b_{13}$ dell'asse b_1 della Ω_1. Al variare del fattore comune, a meno del quale le b_{1k} sono determinate, le (1.3) possono rappresentare *tutte* le omologie Ω_1 di asse b_1 e centro A_1.

Poichè la intersezione R_1 della retta $b_1 = (b_{11}, b_{12}, b_{13})$ col lato $a_1 = (1, 0, 0)$ del triangolo fondamentale ha le coordinate:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 0 : -b_{13} : b_{12},$$

tenendo presenti le analoghe espressioni delle coordinate dei punti $R_2 = b_2 \cdot a_2$, $R_3 = b_3 \cdot a_3$, si ha che la condizione di omologia dei due trilateri $b_1b_2b_3$ ed $a_1a_2a_3$ si scrive:

$$(1.4)\qquad \begin{vmatrix} 0 & -b_{13} & b_{12} \\ -b_{23} & 0 & b_{21} \\ -b_{32} & b_{31} & 0 \end{vmatrix} = b_{13}b_{21}b_{32} - b_{12}b_{23}b_{21} = 0 .$$

2. - Condizione necessaria per la posizione omologica radiale o puntuale.

Siano date tre omologie $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$, di centri $A_1A_2A_3$ *non allineati,* e siano b_1, b_2, b_3 i loro assi ($b_i = (b_{i1}, b_{i2}, b_{i3})$).

Assunti i punti $A_1A_2A_3$ come vertici del triangolo fondamentale delle coordinate proiettive, le coordinate delle tre rette g_1, g_2, g_3 corrispondenti nelle Ω_i ad una medesima retta g $(u_1u_2u_3)$, a norma della (1.3) e delle analoghe, saranno date dalle:

$$(2.1)\quad \begin{cases} v_{11} : v_{12} : v_{13} = u_1 : \{-b_{12}u_1 + (1+b_{11})u_2\} : \{-b_{13}u_1 + (1+b_{11})u_3\}, \\ v_{21} : v_{22} : v_{23} = \{-b_{21}u_2 + (1+b_{22})u_1\} : u_2 : \{-b_{23}u_2 + (1+b_{22})u_3\}, \\ v_{31} : v_{32} : v_{33} = \{-b_{31}u_3 + (1+b_{33})u_1\} : \{-b_{32}u_3 + (1+b_{33})u_2\} : u_3 . \end{cases}$$

Pertanto, affinchè il trilatero $g_1g_2g_3$ risulti omologico a quello $a_1a_2a_3$ comunque si scelga la retta g, ossia, come diremo per brevità, affinchè le tre omologie $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ siano « *in posizione omologica radiale* », occorre e basta che sia, identicamente rispetto alle variabili $u_1u_2u_3$:

$$v_{13}v_{21}v_{32} - v_{12}v_{23}v_{31} \equiv 0 ,$$

ossia:

$$(2.2)\begin{cases} \{-b_{13}u_1+(1+b_{11})u_3\}\cdot\{-b_{21}u_2+(1+b_{22})u_1\}\cdot \\ \cdot\{-b_{32}u_3+(1+b_{33})u_2\}-\{-b_{12}u_1+(1+b_{11})u_2\}\cdot \\ \cdot\{-b_{23}u_2+(1+b_{22})u_3\}\cdot\{-b_{31}u_3+(1+b_{33})u_1\}\equiv 0\,. \end{cases}$$

Annullando il coefficiente del termine $u_1u_2u_3$ nel 1° membro della (2.3), si ha:

$$(2.3)\qquad b_{13}b_{21}b_{32}-b_{12}b_{23}b_{31}=0\,.$$

Dunque intanto, come vuole la (1.4), *i due trilateri* $a_1a_2a_3$ *e* $b_1b_2b_3$ *debbono essere omologici.*

Si osservi subito che, essendo autoduale la configurazione delle coppie di elementi (punti e rette) corrispondenti in una omologia, e scambiandosi per dualità il centro con l'asse, alla stessa condizione autoduale ora trovata di omologia del triangolo dei centri delle Ω_i con quello dei loro assi, saremmo pervenuti anche imponendo la condizione duale che il triangolo $P_1P_2P_3$ dei punti corrispondenti nelle Ω_i ad un medesimo punto P dovesse sempre risultare omologico a quello $B_1B_2B_3$ (supposto non degenere) dei loro assi $b_1b_2b_3$ ($B_i=b_k\cdot b_l$), ossia, come diremo in seguito per brevità, che le tre omologie $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ fossero «*in posizione omologica puntuale*». Dunque:

Condizione necessaria affinchè tre omologie si trovino in posizione omologica radiale o puntuale è che il triangolo dei loro centri sia omologico a quello dei loro assi.

Si osservi anche che la (2.2) è identicamente soddisfatta se:

$$b_{12}=b_{13}=b_{23}=b_{21}=b_{31}=b_{32}=0\,,$$

ossia se l'asse di ognuna delle Ω_i coincide con la congiungente i centri delle altre due, cioè *se il triangolo degli assi delle* Ω_i *coincide con quello dei loro centri.* Ciò era evidente a priori, essendo in ogni terna di omologie il trilatero degli assi omologico a quello delle rette corrispondenti ad una generica retta g. E dualmente.

Si potrà pertanto escludere questo *caso banale* di contemporanea omologia radiale e puntuale dalle considerazioni successive.

3. - La retta r non contiene i centri; il punto S non appartiene agli assi.

Annullando i coefficienti degli altri monomi:

$$u_1u_2^2,\ u_1u_3^2;\ u_2u_3^2,\ u_2u_1^2;\ u_3u_1^2,\ u_3u_2^2;$$

che compaiono nel 1° membro della (2.2), e tenendo presente che, essendo le Ω_i non degeneri, si deve avere:

$$(3.1) \qquad (1+b_{11})(1+b_{22})(1+b_{33}) \neq 0,$$

si ottiene:

$$(3.2) \qquad \begin{cases} b_{13}b_{21}+(1+b_{11})b_{23}=0 \\ b_{12}b_{31}+(1+b_{11})b_{32}=0 \end{cases}$$

$$(3.3) \qquad \begin{cases} b_{21}b_{32}+(1+b_{22})b_{31}=0 \\ b_{23}b_{12}+(1+b_{22})b_{13}=0 \end{cases}$$

$$(3.4) \qquad \begin{cases} b_{32}b_{13}+(1+b_{33})b_{12}=0 \\ b_{31}b_{23}+(1+b_{33})b_{21}=0. \end{cases}$$

Si osservi anzitutto che la (2.3) è la condizione di risolubilità dei tre sistemi (3.2), (3.3), (3.4) nelle rispettive incognite $(1+b_{11})$, $(1+b_{22})$, $(1+b_{33})$ e che, a causa della (3.1), nessuna delle sei quantità

$$b_{12},\ b_{13},\ b_{23},\ b_{21},\ b_{31},\ b_{32}$$

può annullarsi, senza che si annullino contemporaneamente le altre cinque. In altre parole:

Nessuno degli assi di tre omologie in posizione omologica radiale può passare per uno dei centri delle altre due, a meno che l'asse di ognuna delle Ω_i non coincida con la congiungente i centri delle altre due. E dualmente.

E poichè questo caso banale è stato già considerato ed escluso, possiamo senz'altro supporre:

$$(3.5) \qquad b_{12}b_{13}b_{23}b_{21}b_{31}b_{32} \neq 0,$$

ossia affermare che:

L'asse r di omologia dei due trilateri $a_1 a_2 a_3$, $b_1 b_2 b_3$ *non passa per alcuno dei punti* $A_1 A_2 A_3$.

Si noti che non è escluso che il trilatero $b_1 b_2 b_3$ degeneri, cioè che gli assi delle tre Ω_i passino per un medesimo punto ed eventualmente coincidano.

Dualmente, partendo dagli assi $b_1 b_2 b_3$ non concorrenti di tre omologie $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$ in posizione omologica puntuale non banale, si avrà che:

Il centro di omologia dei due triangoli $B_1 B_2 B_3$ $A_1 A_2 A_3$ *non appartiene ad alcuna delle tre rette* $b_1 b_2 b_3$, non essendo escluso che degeneri il triangolo $A_1 A_2 A_3$, ossia che i centri delle tre Ω_i siano allineati o addirittura coincidano.

4. - Condizioni sufficienti e determinazione della posizione omologica.

Si può dunque assumere la retta r come retta unità del riferimento proiettivo $A_1 A_2 A_3$, e con ciò si dovrà avere:

$$\frac{b_{12}}{b_{13}} = \frac{b_{23}}{b_{21}} = \frac{b_{31}}{b_{32}} = 1. \tag{4.1}$$

Sarà quindi lecito porre:

$$b_{12} = b_{13} = -k_1, \qquad b_{23} = b_{21} = -k_2, \qquad b_{31} = b_{32} = -k_3, \tag{4.2}$$

essendo, per le (3.5):

$$k_1 k_2 k_3 \neq 0, \infty. \tag{4.3}$$

Dopo di che le (3.2) (3.3) (3.4) si trasformano nelle equivalenti:

$$\begin{cases} k_1 = 1 + b_{11} \\ k_2 = 1 + b_{22} \\ k_3 = 1 + b_{33} \end{cases} \tag{4.4}$$

e le equazioni (2.1) delle Ω_i divengono:

$$
(4.5) \qquad \begin{cases} v_{11} : v_{12} : v_{13} = u_1 : k_1(u_1 + u_2) : k_1(u_1 + u_3) \\ v_{21} : v_{22} : v_{23} = k_2(u_1 + u_2) : u_2 : k_2(u_2 + u_3) \\ v_{31} : v_{32} : v_{33} = k_3(u_1 + u_3) : k_3(u_2 + u_3) : u_3, \end{cases}
$$

mentre le equazioni dei rispettivi assi si scrivono:

$$
(4.6) \qquad \begin{cases} x_1 + k_1(-x_1 + x_2 + x_3) = 0 \\ x_2 + k_2(x_1 - x_2 + x_3) = 0 \\ x_3 + k_3(x_1 + x_2 - x_3) = 0. \end{cases}
$$

Si osservi che al variare di k_i, la i-esima delle (4.6) può rappresentare ogni retta del fascio avente per centro il punto

$$
R_i = r \cdot a_i = r \cdot A_k A_l \qquad (i \neq k \neq l = 1, 2, 3),
$$

restando escluse per la (4.3) solo la stessa retta a_i $(k_i = 0)$ e la retta r_i $(k_i = \infty)$ coniugata armonica della retta r rispetto alle due rette a_i ed $R_i A_i$.

D'altra parte, comunque si scelga k_i $(\neq 0, \infty)$, risulta dalle (4.5) che nella Ω_i alla retta r_i (congiungente i punti $u_i + u_k = 0$, $u_i + u_l = 0$ $(i \neq k \neq l)$) corrisponde sempre il lato a_i del triangolo fondamentale. Dunque (v. fig. 1):

Fissato il triangolo (non degenere) ***dei centri*** $A_1A_2A_3$ ***e il suo asse*** r ***di omologia con quello*** (eventualmente anche degenere) ***degli assi, in modo che i tre punti*** $R_i = a_i \cdot r$ ***siano distinti, gli assi*** b_i ***delle tre omologie*** Ω_i ***in posizione omologica radiale si possono scegliere ad arbitrio per i rispettivi punti*** R_i***, purchè distinti dalle rispettive*** r_i ***e dalle*** a_i (se si vuole evitare il caso banale). ***Fatta questa scelta le*** Ω_i ***restano determinate in quanto in ognuna di esse alla retta*** r_i ***deve sempre corrispondere la retta*** a_i.

E dualmente:

Fissato il trilatero (non degenere) ***degli assi*** $b_1b_2b_3$ ***ed il suo centro*** S ***di omologia con quello*** (eventualmente anche degenere) ***dei centri, in modo che le rette*** $s_i = B_i S$ ***siano distinte, i centri*** A_i ***delle tre omologie*** Ω_i ***in posizione omologica***

puntuale si possono scegliere ad arbitrio sulle rispettive rette s_i*, purchè distinti dai rispettivi punti* S_i (coniugati armonici del punto S rispetto ai due punti B_i ed $s_i \cdot b_i$) *e da quelli* B_i

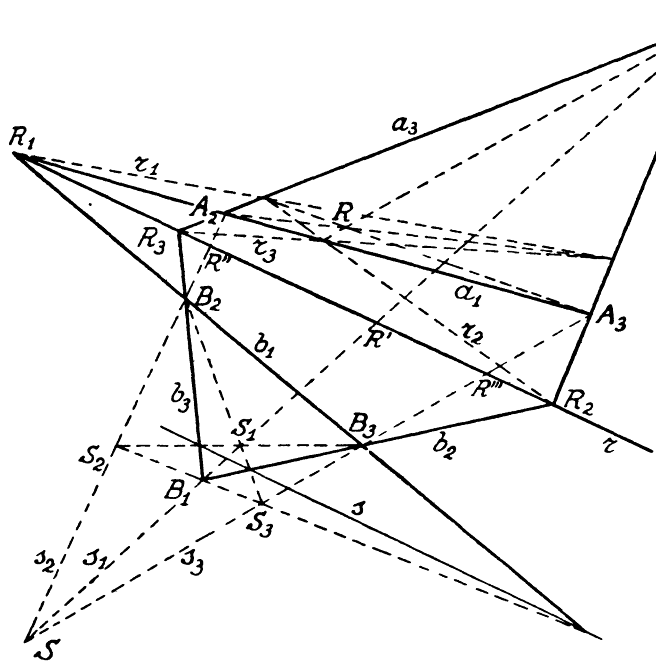

Fig. 1.

(se si vuole evitare il caso banale). *Fatta questa scelta le* Ω_i *restano determinate, in quanto in ognuna di esse al punto* S_i *deve sempre corrispondere il punto* B_i.

5. - Relazioni tra la posizione omologica e la trilinearità.

Date tre omologie Ω_i di assi distinti e non concorrenti b_i, sia S_i il punto cui nella Ω_i corrisponde $B_i = b_k \cdot b_l$ $(i \neq k \neq l = 1, 2, 3)$ e sia T la « *trilinearità concorrente* » [5])

[5]) Cfr. E. MORGANTINI, *Teoria delle corrispondenze trilineari tra forme di prima specie.* (Rend. Sem. Matem. Padova, IX (1938), pp. 1-121) nn. 64, 67.

fra i tre fasci S_i. Riferendo prospettivamente ciascuno dei fasci S_i al fascio B_i con l'asse di prospettiva b_i, si ottiene una trilinearità T' tra i fasci B_i, riferita terna per terna alla T.

Si osservi che alla terna di rette dei fasci S_i proiettanti un punto P del piano e quindi corrispondentesi nella T, corrisponde nel riferimento suddetto la terna delle rette (corrispondenti in T') omologhe delle precedenti nelle Ω_i, ossia proprio quelle che dai punti B_i proiettano i punti P_i omologhi di P nelle Ω_i. Dunque per la posizione omologica puntuale delle Ω_i occorre e basta che questa terna sia di rette concorrenti [6]), cioè che *sia concorrente anche la trilinearità* T'. Da quanto precede risulta allora che:

Dato un triangolo non degenere $B_1B_2B_3$, *condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia concorrente la trilinearità* T *fra tre fasci* S_i, *ottenuta da quella concorrente* T' *tra i fasci* B_i *riferendo prospettivamente ciascun fascio* S_i *a quello* B_i, *con l'asse di prospettiva* $b_i = B_kB_l$ $(i \neq k \neq l = 1, 2, 3)$, *sono*:

1) *che le rette* $s_i = B_iS_i$ *concorrano in un punto* S (ossia che i due triangoli (B_i) ed (S_i) siano omologici);

2) *che ciascuno dei punti* S_i *sia il coniugato armonico di* S *rispetto alla coppia di punti* B_i, $(b_i \cdot s_i)$ (cosicchè il triangolo (S_i) risulta anche circoscritto a quello (B_i)).

Dualmente:

Dato un trilatero non degenere $a_1a_2a_3$, *condizioni necessarie e sufficienti affinchè sia allineata la trilinearità* $\overline{T}$ *fra tre punteggiate* $r_1r_2r_3$, *ottenuta da quella allineata* $\overline{T}'$ *fra le punteggiate* a_i *riferendo prospettivamente ciascuna* r_i *alla* a_i *col centro di prospettività* $A_i = a_k \cdot a_l$ $(i \neq k \neq l = 1, 2, 3)$, *sono*:

1) *che i punti* $R_i = a_i \cdot r_i$ *siano allineati su di una retta* r (cioè che siano omologici i due trilateri (a_i) ed (r_i));

2) *che ciascuna delle rette* r_i *sia la coniugata armonica*

[6]) In un punto P', variabile con P e suo trasformato in una trasformazione quadratica coi triangoli fondamentali (S_i) e (B_i).

di r rispetto alla coppia di rette a_i, A_iR_i (cosicchè il trilatero (r_i) risulta anche inscritto in quello (a_i)).

Si confronti ad es. la fig. 16 del n. 15, dove r ed S sono impropri.

6. - Caso speciale e caso involutorio.

In particolare, dalle (4.5) risulta che:

Se è speciale una delle tre Ω_i in posizione omologica radiale (cioè se $k_i = 1$) *allora in essa alla retta a_i corrisponde la r*, e quindi, dualmente:

Se una delle tre Ω_i in posizione omologica puntuale è speciale, in essa al punto B_i corrisponde il punto S.

La fig. 2 mette in evidenza il particolare aspetto affine che assume la configurazione degli assi e dei centri di una terna di omologie speciali Ω_i in posizione omologica, quando con una omografia si sia trasformata la retta r nella retta impropria [7]).

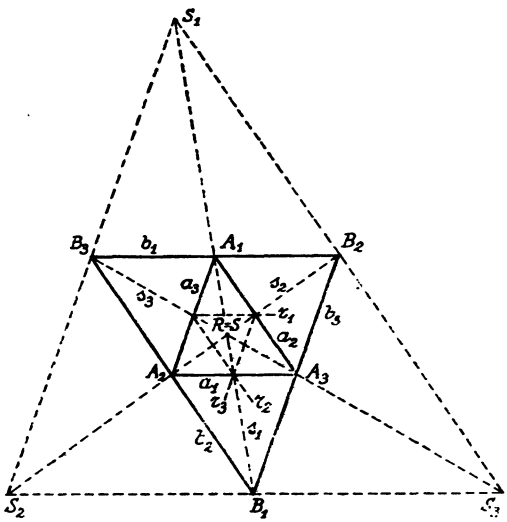

Fig. 2.

[7]) Se ne deduce in particolare che: *le tre omologie speciali Ω_i aventi per assi i lati di un triangolo (B_i), per centri i loro punti medi A_i e nelle quali alla retta $a_i = A_kA_l$ $(i \neq k \neq l = 1, 2, 3)$ corrisponde la retta impropria, sono in posizione omologica radiale.* Inoltre (nn. 7, 8): *le loro inverse sono in posizione omologica puntuale.*

Inoltre le (4.6) mostrano che:

Una delle tre Ω_i in posizione omologica radiale è involutoria ($k_i = -1$) *solo se il rispettivo asse passa per il punto R, polo armonico di r rispetto al triangolo* $A_1A_2A_3$,
cosicchè dualmente:

Una delle tre Ω_i in posizione omologica puntuale è involutoria solo se il rispettivo centro appartiene alla retta s polare armonica di S rispetto al trilatero $b_2b_1b_3$.

Dunque (v. fig. 3):

Tre omologie involutorie Ω_i con i centri A_i non allineati sono in posizione omologica radiale non banale solo se i loro assi b_i incontrano i lati a_i del triangolo dei centri in punti R_i distinti dai vertici ed allineati su di una retta r e concorrono nel polo armonico R di r rispetto al triangolo $A_1A_2A_3$ *dei centri.*

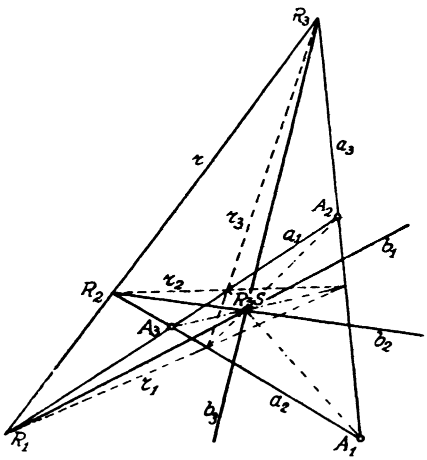

Fig. 3.

Dualmente (v. fig. 4):

Tre omologie involutorie Ω_i con gli assi b_i non concorrenti sono in posizione omologica puntuale non banale solo se loro centri A_i sono congiunti ai vertici B_i del trilatero degli assi da rette s_i distinte dai lati e concorrenti in un punto S e sono allineati sulla retta s polare armonica di S rispetto al trilatero $b_1b_2b_3$.

Come particolare aspetto metrico di quest'ultima configurazione si ottiene, trasformando con una omografia il triangolo $B_1B_2B_3$ in un triangolo equilatero ed S nel suo centro, il teorema citato nella introduzione sulla posizione omologica puntuale delle simmetria ortogonali rispetto ai lati di un triangolo equilatero.

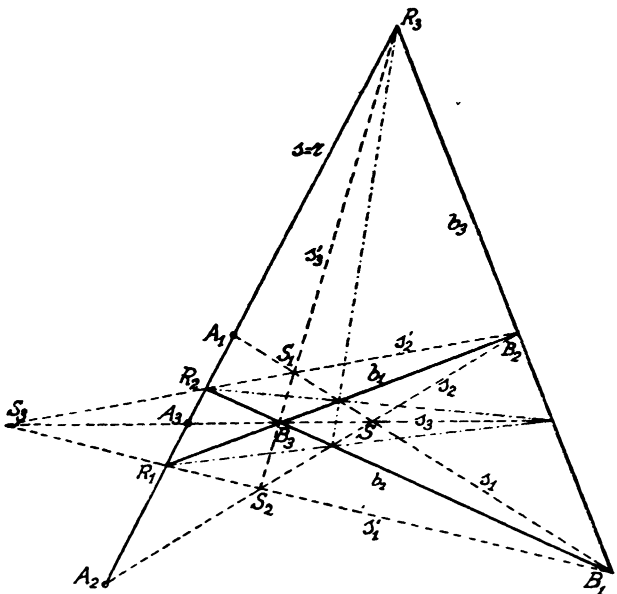

Fig. 4.

7. - Simultaneità della posizione omologica radiale diretta e puntuale inversa.

Dalla (4.6) risulta che la condizione affinchè i tre assi $b_1b_2b_3$ concorrano in un punto si scrive:

$$K \equiv 4k_1k_2k_3 - k_1 - k_2 - k_3 + 1 = 0 \tag{7.1}$$

e che le coordinate dei punti B_1, B_2, B_3 sono rispettivamente:

$$\left\{\begin{array}{lll} k_2 + k_3 - 1 : & k_2(1 - 2k_3) : & k_3(1 - 2k_2) \\ k_1(1 - 2k_3) : & k_3 + k_1 - 1 : & k_3(1 - 2k_1) \\ k_1(1 - 2k_2) : & k_2(1 - 2k_1) : & k_1 + k_2 - 1. \end{array}\right. \tag{7,2}$$

Cosicchè le coordinate del centro S d'omologia dei due triangoli $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ sono:

$$\frac{k_1}{2k_1-1}, \quad \frac{k_2}{2k_2-1}, \quad \frac{k_3}{2k_3-1}, \tag{7.3}$$

supposto naturalmente che gli assi $b_1b_2b_3$ non coincidano (con la retta r), ciò che accade appunto solo quando $k_1 = k_2 = k_3 = \frac{1}{2}$. Poniamo:

$$h_1 = \frac{1}{k_1}, \quad h_2 = \frac{1}{k_2}, \quad h_3 = \frac{1}{k_3}. \tag{7.4}$$

Allora le (7.3) si scrivono:

$$\frac{1}{2-h_1}, \quad \frac{1}{2-h_2}, \quad \frac{1}{2-h_3}.$$

Tenendo presenti le equazioni (4.6) degli assi b_i e *suppostili non concorrenti,* le formule di trasformazione dal sistema di coordinate proiettive $A_1A_2A_3R$ a quello $B_1B_2B_3S$ si scrivono, in coordinate di punto $(x \to z)$:

$$\begin{cases} z_1 = (h_1-1)x_1 + x_2 + x_3 \\ z_2 = x_1 + (h_2-1)x_2 + x_3 \\ z_3 = x_1 + x_2 + (h_3-1)x_3 . \end{cases} \tag{7.5}$$

ossia, invertendo $(z \to y)$:

$$\begin{cases} y_1 = (h_2h_3 - h_2 - h_3)z_1 + (2-h_3)z_2 + (2-h_2)z_3 \\ y_2 = (2-h_3)z_1 + (h_3h_1 - h_3 - h_1)z_2 + (2-h_1)z_3 \\ y_3 = (2-h_2)z_1 + (2-h_1)z_2 + (h_1h_2 - h_1 - h_2)z_3 . \end{cases} \tag{7.6}$$

D'altra parte, dalle (4.5) si ricava che le equazioni delle inverse delle Ω_i, nelle vecchie coordinate di punto, si scrivono:

$$\begin{cases} x_{11} : x_{12} : x_{13} = h_1y_1 + y_2 + y_3 : y_2 : y_3 \\ x_{21} : x_{22} : x_{23} = y_1 : y_1 + h_2y_2 + y_3 : y_3 \\ x_{31} : x_{32} : x_{33} = y_1 : y_2 : y_1 + y_2 + h_3y_3 . \end{cases}$$

e quindi, nelle nuove coordinate di punto, a norma delle (7.5), (7.6):

$$\begin{cases} z_{11}:z_{12}:z_{13} = h_1 z_1 : (z_1 + z_2) : (z_1 + z_3) \\ z_{21}:z_{22}:z_{23} = (z_2 + z_1) : h_2 z_2 : (z_2 + z_3) \\ z_{31}:z_{32}:z_{33} = (z_3 + z_1) : (z_3 + z_2) : h_3 z_3, \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} z_{11}:z_{12}:z_{13} = z_1 : k_1(z_1 + z_2) : k_1(z_3 + z_1) \\ z_{21}:z_{22}:z_{23} = k_2(z_1 + z_2) : z_2 : k_2(z_2 + z_3) \\ z_{31}:z_{32}:z_{33} = k_3(z_3 + z_1) : k_3(z_3 + z_2) : z_3. \end{cases} \tag{7.9}$$

Confrontando le (7.9) con le (4.5) e tenendo presente che la caratteristica puntuale k_i delle Ω_i coincide con quella radiale delle Ω_i^{-1}, si riconosce che:

Le inverse di tre omologie $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ con gli assi non concorrenti, i centri non allineati ed in posizione omologica radiale non banale sono in posizione omologica puntuale non banale. E viceversa.

E ciò, per quanto precede, equivale a dire che *nelle Ω_i ai punti B_i corrispondono i punti S_i.*

Sarebbe agevole provare che il teorema precedente sulla simultaneità della posizione omologica puntuale (diretta) e radiale (inversa) sussiste anche quando i tre centri delle Ω_i sono allineati, oppure i loro assi concorrono.

8. - Come sopra, per via sintetica.

Ai risultati conseguiti analiticamente nel n. 7, e sempre nel caso che i tre centri non siano allineati e i tre assi non siano concorrenti, si poteva facilmente pervenire anche per via sintetica, ad es. come segue, nel caso che nessuna delle Ω_i sia speciale.

Si tenga presente che condizione necessaria e sufficiente affinchè due triangoli non degeneri $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ siano omologici è che i vertici dell'uno corrispondano ai lati dell'altro in una polarità π, nella quale si corrispondono anche il centro S e l'asse r di omologia [8]).

La π scambia il centro A_i della Ω_i col suo asse b_i. Inoltre una coppia di punti P, Q allineati con A_i su una retta c

---

[8]) Tanto per la necessità quanto per la sufficienza si può dare una giustificazione elementare. trasformando prima omograficamente la figura (com'è lecito) in modo che acquisti particolari proprietà metriche. Così, per la sufficienza, vedi U. MORIN, *Lezioni di Geometria*, P. II (2ª ed., Padova, CEDAM, 1954) pag. 338.

Per la necessità si osservi anzitutto (vedi fig. 1), usando le stesse notazioni precedenti e dette R', R'', R''' le intersezioni rispettive dell'asse di omologia r con le rette s_1 s_2 s_3, che le coppie di punti R_1R', R_2R'', R_3R''' si corrispondono in una stessa involuzione I sulla retta r.

Quindi si trasformi con una omografia la retta r nella retta impropria e l'involuzione I nella involuzione assoluta. Allora la figura resta determinata a meno di una similitudine, i due triangoli $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ divengono omotetici e il loro centro di omotetia diviene il comune ortocentro S. Basta allora far vedere che i vertici dell'uno corrispondono ai lati dell'altro nella polarità relativa ad un determinato circolo Σ di centro S.

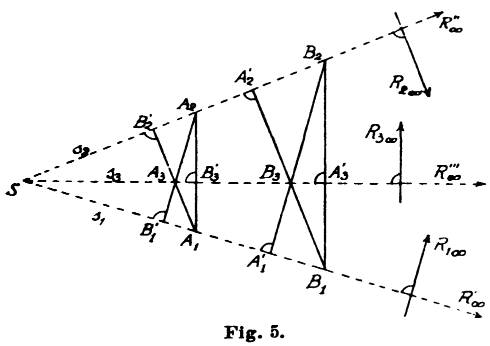

Fig. 5.

Ossia (v. fig. 5), detto B_i' il piede dell'altezza di $A_1A_2A_3$ relativa al vertice A_i ($i = 1, 2, 3$) e detto A_i' il piede dell'altezza di $B_1B_2B_3$ relativo al vertice B_i, si tratta di provare che le 6 coppie di punti A_iA_i', B_iB_i' ($i = 1, 2, 3$) si corrispondono in una medesima inversione di polo S (il cui circolo fondamentale sarà Σ). Ossia che:

$$SA_1 \cdot SA_1' = SB_1 \cdot SB_1' = SA_2 \cdot SA_2' = SB_2 \cdot SB_2' = SA_3 \cdot SA_3' = SB_3 \cdot SB_3'$$

E ciò consegue facilmente dalle ipotesi fatte (omotetia di $A_1A_2A_3$ e $B_1B_2B_3$, col centro nell'ortocentro comune).

e tali che, detta C la intersezione della loro congiungente c con b_i, sia $(A_iCPQ) = k_i$, viene trasformata dalla π in una coppia di rette p, q, concorrenti in un punto C' di b_i e tali che, detta c' la congiungente A_iC', sia $(b_i\, c'\, p\, q) = k_i$.

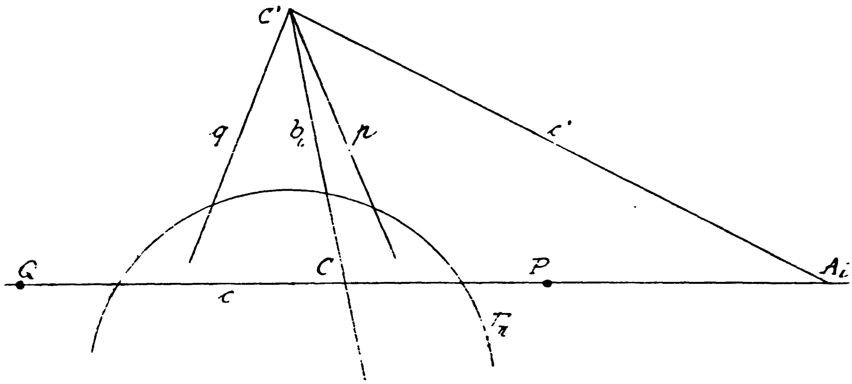

Fig. 6.

Dunque la π trasforma due punti corrispondenti nella Ω_i in due rette corrispondenti *nella inversa* della Ω_i, e viceversa.

Quindi tre rette g_1, g_2, g_3, corrispondenti di una stessa retta g nelle Ω_i, sono trasformate dalla π nei tre punti P_1^{-1}, P_2^{-1}, P_3^{-1} trasformati di un medesimo punto P nelle Ω_i^{-1} E se i due trilateri $a_1a_2a_3$, $g_1g_2g_3$ sono omologici, lo sono anche i triangoli $B_1B_2B_3$, $P_1^{-1}P_2^{-1}P_3^{-1}$, loro trasformati nella π. In altre parole, se le Ω_i sono in posizione omologica radiale, le Ω_i^{-1} sono in posizione omologica puntuale. E viceversa, c. v. d..

D'altra parte si poteva anche osservare che la π trasforma la retta r nel punto S, il polo armonico R di r rispetto ad $A_1A_2A_3$ nella polare armonica s di S rispetto a $b_1b_2b_3$, i punti R_i nelle rette s_i, e quindi le rette r_i nei punti S_i.

Dunque, poichè nella Ω_i alla retta r_i corrisponde la a_i, nella Ω_i^{-1} al punto S_i corrisponde quello B_i, ossia nella stessa Ω_i al punto B_i corrisponde quello S_i, c. v. d. (nn. 4, 7).

9. - Osservazioni particolari sulle terne di omologie involutorie in posizione omologica.

Da quanto precede, sempre nell'ipotesi che almeno uno dei due triangoli omologici $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ non degeneri, risulta che *per la contemporanea posizione omologica radiale e puntuale non banale delle tre Ω_i occorre e basta che esse siano involutorie.* Infatti allora ciascuna delle Ω_i è vincolata dalle condizioni (una delle quali consegue dall'altra) di contenere tanto la coppia involutoria di rette $r_i a_i$, quanto la coppia involutoria di punti $S_i B_i$. Nè, per la ipotesi fatta, queste due condizioni possono divenire entrambe inespressive.

Dunque, se le Ω_i sono contemporaneamente in posizione omologica radiale e puntuale ed i loro centri non sono allineati, i loro assi debbono concorrere (nel punto R), mentre se gli assi non sono concorrenti, i loro centri debbono essere allineati (sulla retta s).

Si noti che nel primo caso diviene meno espressiva (in quanto riguarda solo l'allineamento dei punti d'intersezione dei lati omologhi) la posizione omologica puntuale, mentre nel secondo caso diviene meno espressiva la posizione omologica radiale, che riguarda solo la concorrenza delle congiungenti i vertici omologhi.

In questo caso, trasformando con una omografia il triangolo $B_1B_2B_3$ in un triangolo equilatero ed S nel suo centro (dopo di che s diviene la retta impropria) si riconosce che (v. fig. 7):

Sulla retta s la involuzione I in cui si corrispondono i centri $A_1A_2A_3$ e le intersezioni $R_1R_2R_3$ degli assi delle Ω_i ha per punti uniti MN gli stessi della proiettività ciclica del 3° *ordine* $\pi = (A_1A_2A_3) = (R_1R\,R_3)$.

Nel particolare atteggiamento metrico M, N sono i punti ciclici. Presa una generica retta g e detti G, G_1', G_2', G_3' il suo punto d'intersezione con s ed i suoi corrispondenti nelle Ω_i (anch'essi appartenenti alla retta s) si riconosce facilmente che:

Anche la proiettività ciclica del 3° *ordine* $(G_1'G_2'G_3')$ *coincide con la* π.

Detti poi $G_1G_2G_3$ i vertici del trilatero $g_1g_2g_3$ e $G_1''G_2''G_3''$

i punti di intersezioni della s con le rette B_1G_1, B_2G_2, B_3G_3 concorrenti nel punto G_B, risulta che:

Anche le coppie di punti $G_1'G_1''$, $G_2'G_2''$, $G_3'G_3''$ si corrispondono nella involuzione I, ed anche la proiettività ciclica del 3° ordine $(G_1''G_2''G_3'')$ coincide con la π.

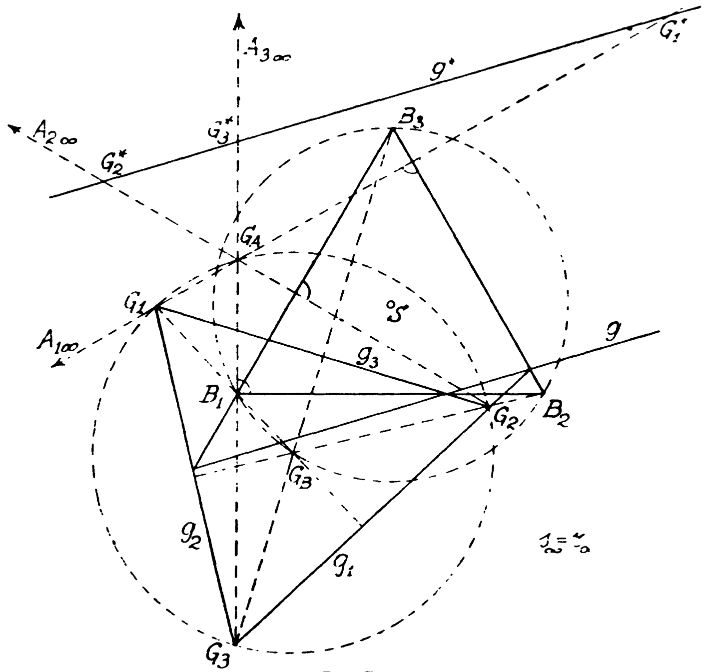

Fig. 7.

Ed infine:

I trasformati $G_1^*G_2^*G_3^*$ di G_1, G_2, G_3 nelle Ω_i sono allineati su di una retta g^* passante per il punto G.

Nel particolare atteggiamento metrico della fig. 7 ciò significa che:

Le rette $g_1g_2g_3$ simmetriche di una stessa retta g rispetto ai lati di un triangolo equilatero $B_1B_2B_3$ sono lati di un altro triangolo equilatero $G_1G_2G_3$, le cui altezze passano per B_1, B_2, B_3, cosicchè concorrono in un punto G_B del circolo circoscritto a $B_1B_2B_3$. In un punto G_A del circolo circoscritto a $G_1G_2G_3$ concorrono invece le perpendicolari abbassate da

G_1, G_2, G_3 *sui lati omonimi di* $B_1B_2B_3$. *Infine, i tre punti* G_1^*, G_2^*, G_3^* *simmetrici di* G_1, G_2, G_3 *rispetto a* b_1, b_2, b_3 *sono allineati su di una retta* g^* *parallela a* g.

Nel caso duale, di tre omologie involutorie Ω_i in posizione omologica, con i centri $A_1A_2A_3$ non allineati e (quindi) con gli assi $b_1b_2b_3$ concorrenti nel punto $R = S$, si ha:

Nel fascio di centro S la involuzione $\bar{I}$ in cui si corrispondono gli assi $b_1b_2b_3$ e le rette $s_1s_2s_3$ proiettanti i centri $A_1A_2A_3$ ha le stesse rette unite m, n della proiettività ciclica del 3° ordine $\pi^* = (b_1b_2b_3) = (s_1s_2s_3)$. La π^* coincide anche con la proiettività ciclica del 3° ordine $(p_1'p_2'p_3')$ essendo p_i' la congiungente S con i corrispondenti P_i nelle Ω_i di un medesimo punto P.

Dette p_i'' le rette congiungenti S con i punti di intersezione dei lati a_i del triangolo $A_1A_2A_3$ con quelli p_i del triangolo $P_1P_2P_3$, anche la proiettività ciclica del 3° ordine $(p_1''p_2''p_3'')$ coincide con la π^*, e nella involuzione I si corrispondono anche le coppie $p_i'p_i''$.

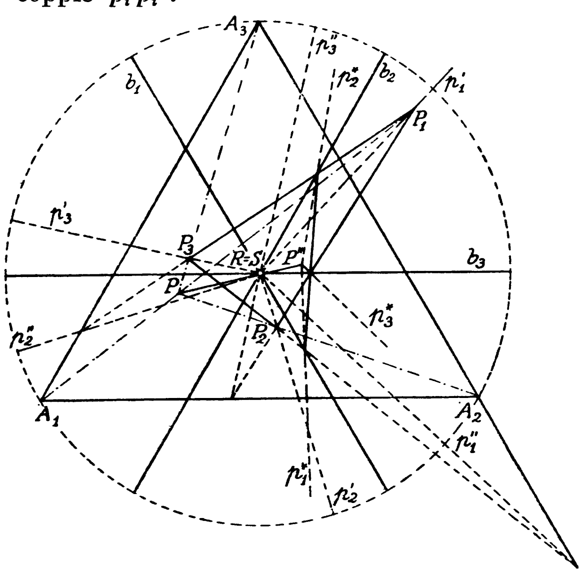

Fig. 8.

Infine le rette p_i^* trasformate delle p_i nelle Ω_i passano per un medesimo punto P^* della retta SP.

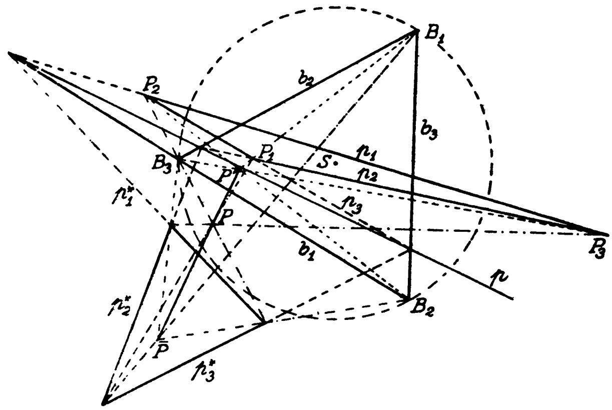

Fig. 9.

Si noti che, trasformato con una omografia il triangolo $A_1A_2A_3$ in un triangolo equilatero ed il punto $R = S$ nel suo centro, r diviene la retta impropria, m, n divengono le rette isotrope del fascio R, $\bar{I}$ la involuzione degli angoli retti, π^* una rotazione di 60^o (v. fig. 8).

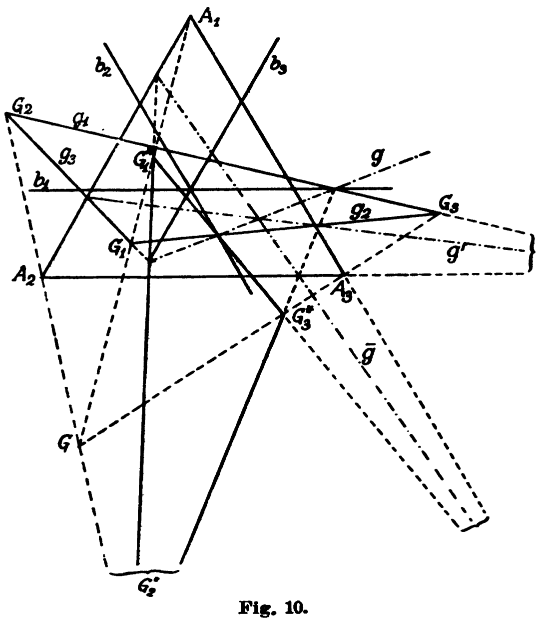

Fig. 10.

Nel caso di una terna di omologie involutorie Ω_i in posizione omologica e con gli assi b_i non concorrenti, detto $p_1p_2p_3$ il trilatero avente per vertici i trasformati P_i nelle Ω_i di un medesimo punto P e $p_1{}^*p_2{}^*p_3{}^*$ quello avente come lati le rette $p_i{}^*$ trasformate delle p_i nelle Ω_i, converrà osservare che:

I due trilateri (p_i) *e* $(p_i{}^*)$ *hanno come centro di omologia il punto* P.

È poi chiaro che, essendo i tre trilateri (b_i), (p_i), $(p_i{}^*)$ a due a due omologici, con lo stesso asse di omologia p, i centri P, P', $\bar{P}$ *di queste tre omologie risultano allineati.*

Le osservazioni duali valgono nel caso duale di una terna di omologie armoniche Ω_i in posizione omologica e con i centri A_i non allineati. Le figg. 9, 10 illustrano gli enunciati precedenti, nei casi particolari metrici già usati precedentemente.

Cap. II.

IL LUOGO DEI PUNTI I CUI OMOLOGHI SONO ALLINEATI E L'INVILUPPO DUALE

10. - Luogo dei punti i cui tre omologhi sono allineati e sua degenerazione.

È chiaro che, data una *qualsiasi* terna di omologie Ω_i con i centri A_i non allineati, il triangolo $P_1P_2P_3$ dei punti corrispondenti ad un medesimo punto P è sempre omologico a quello $A_1A_2A_3$. Inoltre: ***il luogo dei punti P per cui il triangolo $P_1P_2P_3$ degenera è una cubica Γ passante per i vertici $B_1B_2B_3$ del trilatero $b_1b_2b_3$ degli assi e per i punti R_i di intersezione di ciascun asse b_i col lato a_i del triangolo $A_1A_2A_3$ dei centri delle Ω_i.***

Infatti, assunto questo come fondamentale per il riferimento proiettivo, ed indicato con b_i il 1° membro della equazione dell'asse omonimo, le equazioni delle Ω_i si scrivono (n. 1):

$$(10.1) \qquad \begin{cases} y_{11}:y_{12}:y_{13} = b_1 + x_1 : x_2 : x_3 \\ y_{21}:y_{22}:y_{23} = x_1 : b_2 + x_2 : x_3 \\ y_{31}:y_{32}:y_{33} = x_1 : x_2 : b_3 + x_3 \end{cases}$$

e dunque l'equazione di Γ è:

$$(10.2) \quad \Gamma \equiv \begin{vmatrix} b_1 + x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & b_2 + x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & b_3 + x_3 \end{vmatrix} \equiv b_1b_2b_3 + x_1b_1b_2 + x_2b_3b_1 + x_3b_1b_2 = 0,$$

da cui l'asserto.

È anche chiaro che *la cubica* Γ *si spezza nella retta* r *di allineamento dei centri ed in una conica* γ (circoscritta al triangolo degli assi) *se i centri* A_i *sono allineati.*

In questo caso, assumiamo come lato $x_3 = 0$ del riferimento proiettivo la retta r, siano $A_i \equiv (1,\ n_i,\ 0)$ le coordinate dei centri e

$$b_i \equiv m_i x_1 - x_2 + l_i x_3$$

i primi membri delle equazioni degli assi delle Ω_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$. Allora le coordinate y_{ik} $(k = 1,\ 2,\ 3)$ del punto P_i corrispondente a $P(x_1 x_2 x_3)$ nella Ω_i sono:

$$(10.3)\quad y_{i1} : y_{i2} : y_{i3} = (n_i - m_i)x_1 + h_i b_i : (n_i - m_i)x_2 + h_i n_i b_i : (n_i - m_i)x_3$$

e l'equazione della conica γ si scrive:

$$(10.4)\quad \begin{vmatrix} (n_1 - m_1)x_1 + h_1 b_1 & (n_1 - m_1)x_2 + h_1 n_1 b_1 & n_1 - m_1 \\ (n_2 - m_2)x_1 + h_2 b_2 & (n_2 - m_2)x_2 + h_2 n_2 b_2 & n_2 - m_2 \\ (n_3 - m_3)x_1 + h_3 b_3 & (n_3 - m_3)x_2 + h_3 n_3 b_3 & n_3 - m_3 \end{vmatrix} = 0,$$

dove h_i è il complemento della caratteristica puntuale della Ω_i:

$$(10.5)\qquad h_i = (R_i P_i\,,\ b_i\,,\ R_i P,\ r).$$

Assumendo l'eventuale punto di concorso O come vertice (001) del riferimento, si riconosce che la conica γ degenera in una coppia di rette per O, se i tre assi b_i delle Ω_i concorrono in un punto.

Supponiamo che γ non sia tangente alla retta r, che le Ω_i non siano speciali, coi centri A_i distinti dai punti d'intersezione I, J di γ con r, e che distinti da questi siano anche i punti R_i di intersezione degli assi b_i con r.

Assunti come fondamentali per il riferimento i punti $I(100)$ e $J(010)$, ciò significa supporre finite le quantità m_i, n_i e tali che:

$$(10.6)\qquad m_1 m_2 m_3 n_1 n_2 n_3 (n_1 - m_1)(n_2 - m_2)(n_3 - m_3) \neq 0.$$

Inoltre, dovendo essere nulli i coefficienti di x_1^2, x_2^2 nella

(10.4), si ottiene:

$$
(10.7)\begin{cases}
\dfrac{(n_2-n_3)(n_1-m_1)}{m_1h_1}+\dfrac{(n_3-n_1)(n_2-m_2)}{m_2h_2}+\dfrac{(n_1-n_2)(n_3-m_3)}{m_3h_3}=0\\[2ex]
\dfrac{(n_2-n_3)(n_1-m_1)}{h_1}+\dfrac{(n_3-n_1)(n_2-m_2)}{h_2}+\dfrac{(n_1-n_2)(n_3-m_3)}{h_3}=0,
\end{cases}
$$

Supponendo infine distinti fra loro anche i punti A_i e quelli R_i, ossia

$$
(10.8)\quad (n_1-n_2)(n_2-n_3)(n_3-n_1)(m_1-m_2)(m_2-m_3)(m_3-m_1)\neq 0,
$$

le (10.7) equivalgono alle:

$$
(10.9)\quad h_1:h_2:h_3=\frac{(n_1-m_1)(n_2-n_3)}{m_1(m_2-m_3)}:\frac{(n_2-m_2)(n_3-n_1)}{m_2(m_3-m_1)}:\frac{(n_3-m_3)(n_1-n_2)}{m_3(m_1-m_2)}.
$$

Dunque: *fissati sulla retta r i punti* (distinti) *di intersezione I, J con γ, i centri A_i* (distinti fra loro e da I, J) *e i punti R_i* (di intersezione con gli assi; distinti fra loro, da quelli A_i e da I, J), *restano determinate a meno di un fattore le quantità h_i.*

Si noti che anche le quantità m_i, n_i occorrono nelle (10.9) a meno di un comune fattore (non nullo), ossia che *per determinare* (a meno di un fattore) *le h_i basta che i 6 punti A_i, R_i siano dati sulla r a meno di una proiettività con i punti uniti I, J.*

11. - Particolarizzazioni affini e metriche. Teorema di Poncelet.

Supponiamo ora che r sia la retta impropria, e quindi che siano affini le omologie non speciali Ω_i. Detto Q_i il punto d'intersezione della retta PP_i con l'asse b_i, si ha:

$$
h_i=(P_iQ_iP)=\frac{PP_i}{PQ_i}.
$$

Risulta così chiaramente il motivo della indeterminazione a meno di un fattore delle h_i: infatti una omotetia di centro P trasforma i tre punti allineati $P_1P_2P_3$ in altri tre punti pure allineati. Se poi fosse:

$$h_1 = h_2 = h_3 , \tag{11.1}$$

allora, e solo allora, risulterebbero allineati anche i tre punti Q_i, intersezioni con i lati b_i del triangolo $b_1b_2b_3$ delle congiungenti un punto P variabile su γ con i punti impropri fissi A_1, A_2, A_3.

Le (11.1), tramite le (10.9), forniscono:

$$\frac{(n_1-m_1)(n_2-n_3)}{m_1(m_2-m_3)} = \frac{(n_2-m_2)(n_3-n_1)}{m_2(m_3-m_1)} = \frac{(n_3-m_3)(n_1-n_2)}{m_3(m_1-m_2)} . \tag{11.2}$$

Supposte fissate le quantità m_i, ossia i punti impropri R_i delle rette b_i, le (11.2) sono soddisfatte solo per:

$$n_1 = n_2 = n_3 , \tag{11.3}$$

oppure:

$$\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_3}{m_3} . \tag{11.4}$$

Infatti, pensate ad es. $n_1n_2n_3$ come coordinate cartesiane non omogenee in un S_3, le (11.2) vi rappresentano una quartica, intersezione di due quadriche, le quali, oltre alle due rette (11.3), (11.4), hanno in comune solo la conica segata sul piano improprio dal cono:

$$m_1(m_2 - m_3)n_2n_3 + m_2(m_3 - m_1)n_3n_1 + m_3(m_1 - m_2)n_1n_2 = 0 ,$$

ed in questo caso le soluzioni improprie sono da scartare.

Poichè il caso dei tre centri A_i coincidenti è stato escluso, sono da scartare anche le (11.3) e rimangono solo le (11.4), che scritte:

$$n_i = tm_i \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{11.5}$$

fan vedere che i punti A_i si ottengono da quelli R_i trasformandoli con una medesima proiettività della retta r in se, coi punti uniti I, J.

Supposto che γ sia irriducibile, e quindi il triangolo $b_1 b_2 b_3$ non degenere, si trasformino omograficamente I, J nei punti ciclici. Si ha allora (fig. 11) il noto teorema di Poncelet [9]:

Dato un triangolo non degenere $b_1 b_2 b_3$, sia γ il circolo ad esso circoscritto. Affinchè le congiungenti un punto P variabile su γ con tre punti impropri distinti e fissi A_1, A_2, A_3 intersechino rispettivamente b_1, b_2, b_3 in tre punti Q_1, Q_2, Q_3 sempre allineati, occorre e basta che gli A_i si ottengano dai punti impropri R_i delle b_i con una medesima congruenza diretta.

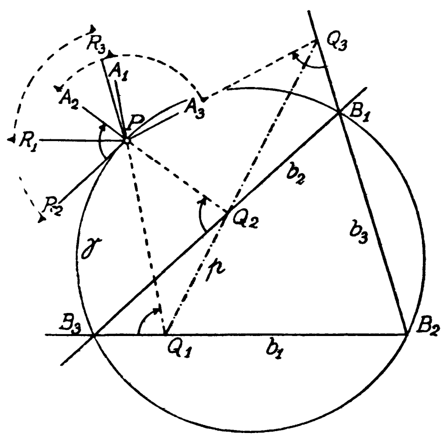

Fig. 11.

Abbastanza interessante è anche il seguente atteggiamento metrico delle proposizioni duali delle precedenti:

Dato un triangolo non degenere $A_1 A_2 A_3$, sia R un fuoco di una conica γ ad esso inscritta e sia p una tangente variabile di γ. Affinchè le tre intersezioni $P_1 P_2 P_3$ di p con tre rette distinte e fisse $b_1 b_2 b_3$ uscenti da R siano congiunte rispetti-

[9]) Cfr. nota [2]).

vamente ad $A_1A_2A_3$ *da tre rette* $p_1p_2p_3$ *sempre concorrenti, occorre e basta che le* b_i *si ottengano dalle* $r_i = RA_i$ *con una medesima rotazione attorno ad* R.

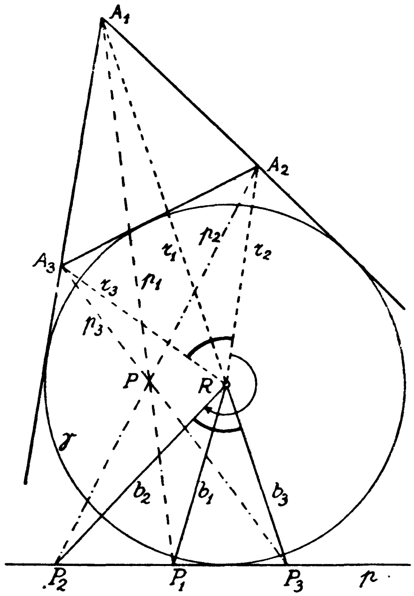

Fig. 12.

Nella fig. 12 γ è uno dei circoli exinscritti al triangolo (A_i) ed R è il suo centro.

12. - Il luogo del n. 10 e l'inviluppo duale, nel caso che le tre omologie siano in posizione omologica.

Da una terna *qualsiasi* di omologie Ω_i torniamo a considerare una terna di omologie Ω_i *in posizione omologica puntuale* non banale, col trilatero degli assi non degenere.

Sappiamo già che, assumendo come fondamentale per le coordinate proiettive $x_1x_2x_3$ il trilatero $b_1b_2b_3$ e come punto unità il centro S di omologia dei due triangoli $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, le Ω_i sono rappresentate dalle (7.9). Esse, indicando con y_{ik} le coordinate del punto P_i trasformato di $P(x)$ in

Ω_i e con k_i la sua caratteristica puntuale (quando Ω_i non è speciale, altrimenti $k_i = 1$), si scrivono:

$$(12.1)\qquad \left\{\begin{array}{l} y_{11}:y_{12}:y_{13} = \quad k_1x_1 \quad :x_1+x_2:x_1+x_3 \\ y_{21}:y_{22}:y_{23} = x_2+x_1: \quad k_2x_2 \quad :x_2+x_3 \\ y_{31}:y_{32}:y_{33} = x_3+x_1:x_3+x_2: \quad k_3x_3 \,. \end{array}\right.$$

Le coordinate dei centri A_i delle Ω_i sono:

$$(12.2)\qquad A_1(k_1-1,1,1)\,,\ A_2(1,k_2-1,1)\,,\ A_3(1,1,k_3-1)\,,$$

cosicchè, escludendo anche il caso banale [10]) che essi coincidano, si potrà supporre che le quantità k_i siano finite e tali da aversi:

$$(12.3)\qquad k_1k_2k_3(k_1-2)\,(k_2-2)\,(k_3-2) \neq 0\,.$$

Le coordinate dei punti $R_i = r \cdot a_i$ sono:

$$R_1(0,k_2-2\,,2-k_3),\ R_2(2-k_1\,,0\,,k_3-2),\ R_3(k_1-2\,,2-k_2\,,0),$$

ossia, posto, com'è lecito per la (12.3):

$$(12.4)\qquad l_i = k_i - 2 \qquad (i=1,\ 2,\ 3),$$

si ha

$$R_1(0\,,l_2\,,-l_3),\ R_2(-l_1\,,0\,,l_3),\ R_3(l_1\,,-l_2\,,0)$$

e l'equazione della retta r si scrive:

$$(12.5)\qquad \Gamma_1 \equiv l_2l_3x_1 + l_3l_1x_2 + l_1l_2x_3 = 0\,.$$

L'equazione:

$$(12.6)\qquad \Gamma_2 \equiv l_2l_3x_2x_3 + l_3l_1x_3x_1 + l_1l_2x_1x_2 = 0\,,$$

---

10) In quanto allora tutte le terne di punti $P_1P_2P_3$ sono allineate, cosicchè il luogo Γ svanisce.

rappresenta la conica Γ_2 per $B_1B_2B_3$, trasformata della retta r nella trasformazione quadratica involutoria Q avente $B_1B_2B_3$ come triangolo fondamentale ed uniti i punti S, S_1, S_2, S_3.

La condizione di allineamento dei centri $A_1A_2A_3$ è:

$$(12.7)\quad K \equiv \begin{vmatrix} k_1-1 & 1 & 1 \\ 1 & k_2-1 & 1 \\ 1 & 1 & k_3-1 \end{vmatrix} \equiv k_1k_2k_3-(k_2k_3+k_3k_1+k_1k_2)+4 \equiv$$
$$\equiv l_1l_2l_3 + l_2l_3 + l_3l_1 + l_1l_2 = 0 .$$

Infine la cubica Γ luogo dei punti P i cui omologhi P_i sono allineati ha per equazione:

$$(12.8)\qquad \Gamma \equiv \begin{vmatrix} k_1x_1 & x_1+x_2 & x_1+x_3 \\ x_2+x_1 & k_2x_2 & x_2+x_3 \\ x_3+x_1 & x_3+x_2 & k_3x_3 \end{vmatrix} \equiv$$
$$\equiv [k_1k_2k_3 - 2(k_1+k_2+k_3)+4]x_1x_2x_3 -$$
$$- l_1x_1(x_2^2+x_3^2) - l_2x_2(x_3^2+x_1^2) - l_3x_3(x_1^2+x_2^2) = 0 ,$$

e si verifica facilmente, tenendo presenti le (12.4), ..., (12.8), che sussisti l'identità:

$$(12.9)\qquad l_1l_2l_3\Gamma \equiv K^2x_1x_2x_3 - \Gamma_1\cdot\Gamma_2 .$$

Dunque Γ appartiene al fascio Σ individuato dalla cubica spezzata nei tre assi $b_1b_2b_3$ delle Ω_i e dall'altra cubica spezzata nella retta r e nella conica Γ_2. Sicchè Γ *passa per i punti* $R_1R_2R_3$ *e tocca la* Γ_2 *nei punti* $B_1B_2B_3$.

Fissati i punti $B_1B_2B_3$, la retta r ed il punto S, il fascio Σ resta determinato e determinati a meno di un fattore comune restano anche, a norma della (12.5), i parametri $l_1l_2l_3$. La cubica Γ varia in Σ al variare di questo fattore, ossia al variare, sulla rispettiva s_i, di uno dei centri A_i, la cui posizione determina quella degli altri due A_k, A_l.

Se A_i cade su r (e quindi vi cadono anche A_k, A_l), ossia se i tre centri sono allineati su r, ossia se $K=0$, allora dalla (12.9) risulta che Γ si spezza nella retta r e nella conica Γ_2.

Viceversa, se Γ si spezza in una retta non passante per $B_1B_2B_3$ ed in una conica, questa (dovendo passare per $B_1B_2B_3$ ed ivi toccare Γ_2) coincide necessariamente con Γ_2 e quindi la retta coincide con r. Inoltre $K = 0$, ossia i tre centri $A_1A_2A_3$ delle Ω_i sono allineati (sulla retta r).

Dualmente:

L'inviluppo delle rette g le cui tre associate $g_1g_2g_3$ (in una terna di omologie Ω_i in posizione omologica radiale non banale, col triangolo $A_1A_2A_3$ dei centri non degenere) *concorrono in un punto, è un inviluppo $\bar{\Gamma}$ di 3ª classe, della schiera individuata dall'inviluppo spezzato nei tre fasci A_1, A_2, A_3 e da quello spezzato nel punto S e nella conica inviluppo $\bar{\Gamma}_2$ trasformata del fascio S nulla involuzione quadratica $\bar{Q}$ del piano rigato, col trilatero fondamentale $a_1a_2a_3$ ed unite le rette r, r_1, r_2, r_3.*

Solo se i tre assi concorrono l'inviluppo $\bar{\Gamma}$ si spezza nel loro punto di concorso S e nella conica inviluppo $\bar{\Gamma}_2$.

13. - Come sopra, nel caso involutorio.

Quando le Ω_i sono involutorie, in posizione omologica, col trilatero $b_1b_2b_3$ degli assi non degenere, e quindi coi centri allineati sulla retta $s = r$, trasformando con una omografia il triangolo $B_1B_2B_3$ in un triangolo equilatero ed il punto S nel suo centro, Γ_2 diviene il circolo circoscritto al triangolo $B_1B_2B_3$. Le rette, sulle quali sono allineati i punti $P_1P_2P_3$ corrispondenti nelle Ω_i ad un medesimo punto P di Γ_2, descrivono, al variare di P, il fascio avente per centro il centro S del triangolo $B_1B_2B_3$ [11]).

Nel caso involutorio duale, trasformati omograficamente in un triangolo equilatero il triangolo non degenere $A_1A_2A_3$ e nel suo centro il punto $R = S$ di concorso degli assi, $\bar{\Gamma}_2$

[11]) Più in generale (cfr. n. 11), preso un qualsiasi triangolo non degenere $B_1B_2B_3$, i simmetrici $P_1P_2P_3$ rispetto ai suoi lati di un punto P del circolo circoscritto sono allineati su di una retta p, variabile con P attorno all'ortocentro H del triangolo $B_1B_2B_3$ (vedi fig. 13).

diviene il circolo inscritto in $A_1A_2A_3$. Le omologhe $g_1g_2g_3$ di una retta g tangente a $\overline{\Gamma}_2$ sono parallele, e la loro direzione varia con g [12]).

---

[12]) Più in generale (cfr. n. 20), preso un triangolo *non degenere* arbitrario $A_1A_2A_3$, dette $l_1l_2l_3$ le tangenti (ad una conica inscritta, ad es.) al circolo inscritto γ parallele ai lati $a_1a_2a_3$ (e da essi distinte) e dette G_1, G_2, G_3 le intersezioni di $l_1l_2l_3$ con una qualsiasi retta g tangente a γ, le rette A_1G_1, A_2G_2, A_3G_3 risultano parallele e la loro

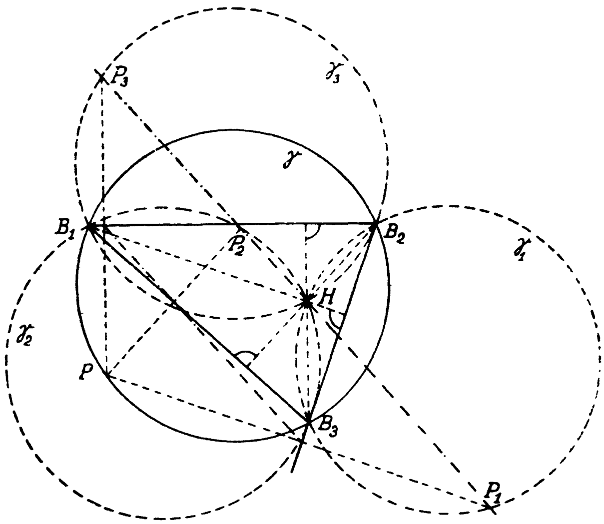

Fig. 13.

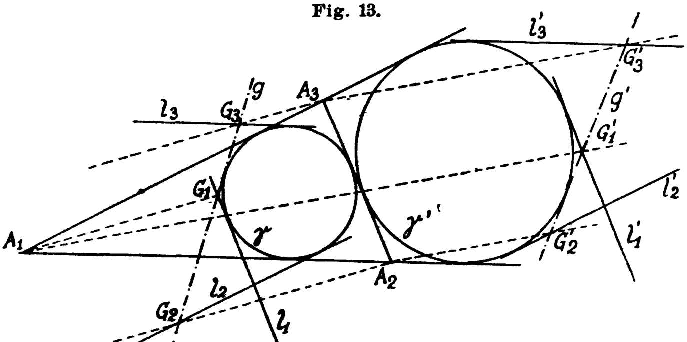

Fig. 14.

direzione varia con g. Dunque in ogni terna di omologie Ω_i con i centri A_i e nelle cui inverse siano rette limiti le l_i, le trasformate $g_1g_2g_3$ di una stessa tangente g di γ sono parallele ed il loro punto improprio varia con g (vedi fig. 14).

14. - Caratterizzazioni proiettive della conica Γ_2.

Si tenga presente che le tre tangenti $t_1 t_2 t_3$ nei punti $B_1 B_2 B_3$ di una conica Γ_2 incontrano i lati opposti $b_1 b_2 b_3$ del triangolo inscritto $B_1 B_2 B_3$ in tre punti allineati su di una retta $\bar{r}$.

Infatti la polarità armonica π rispetto al triangolo $B_1 B_2 B_3$, che è una trasformazione quadratica del piano punteggiato nel piano rigato i cui triangolo e trilatero fondamentali coincidono col triangolo dato, trasforma Γ_2 in un fascio di rette $\bar{R}$, cui appartengono anche le rette immagini dei punti di Γ_2 prossimi a quelli B_i, ossia le coniugate armoniche delle t_i rispetto a b_k, b_l $(k \neq l \neq i = 1, 2, 3)$. Da ciò l'asserto, con la precisazione che $\bar{r}$ è la polare armonica di $\bar{R}$ rispetto a $B_1 B_2 B_3$.

Ritorniamo ora al caso generale, non involutorio, di una terna di omologie Ω_i in posizione omologica puntuale non banale. Sia $b_1 b_2 b_3$ il trilatero, non degenere, dei loro assi e sia S il centro della omologia Ω di asse r che lega il triangolo $B_1 B_2 B_3$ con quello $A_1 A_2 A_3$ dei loro centri, (eventualmente allineati ma *distinti*). Sia inoltre Q la trasformazione quadratica involutoria del piano punteggiato avente il triangolo fondamentale $B_1 B_2 B_3$ ed S, S_1, S_2, S_3 come punti uniti [13]). Indichiamo con s_1', s_2', s_3' i lati del triangolo $S_1 S_2 S_3$, passanti rispettivamente per $B_1 B_2 B_3$.

Si tenga presente che Γ_2 è la trasformata di r nella Q e che quindi il punto di Γ_2 prossimo a B_i è il trasformato di quello di r prossimo ad $R_i = r \cdot b_i$. Ossia che le rette $B_i R_i$, t_i separano armonicamente quelle s_i, s_i', unite nella Q.

D'altra parte, detto R' il polo armonico di r rispetto a $B_1 B_2 B_3$, le rette $B_i R'$ e $B_i R_i$ separano armonicamente le b_k, b_l $(k \neq l \neq i = 1, 2, 3)$, come quelle s_i, s_i'.

Pertanto anche le rette $B_i \bar{R}$, $B_i R'$ separano armonicamente quelle s_i, s_i', ossia $\bar{R}$ ed R' si corrispondono nella Q.

Per convincersene si pensi che b_k, b_l siano (state trasfor-

---

13) Per la definizione dei punti S_i cfr. l'ultimo alinea del n. 4.

mate) nelle rette isotrope per B_i. Allora s_i, s_i' sono ortogonali, come la $B_i\overline{R}$ e la t_i, mentre la B_iR_i è la simmetrica della t_i rispetto ad s_i, s_i' e la B_iR' è la ortogonale alla B_iR_i.

Dunque (v. fig. 15) anche la $B_i\overline{R}$ e la B_iR' sono simmetriche rispetto ad s_i, s_i', c. v. d.

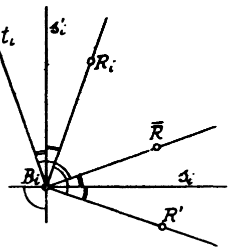

Fig. 15.

Infine r ed $\bar{r}$ si corrispondono nella corrispondenza $\overline{Q}$ trasformata della Q mediante la π:

$$Q\left(\begin{array}{ccc} R' & \overset{\pi}{\longleftrightarrow} & r \\ \overline{R} & \underset{\pi}{\longleftrightarrow} & \bar{r} \end{array}\right)\overline{Q}$$

Pertanto, nel fascio B_i, le tre coppie di rette B_iR_i, B_iR'; t_i, $B_i\overline{R}$; s_i, s_i' separano armonicamente la coppia b_k, b_l, mentre le tre coppie b_k, b_l; t_i, B_iR_i; $B_i\overline{R}$, B_iR' separano armonicamente la coppia s_i, s_i'.

La conica Γ_2 appartiene al fascio individuato dalle due coniche degeneri nelle due rette b_k, b_l e nelle altre due t_i, b_i. Dunque, segando con la retta r, la coppia di punti $\Gamma_2 \cdot r$ appartiene alla stessa involuzione cui appartengono le coppie R_kR_l; R_i, $t_i \cdot r$.

Per quanto precede i punti uniti di questa involuzione sono segati su r dalle rette s_i, s_i'. Se ne deduce che *i due punti* $\Gamma_2 \cdot r$ *sono i punti uniti della involuzione I cui appartengono tutte e tre le coppie segate sulla r dalle tre coppie di rette* s_i, s_i'.

Si noti che per ipotesi (n. 3) S non appartiene ai lati del triangolo $B_1B_2B_3$, giacchè, se ad es. appartenesse a b_1, all'asse b_1 della Ω_1 dovrebbero appartenere i centri A_2, A_3 delle Ω_2, Ω_3.

Dunque le tre rette s_i sono distinte fra loro e dalle s_i', anch'esse distinte fra loro. In altre parole la I non può essere parabolica se la retta r non passa per S, ossia: *la retta r è tangente* (in S) *a* Γ_2 *solo se r ed S si appartengono.*

Cap. III.

MODELLI METRICI, NEL CASO IN CUI NON SONO CONTEMPORANEAMENTE ALLINEATI I CENTRI E CONCORRENTI GLI ASSI

15. - Modelli affini del caso speciale in cui r ed S si appartengono e dei suoi casi limite.

Quando r ed S si appartengono, ossia Ω è speciale, con una omografia si può trasformare r nella retta impropria e (B_i) in un triangolo assegnato. Il triangolo (A_i) risulta allora uguale a quello (B_i), dal quale si ottiene con una traslazione di ampiezza determinata in una determinata direzione (quella del punto improprio S). Γ_2 diviene la parabola circoscritta a (B_i) col centro in S_∞. I punti S_i sono quelli medi dei segmenti intercettati dai lati del triangolo (B_i) sulle rette parallele $S_\infty B_i$.

Le rette r_i sono le congiungenti i punti medi dei lati del triangolo (A_i). Anche la conica inviluppo $\overline{\Gamma}_2$ è una parabola, quella col centro in S_∞ ed inscritta nel triangolo (A_i). Nella fig. 16 sono stati messi in evidenza il triangolo (P_i), omologico a quello (B_i), dei trasformati di un punto P nelle Ω_i ed il trilatero (g_i^{-1}), omologico a quello (A_i), delle rette trasformate di una retta g nelle Ω_i^{-1}.

Si osservi che il triangolo (B_i), la direzione di S e l'ampiezza e il verso della traslazione che porta (B_i) in (A_i) sono arbitrari.

Si ottiene così un modello metrico di ogni terna di omologie in posizione omologica puntuale (come le Ω_i) o radiale (come le Ω_i^{-1}), per le quali sia speciale la omologia Ω fra il triangolo degli assi e quello dei centri.

Si ottengono anche due notevoli teoremi di geometria del triangolo, che esprimono una particolarizzazione affine delle condizioni già viste nei nn. 4,5 (necessarie e sufficienti per

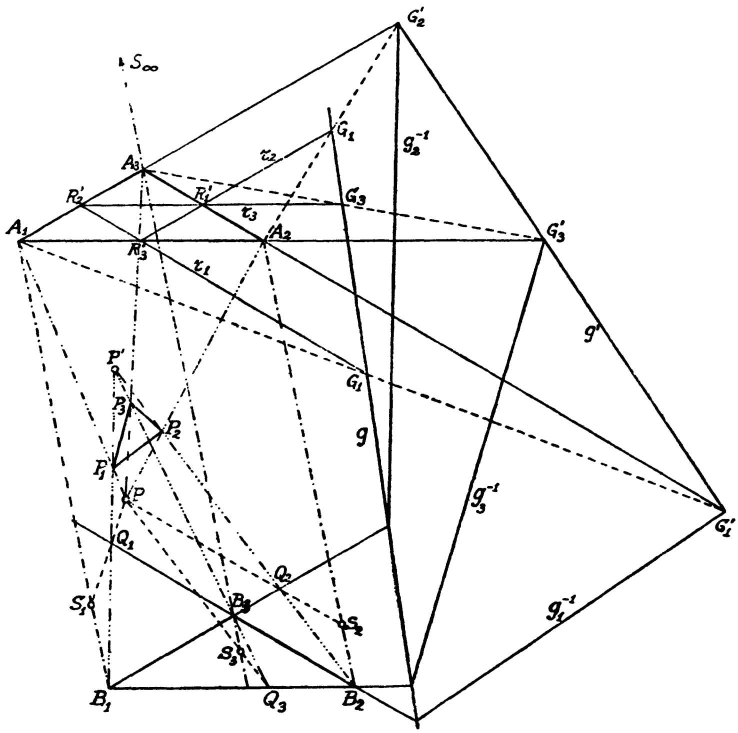

Fig. 16.

la posizione omologica) e si possono enunciare come segue:

I) *Dato un triangolo non degenere* (B_i) *ed una direzione* S_∞, *sia* S_i *il punto medio del segmento intercettato dai lati del triangolo sulla retta* B_iS_∞. *Preso un punto* P *qualsiasi del piano, sia* Q_i *la intersezione della retta* S_iP *col lato opposto a* B_i. *Allora le tre rette* B_iQ_i *concorrono in un medesimo punto* P'.

II) *Dato un triangolo non degenere* (A_i), *sia* r_i *la retta congiungente i punti medi dei lati concorrenti in* A_i. *Presa una qualsiasi retta* g *del piano, sia* G_i *il suo punto di intersezione con* r_i *e sia* G_i' *la proiezione di* G_i *fatta dal vertice*

A_i sul lato opposto del triangolo. Allora i tre punti G_i' sono allineati su di una retta g'.

L'importanza delle due coniche Γ_2, $\overline{\Gamma}_2$ è in parte sminuita (nell'ipotesi fatta che Ω sia speciale) dalla circostanza che il triangolo (A_i) non può degenerare senza che i punti A_i coincidano in S e quello (B_i) non può degenerare senza che le rette b_i coincidano con r.

Nel 1° caso non hanno più senso la considerazione dell'asse r della Ω (che degenera) e la posizione omologica radiale delle Ω_i^{-1}. Inoltre svanisce (in quanto invade tutto il piano) il luogo dei punti P in cui omologhi nelle Ω_i sono allineati.

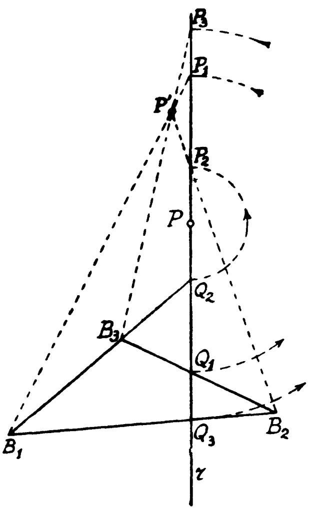

Fig. 17.

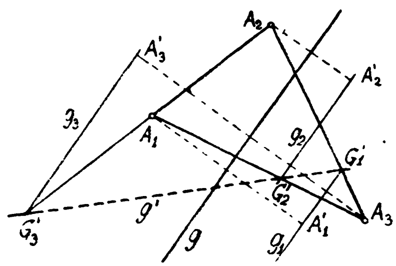

Fig. 18.

Nel 2° caso non hanno più senso la considerazione del centro S della Ω (ancora degenere) e la posizione omologica puntuale delle Ω_i.

Inoltre svanisce (in quanto invade tutto il piano) l'inviluppo delle rette g le cui omologhe nelle Ω_i^{-1} sono concorrenti.

Comunque nei due casi, che si possono considerare come limiti di quello in cui Ω è speciale e non degenere, supponendo sempre S od r impropri, la posizione omologica puntuale delle Ω_i o rispettivamente quella omologica radiale delle Ω_i^{-1} equivalgono ai seguenti teoremi di geometria del triangolo, illustrati dalle figg. 17, 18:

I') *Dati un qualsiasi triangolo non degenere* (B_i) *ed un punto* P *del suo piano, si conduca per* P *una retta arbitraria e si chiamino* Q_i *e* P_i *rispettivamente la sua intersezione col lato opposto a* B_i *ed il simmetrico di* Q_i *rispetto a* P. *Allora le tre rette* B_iP_i *concorrono in un medesimo punto* P'.

II') *Dati un qualsiasi triangolo non degenere* (A_i) *ed una retta* g *del suo piano, sia* A_i' *il simmetrico di* A_i *rispetto a* g. *La retta* g_i *parallela a* g *per* A_i' *incontra il lato opposto ad* A_i *in un punto* G_i'. *Allora i tre punti* G_i' *sono allineati su di una retta* g'.

16. - Modelli metrici reali delle terne di omologie in posizione omologica, col trilatero degli assi non degenere e *I* ellittica.

Nel caso in cui il triangolo (B_i) degli assi b_i delle Ω_i non sia degenere ed il punto S non appartenga ad r, da quanto s'è visto nel n. 14 risulta che con una omografia (reale, se la I è ellittica[14])) si può trasformare r nella retta impropria e la I nella involuzione assoluta. Con ciò Γ_2 diviene il circolo circoscritto al triangolo (B_i) ed R' il suo baricentro. Dopo di che *la figura resta determinata a meno di una similitudine.* Inoltre, dovendo le rette s_i, s_i' separare armonicamente quelle b_k, b_l ed essere ortogonali, necessariamente coincidono con le bisettrici degli angoli al vertice B_i del triangolo (B_i). In altre parole i 4 punti S, S_i divengono (in uno dei 4 modi possibili, determinato dalla configurazione delle tre omologie date) l'incentro e gli excentri del triangolo (B_i). Se ne deduce che (v. fig. 19):

---

14) La I è certamente ellittica quando le Ω_i sono (reali) ed involutorie (cfr. nn. 9, 17).

Quando la retta r ed il punto S non si appartengono, una terna di omologie Ω_i in posizione omologica puntuale non banale e col triangolo degli assi non degenere si può sempre trasformare con una omografia nella terna di omo-

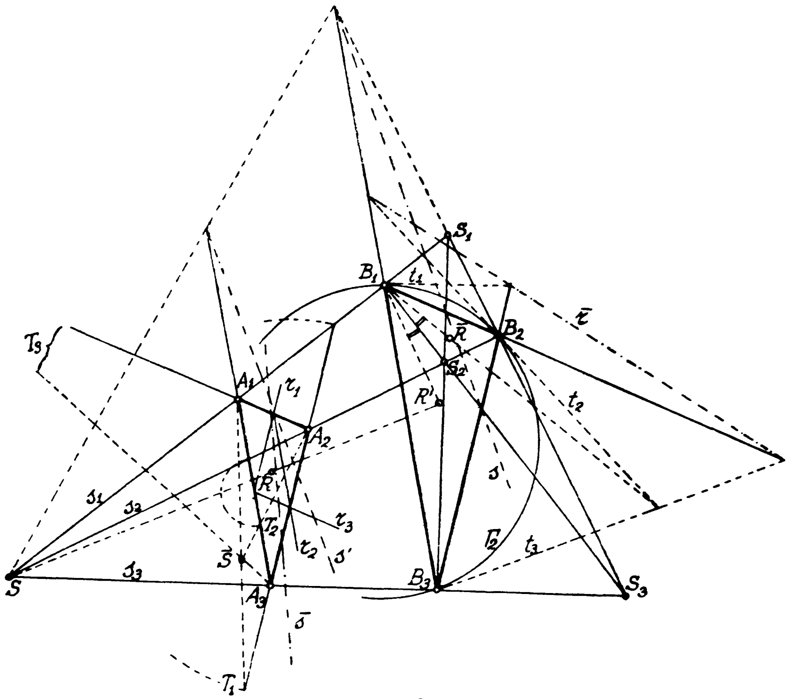

Fig. 19.

logie Ω_i aventi per assi b_i i lati di un triangolo (B_i) ed il triangolo dei centri (A_i) (eventualmente allineati, sulla retta impropria) omotetico a questo, col centro di omotetia S in uno dei centri dei 4 circoli inscritto ed exinscritti al triangolo (B_i). Allora, detto S_i quello dei centri degli altri tre circoli allineato con S e con B_i, nella Ω_i al punto S_i corrisponde quello B_i. Inoltre la conica Γ_2 diviene il circolo circoscritto al triangolo (B_i). Infine, il triangolo (B_i) e tutta la figura restano determinati a meno di una similitudine dalla terna di omologie data.

Viceversa risulta da quanto precede (nn. 3, 4) che, per ogni scelta del triangolo (B_i), di uno dei quattro punti S e del rapporto di omotetia, le suddette Ω_i sono sempre in posizione omologica puntuale, *le loro inverse in posizione omologica radiale* (nn. 7, 8) e la conica Γ_2 è il circolo circoscritto a (B_i).

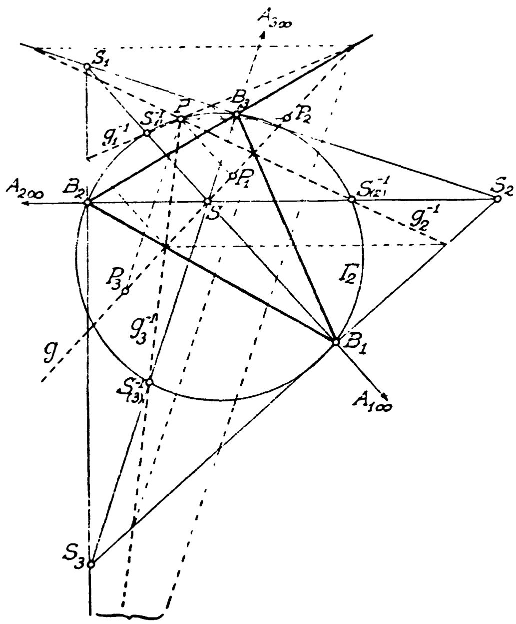

Fig. 20.

Ciò costituisce già un notevole teorema di geometria del triangolo.

Inoltre, al variare del triangolo (B_i) e del suo rapporto di omotetia con quello (A_i), la configurazione precedente fornisce un *modello metrico reale di ogni terna di omologie in posizione omologica (radiale o puntuale) non banale, i cui assi non siano concorrenti ed in cui la retta r ed il punto S non si appartengano e la involuzione I sia ellittica.*

In particolare supponiamo allineati (ossia impropri) i centri A_i delle Ω_i e teniamo presente che allora la componente propria della cubica Γ si riduce alla conica Γ_2 (n. 12). Se ne deduce il seguente teorema di geometria del triangolo (v. fig. 20):

Fissato uno S dei centri dei 4 circoli inscritti ad un triangolo (B_i), si chiami S_i quello degli altri tre allineato con S e con B_i. I tre trasformati P_i di un medesimo punto P del circolo Γ_2 circoscritto a (B_i), nelle omologie affini Ω_i aventi per assi i suoi lati b_i e nelle quali al punto S_i corrisponde B_i, sono allineati su di una retta g variabile con P.

Si verifica inoltre che: *al variare di P su Γ_2, le rette g descrivono il fascio di centro S,* e quindi che viceversa: *ad una retta g per S corrispondono nelle Ω_i^{-1} tre rette g_i^{-1} concorrenti in un punto P di Γ_2.*

Si osservi infine (fig. 20) che: *i tre punti $S_{(i)}^{-1}$ corrispondenti ad S nelle Ω_i^{-1} appartengono a Γ_2.*

17. - L'inviluppo $\overline{\Gamma}$ si spezza in tre fasci di rette quando Γ si spezza nella retta r e nella conica ${}_2\Gamma$.

Se in una terna di omologie Ω_i i corrispondenti P_i di un medesimo punto P sono allineati su di una retta g, allora le omologhe g_i^{-1} della g nelle Ω_i^{-1} concorrono in P. E viceversa.

Sia Γ il luogo dei punti P i cui omologhi P_i nelle Ω_i sono allineati, su di una retta $\bar{g}$ variabile con P, e sia $\overline{\Gamma}$ l'inviluppo delle rette g le cui omologhe g_i^{-1} nelle Ω_i^{-1} concorrono in un punto $\overline{P}$, variabile con g. L'osservazione precedente equivale a dire che:

Le rette $\bar{g}$ coincidono con le g ed i punti P con quelli $\overline{P}$.

D'altra parte, se le tre Ω_i sono in posizione omologica puntuale, le loro inverse Ω_i^{-1} sono in posizione omologica radiale.

Nei nn. precedenti abbiamo considerato il luogo Γ nel caso che il triangolo (B_i) degli assi b_i delle Ω_i (in posizione omologica puntuale) non fosse degenere e, dualmente, l'inviluppo $\overline{\Gamma}$ nel caso che non fosse degenere il triangolo (A_i) dei centri delle Ω_i^{-1} (in posizione omologica radiale). Ora possiamo aggiungere che:

Nel caso di tre omologie Ω_i^{-1} in posizione omologica radiale, con i centri A_i allineati su r ed il triangolo (B_i) degli assi non degenere, ciascuno dei due punti $M, N = \Gamma \cdot r$ ha i suoi *tre omologhi nelle* Ω_i *coincidenti, rispettivamente nei punti* M', N' *di* r. *Solo se le* Ω_i *sono involutorie* $M' = N$, $N' = M$. *Perciò l'inviluppo* $\overline{\Gamma}$ *si spezza nei tre fasci aventi per centri i punti* S, M', N'. E dualmente:

Nel caso di tre omologie Ω_i^{-1} *in posizione omologica puntuale, con gli assi* b_i *concorrenti in* S *ed il triangolo* (A_i) *dei centri non degenere, il luogo* Γ *si spezza nella retta* r *e nelle due rette* m', n' *comuni omologhe nelle* Ω_i *delle tangenti* m, n *a* $\overline{\Gamma}$ *per* S. *Solo se le* Ω_i *sono involutorie* $m' = n$, $n' = m$.

Infatti, nel 1° caso, ricordando che Γ si spezza nella conica Γ_2 e nella retta r e che ad un punto generico P di Γ_2 corrispondono nelle Ω_i tre punti P_i distinti ed allineati con S, mentre ad un punto generico Q di r corrispondono tre punti distinti Q_i della stessa r, se ne deduce che ad ognuno dei punti $\Gamma_2 \cdot r$ corrisponde nelle Ω_i un unico punto di r.

Sempre nello stesso caso, si osservi che: *se le* Ω_i *sono reali ed involutorie, i due punti* $M = N'$, $N = M'$ *sono immaginari e coniugati.* Analogamente, nel caso duale.

Infatti, riferendosi com'è lecito al modello delle simmetrie rispetto ai lati di un triangolo equilatero (B_i), si riconosce (n. 9) che su Γ_2 M ed N sono i punti uniti della proiettività ciclica del 3° ordine $(B_1B_2B_3)$.

D'altra parte è facile costruire esempi di terne di omologie Ω_i, reali ed in posizione omologica, con i centri allineati e gli assi non concorrenti, in cui la involuzione I sia *iperbolica,* cosicchè sono reali i tre fasci di rette di centri S, M', N' le cui omologhe nelle Ω_i^{-1} sono concorrenti.

18. - Costruzione dei centri dei fasci di cui sopra, quando I è iperbolica.

Per comodità, e com'è lecito, supponiamo impropria la retta r.

Fissata la configurazione degli assi b_i ed il punto S, restano determinati su r i punti $R_i = b_i \cdot r$, i centri $A_i = s_i \cdot r$

ed i punti $A_i' = s_i' \cdot r$ coniugati armonici di quelli A_i rispetto alle coppie R_k, R_l $(i \neq k \neq l = 1, 2, 3)$.

Le coppie $A_i R_i$ appartengono ad una stessa involuzione, come discende dalla considerazione del quadrangolo $SB_1B_2B_3$.

Anche le tre coppie $A_i A_i'$ appartengono ad una stessa invo-

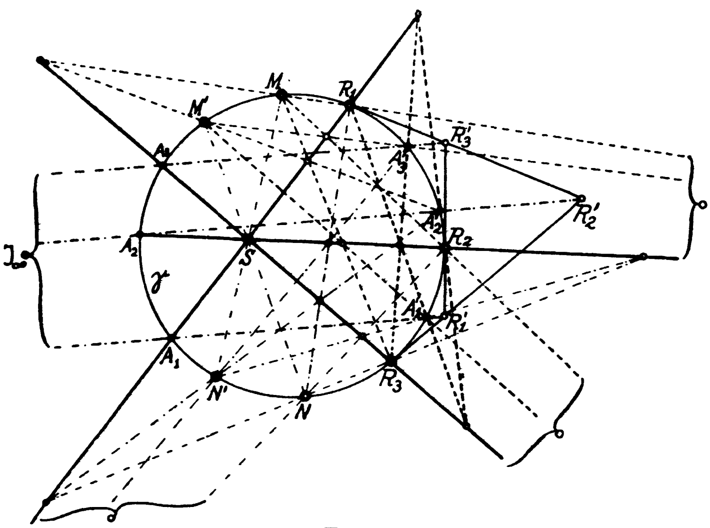

Fig. 21.

luzione I, avente per punti doppi M, N quelli comuni alla retta r e alla conica Γ_2 (n. 14).

Dette ω_i le proiettività subordinate dalle Ω_i sulla r, si ha:

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} R_1 A_1 A_2' A_3' \\ R_1 A_1 R_3 R_2 \end{pmatrix}, \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} R_2 A_2 A_3' A_1' \\ R_2 A_2 R_1 R_3 \end{pmatrix}, \quad \omega_3 = \begin{pmatrix} R_3 A_3 A_1' A_2' \\ R_3 A_3 R_2 R_1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre s'è visto che i punti M, N hanno gli stessi corrispondenti M', N' nelle tre ω_i.

Nella fig. 21 la circonferenza γ si pensa riferita prospettivamente (da un suo punto reale) alla retta impropria r. Così la corrispondenza tra le rette che da un suo punto *qualsiasi* proiettano i punti di γ e le direzioni dei punti impropri corrispondenti su r è *conforme*.

Alla scelta degli assi b_i corrisponde sulla γ la scelta dei punti $\bar{R}_i$ corrispondenti a quelli R_i. La scelta di S equivale a quella del polo $\bar{S}$ della involuzione in cui su γ ai punti $\bar{R}_i$ sono coniugati i corrispondenti $\bar{A}_i$ dei centri delle Ω_i.

Siano $\bar{R}_i'$ i vertici del trilatero circoscritto a γ nei punti $\bar{R}_i$. Allora *i punti* $\bar{A}_i'$ *sono le ulteriori intersezioni con* γ *delle rette* $\bar{R}_i'\bar{A}_i$, *che concorrono nel polo* $\bar{I}$ *della involuzione immagine della* I.

Dunque la I risulta iperbolica se $\bar{I}$ risulta *esterno* a γ ed i suoi punti doppi M, N hanno per immagini $\bar{M}, \bar{N}$ i punti di contatto delle tangenti a γ uscenti da $\bar{I}$.

Gli assi di collineazione delle immagini su γ delle ω_i sono le rette $\bar{R}_i\bar{A}_i$, concorrenti in $\bar{S}$, cosicchè *su di esse si intersecano le coppie di rette associate* $\bar{A}_k'\bar{R}_k$, $\bar{A}_l'\bar{R}_l$ $(i \neq k \neq l = 1, 2, 3)$ [15]).

---

15) Quanto è detto negli ultimi tre capoversi equivale ai seguenti teoremi della teoria delle coniche (v. fig. 22):

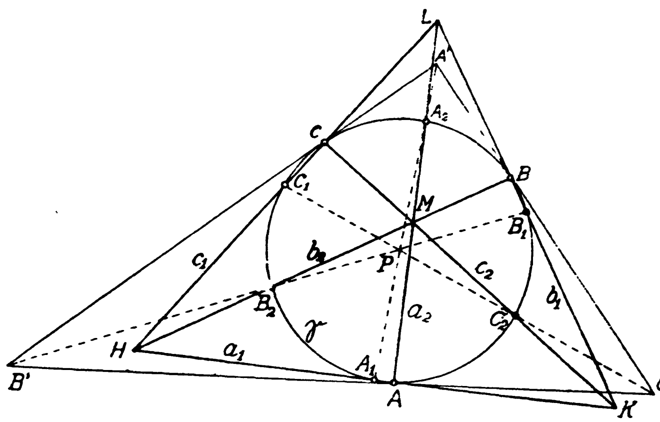

Fig. 22.

I) Dato un quadrangolo piano completo $HKLM$, sia γ una conica circoscritta al suo triangolo diagonale ABC, siano a_1, a_2; b_1, b_2; c_1; c_2 le sue coppie di lati opposti uscenti rispettivamente da A, B, C, e siano A_1, A_2: B_1, B_2; C_1, C_2 le loro ulteriori intersezioni con γ. Siano infine A', B', C' i vertici del trilatero circoscritto a γ nei punti A, B, C. Allora:

Le immagini dei punti $\overline{M}'\overline{N}'$ si potrebbero costruire sfruttando l'asse di collineazione di una qualunque delle ω_i. Dunque *su ciascuna delle tre rette* R_iA_i *si intersecano anche le* 4 *coppie di rette* $\overline{M}\overline{R}_k$, $\overline{M}'\overline{A}_l'$; $\overline{N}\overline{R}_k$, $\overline{N}'\overline{A}_l'$ $(i \neq k \neq l = 1, 2, 3)$.

D'altra parte la circostanza che M', N' non dipendono dall'indice i si traduce nel fatto che le due rette associate $\overline{M}\overline{N}'$, $\overline{M}'\overline{N}$ si intersecano nel punto S, comune a quei tre assi. Di qui la più semplice *costruzione di* $\overline{M}'$, $\overline{N}'$, *come ulteriori intersezioni con* γ *delle rette* $\overline{N}\overline{S}$, $\overline{M}\overline{S}$. Si tenga presente che nella fig. 21 sono state omesse le sopralineature delle lettere e che per la costruzione di M', N' non servono le rette tratteggiate che concorrono nei circoletti senza lettere.

Supposta r impropria ed avendo già fissato nel piano il punto S, il triangolo (B_i) ed il circolo γ, nel caso che $\overline{I}$ risulti esterno a γ *siamo dunque in grado di determinare le direzioni*:

1) *dei punti impropri* M, N *di* Γ_2;

2) *dei centri* M', N' *dei due fasci di rette parallele, di una delle quali le tre omologhe nelle* Ω_i^{-1} *concorrono rispettivamente in* M, N, *quando i centri delle* Ω_i *sono allineati.*

Le rette A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *passano rispettivamente per* A', B', C' *e concorrono in uno stesso punto* P.

Viceversa:

II) Data una conica γ ed un trilatero di vertici $A'B'C'$ ad essa circoscritto nei punti A, B, C, sia P un punto del piano e siano A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 le rispettive intersezioni con γ delle rette $A'P$, $B'P$, $C'P$. Allora *le tre coppie di rette* AA_1, AA_2; BB_1, BB_2; CC_1, CC_2 *sono le coppie di lati opposti di un quadrangolo piano completo* $HKLM$.

Si osservi che nella fig. 22 si è supposto (com'è sempre lecito, a meno di una omografia) che γ sia un circolo e P il suo centro. Allora la figura resta determinata a meno di una rotazione attorno a P. Inoltre il quadrangolo $HKLM$ risulta tale che uno qualsiasi dei suoi vertici è l'ortocentro del triangolo degli altri tre, e γ è il ben noto *circolo dei nove punti* di ciascuno di questi quattro triangoli. I nove punti sono A, A_1, A_2; B, B_1, B_2; C, C_1, C_2 (cfr. ad es. il n. 13 dell'articolo: «*La geometria del triangolo*» di V. RETALI e G. BIGGIOGGERO, citato nella Introduzione).

19. Modelli metrici reali delle terne di omologie in posizione omologica col triangolo degli assi non degenere e la I iperbolica.

Viceversa, proponiamoci di costruire un modello reale, valido per ogni terna di omologie Ω_i in posizione omologica puntuale nella quale la I sia iperbolica.

Si può dapprima supporre che i centri A_i delle Ω_i siano allineati sulla retta r e poi, fissata la configurazione degli assi b_i e determinato il punto S, si possono far scorrere i punti A_i sulle rette SB_i.

Ad arbitrio si potrà disporre nel piano il quadrangolo non degenere avente per lati gli assi b_i e la retta r. Sulla retta r si potranno poi scegliere i punti doppi (reali) M, N di I. La loro scelta corrisponde alla scelta dei due parametri essenziali da cui dipende (a meno di una omografia) la nostra configurazione.

Resteranno quindi determinati i punti B_i, la conica Γ_2 e, sulla retta r, i punti R_i.

Ciò equivale a dire che *si possono scegliere ad arbitrio la conica* Γ_2 *e, su di essa, i tre punti* B_i *ed i due* M, N, tutti reali. Inoltre, come vedremo tra poco, *occorre che i punti* B_i *appartengano tutti e tre ad uno soltanto dei due archi in cui* Γ_2 *è divisa dai due punti* M, N.

Supponiamo infatti, come nel n. 18, che la retta r sia impropria e riferiamola prospettivamente ad un fissato circolo γ. Su γ resteranno determinati i punti $\overline{M}$, $\overline{N}$, $\overline{R}_i$ e quindi si potranno costruire il punto I ed il triangolo (R_i') circoscritto a γ nei punti R_i. Le rette $\overline{I R_i'}$ segheranno γ nelle tre coppie di punti $\overline{A}_i$, $\overline{A}_i'$. Per il teorema II della nota [15]) del n. 18 vi sono quattro modi diversi ugualmente possibili per stabilire a quale dei due punti d'intersezione debba essere apposto l'apice. Fatta questa scelta (cfr. l'analoga scelta fatta al n. 16) resteranno determinati il punto S, i punti A_i sulla retta r ed il punto S, dove necessariamente debbono concorrere le rette A_iB_i.

Perchè la costruzione sia realmente possibile occorre che le rette $\overline{IR_i'}$ seghino γ in punti reali. Supponiamo, com'è lecito, che Γ_2 sia una iperbole equilatera. Allora (cfr. fig. 21) $\overline{M}$, $\overline{N}$

sono diametralmente opposti e $\bar{I}$ è il punto improprio della direzione normale ad MN. Le rette parallele $\bar{I}\bar{R}_i'$ segheranno *tutte e tre* γ in punti reali solo se il circolo γ è exinscritto al triangolo $(\bar{R}_i')$, ossia solo se i punti R_i stanno tutti e tre in uno soltanto dei semicircoli in cui γ è diviso dai due punti $\bar{M}\bar{N}$.

Si può supporre che γ passi per uno, ad es. B_1, dei punti B_i e che sia riferita ad r per proiezione da B_1. Le rette ortogonali $B_1\bar{M}$, $B_1\bar{N}$ sono parallele agli asintoti di Γ_2 ed i due rami di Γ_2 stanno ciascuno in uno degli angoli completi da esse determinati.

D'altra parte anche le rette $B_1\bar{R}_i$ stanno in uno solo di quegli angoli e, poichè i punti B_2 e B_3 sono le ulteriori intersezioni di Γ_2 con le $B_1\bar{R}_3$ e $B_1\bar{R}_2$, B_2 e B_3 appartengono allo stesso ramo di Γ_2. Lo stesso dicasi di B_3 e B_1, B_2 e B_1. Insomma, come volevamo dimostrare, i vertici B_i del triangolo degli assi quando I è iperbolica appartengono tutti e tre allo stesso ramo di Γ_2.

Si osservi che, essendo la retta $\bar{R}_i\bar{R}_k$ polare del punto $\bar{R}_l'$, il polo della retta $\bar{I}\bar{R}_l'$ è il punto comune alle due rette $\bar{M}\bar{N}$ ed $\bar{R}_i\bar{R}_k$.

Trasformiamo con una omografia la conica Γ_2 in un circolo γ fissato, cui risulta iscritto il triangolo (B_i), e riferiamo prospettivamente γ ad r dal centro B_1. Allora $\bar{R}_2 = B_3$, $\bar{R}_3 = B_2$ ed $\bar{R}_1'$ coincide col punto B_1' comune alle due tangenti a γ in B_2, B_3.

Si può, approfittando dei tre parametri da cui dipende ancora la scelta dell'omografia, fare in modo che la retta $\bar{I}\bar{R}'_1$ divenga un diametro assegnato di γ. Con ciò $\bar{R}_1$ diviene il punto improprio delle normali alla $\bar{I}\bar{R}_1'$.

Rimane un solo parametro a disposizione, del quale si può approfittare per porre B_2 in uno degli estremi del diametro di γ perpendicolare alla $\bar{I}\bar{R}_1'$, cosicchè B_3 va a cadere nell'altro estremo.

Si ottiene così (v. fig. 23) un particolare modello metrico della totalità ∞^3 delle terne di omologie Ω_i in posizione omologica, con gli assi non concorrenti e la involuzione I iperbolica. Restano infatti ancora arbitrarie:

1) la scelta del punto B_1, su γ.

2) la scelta di r, parallela a B_2B_3 e secante γ in due punti M, N appartenenti al semicerchio B_2B_3 di γ non contenente B_1; restano così determinati $\bar{I}$ e, in quattro modi diversi, il punto S e quello $\bar{S}$.

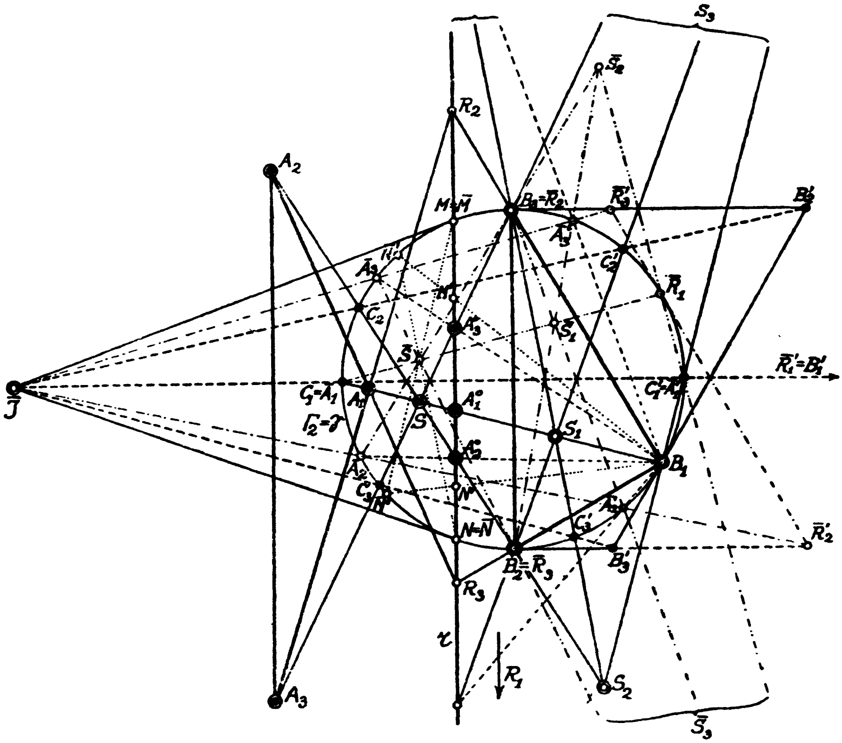

Fig. 23.

3) la scelta di uno dei centri A_i sulla SB_i, che determina la posizione degli altri due A_k, A_l.

Nella fig. 23 risulta chiaramente come la simmetria ortogonale rispetto alla retta $\bar{I}\bar{R}_1'$ trasformi il trilatero di vertici R_i' in quello di vertici B_i' circoscritto a Γ_2 nei punti B_i ed il quadrangolo $\bar{S}\bar{S}_i$ in quello SS_i. Ciò conduce ad una notevole semplificazione della costruzione del punto S, espressa dal seguente teorema, che del resto era già implicito in quanto detto al n. 16:

Si fissino la conica Γ_2 e, su di essa, i centri B_i delle Ω_i

ed i punti M, N. Siano $\bar{I}$ il polo della retta $r = MN$ e B_i' i vertici del trilatero circoscritto a Γ_2 nei punti B_i. Le rette $\bar{I}B_i'$ segano Γ_2 nelle tre coppie di punti C_iC_i'. Le tre coppie di rette B_iC_i, B_iC_i' sono lati opposti di uno stesso quadrangolo piano completo. Solamente uno (qualsiasi) dei suoi quattro vertici può assumersi come centro S dell'omologia di asse r che lega il trilatero $(b_i) = (B_i)$ degli assi ed il triangolo (A_i) dei centri delle Ω_i, che restano completamente determinate dalla successiva scelta di uno dei centri A_i.

20. - Modelli metrici reali delle terne di omologie in posizione omologica, col triangolo dei centri e la I^* non degeneri.

Il duale del teorema del n. 19 riguarda una terna di omologie Ω_i in posizione omologica radiale e con il triangolo (A_i) degli assi non degenere, le cui inverse Ω_i^{-1} sono dunque in posizione omologica puntuale, e può enunciarsi come segue:

Siano dati la conica inviluppo $\bar{\Gamma}_2$ e, tangenti ad essa, i lati a_i del triangolo (A_i) dei centri delle Ω_i e le rette m, n, intersecantesi in S. Le tre rette $s_i = SA_i$ segano $\bar{\Gamma}_2$ in tre coppie di punti, nei quali siano c_i, c_i' le tangenti. Le tre coppie di punti $R_i = a_i \cdot c_i$, $R_i' = a_i \cdot c_i'$ sono vertici opposti di uno stesso quadrilatero piano completo. Solo uno (del resto qualsiasi) dei suoi quattro lati può assumersi come asse r della omologia di centro S che lega il triangolo $(A_i) = (a_i)$ dei centri delle Ω_i al trilatero (b_i) dei loro assi. Le Ω_i restano completamente determinate dalla successiva scelta di uno degli assi b_i, nel fascio (R_i).

Anche questo teorema si può usare per costruire dei particolari *modelli metrici reali* della totalità ∞^3 delle terne omograficamente distinte di omologie in posizione omologica, col triangolo dei centri non degenere, ma *validi anche nel caso che gli assi siano concorrenti.*

Così nelle figg. 24, 25 si è assunto come conica $\bar{\Gamma}_2$ un circolo.

Volendo che la involuzione I^* risulti *iperbolica* occorrerà scegliere il punto S esterno a Γ_2 (fig. 24) ed i punti di contatto A_i' delle sue tre tangenti a_i dovranno appartenere (cfr. n. 18) ad un medesimo arco dei due individuati su $\overline{\Gamma}_2$ dai punti di contatto delle tangenti m, n uscenti da S.

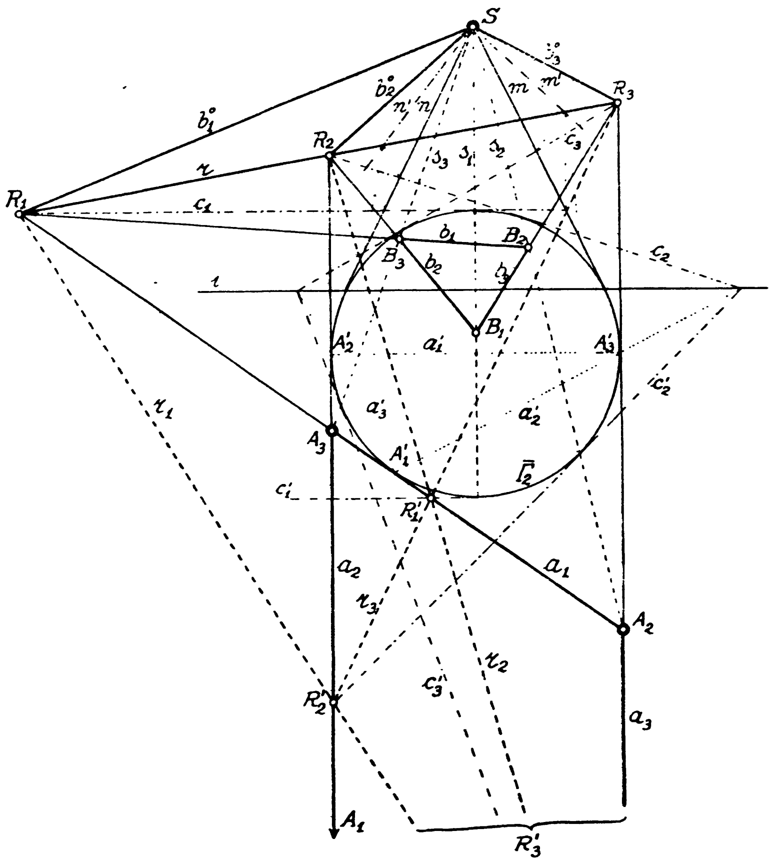

Fig. 24.

Se invece si vuole la I^* *ellittica*, S si dovrà scegliere interno a $\overline{\Gamma}_2$. Nella fig. 25 si è scelto come punto S addirittura il centro di $\overline{\Gamma}_2$, cosicchè la I^* è la involuzione degli angoli retti.

Si osservi che, *quando gli assi* b_i *sono concorrenti in* S (nelle figg. 24, 25 sono quelli b_i^0), nelle Ω_i^{-1} (in posizione omologica puntuale) alla retta r corrispondono le rette c_i. Si tenga anche presente che allora la cubica Γ luogo dei punti P i cui tre omologhi P_i^{-1} nelle Ω_i^{-1} sono allineati si spezza nella retta r e nelle altre due rette m', n' corrispondenti comuni di m, n nelle tre Ω_i.

Un punto P di r ha i suoi tre omologhi P_i^{-1} allineati su una tangente g a $\overline{\Gamma}_2$, variabile con g. Un punto P di m' (n') ha i suoi tre omologhi P_i^{-1} allineati sulla retta fissa m (n).

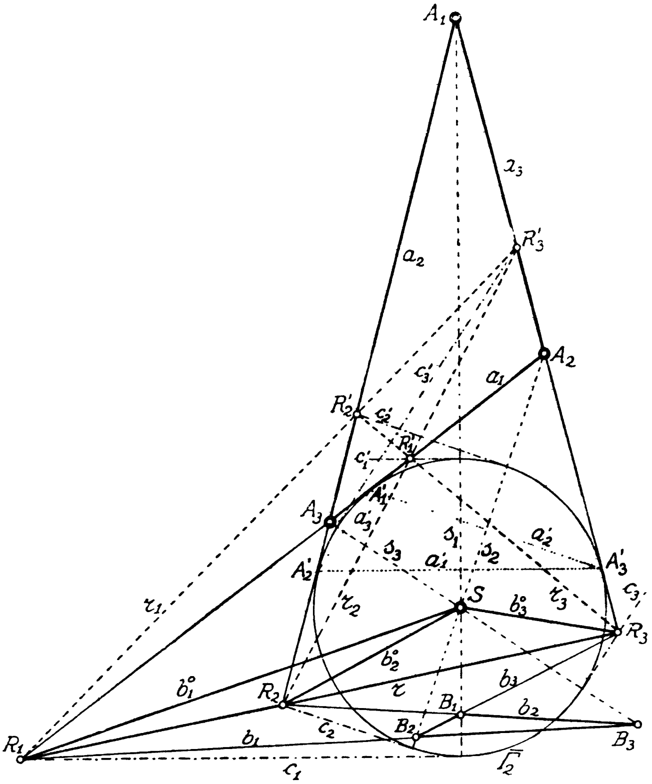

Fig. 25.

Viceversa una tangente g di $\overline{\Gamma}_2$ ha le sue tre omologhe g_i nelle Ω_i concorrenti in un punto P di r, variabile con g. D'altra parte è ovvio che una retta g per S (unito nelle tre Ω_i) ha le sue tre omologhe g_i concorrenti in S, che coincidono con m' od n' quando g coincide con m o rispettivamente con n.

Si ottengono così altrettante proprietà della configurazione costituita da un triangolo (A_i), da uno $\overline{\Gamma}_2$ dei suoi circoli inscritti e da un punto S del suo piano.

21. - Altro modello metrico reale, per il caso che la I^* sia ellittica.

Ad un'altra notevole classe di modelli metrici reali della totalità ∞^3 delle terne omograficamente distinte di omologie in posizione omologica, con il triangolo dei centri non dege-

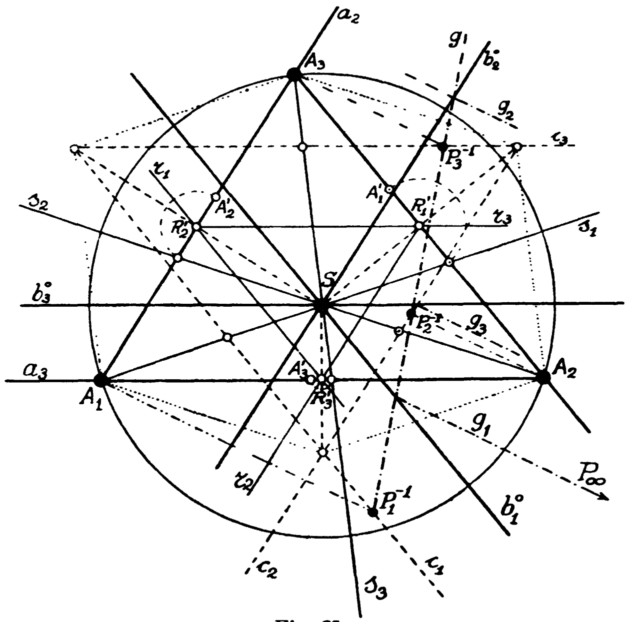

Fig. 26.

nere, validi anche quando gli assi siano concorrenti, si perviene come segue, nel caso che la I^* sia ellittica:

Dualizzando le considerazioni fatte al n. 14 si riconosce che le tre coppie di rette SR_i, SR_i' si corrispondono nella I^* e che, sul lato a_i, la coppia di punti R_i, R_i' separa armonicamente tanto la coppia A_k, A_l quanto quella A_i', $a_i \cdot s_i$.

Pertanto, trasformando con una omografia r nella retta impropria e le rette doppie m, n della I^* nelle rette isotrope uscenti da un punto S, S diviene il circocentro del triangolo (A_i), di cui R è il baricentro. Inoltre S è un fuoco della conica $\bar{\Gamma}_2$, che tocca ogni lato a_i nel punto A_i' simmetrico di quello $a_i \cdot s_i$ rispetto al suo punto medio R_i'. Infine la figura risulta determinata a meno di una similitudine (v. fig. 26, dove gli assi b_i^0 sono concorrenti).

Dunque *ogni terna di omologie* Ω_i *in posizione omologica radiale non banale con i centri non allineati e la* I^* *ellittica si può sempre trasformare, con una omografia reale, nella terna delle omologie* Ω_i *aventi per centri i vertici di un triangolo* (A_i) (determinato a meno di una similitudine) *ed il triangolo degli assi* (eventualmente degenere) *omotetico a questo, col centro di omotetia* S *nel circocentro di* (A_i). *Detta* r_i *la retta congiungente i punti medi dei lati uscenti da* A_i, *nella* Ω_i *alla retta* r_i *corrisponde il lato* a_i *opposto ad* A_i.

La $\overline{\Gamma}_2$ *è la conica (inviluppo) tangente ai lati del triangolo* (A_i), *con un fuoco in* S.

Viceversa risulta già da quanto precede (nn. 3, 4) che, per ogni scelta del triangolo (A_i) e del rapporto di omotetia, le suddette Ω_i sono sempre in posizione omologica radiale e le loro inverse in posizione omologica puntuale (nn. 7, 8).

La conica $\overline{\Gamma}_2$ diviene un circolo solo se S coincide con uno dei centri dei circoli inscritti in (A_i), e quindi necessariamente[16]) con l'incentro. Allora $\overline{\Gamma}_2$ è il circolo inscritto ad

---

[16]) Si pensino ad es. fissati il circolo circoscritto γ, di centro S ed i vertici A_1, A_3 del triangolo. Sia MN il diametro ortogonale alla corda A_1A_3, ossia l'asse del lato A_1A_3, contenente S. Si pensi il vertice A_2 variabile su γ; saranno A_2M, A_2N le bisettrici dell'angolo in A_2.

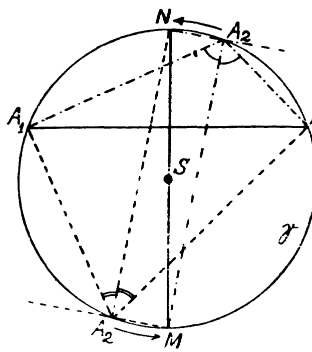

Fig. 27.

Perchè una di esse passi per S occorre [che A_2 sia allineato con M, S, oppure con N, S, ossia] che A_2 coincida con M o con N e che quindi quella bisettrice *coincida con l'asse* del segmento A_1A_3. Si tratta dunque della bisettrice *interna* (v. fig. 27).

(A_i), che risulta *equilatero,* concentrico ed omotetico al triangolo degli assi (b_i). Inoltre (v. fig. 28), se gli assi non concorrono in S, anche Γ_2 è un circolo, concentrico a $\overline{\Gamma}_2$.

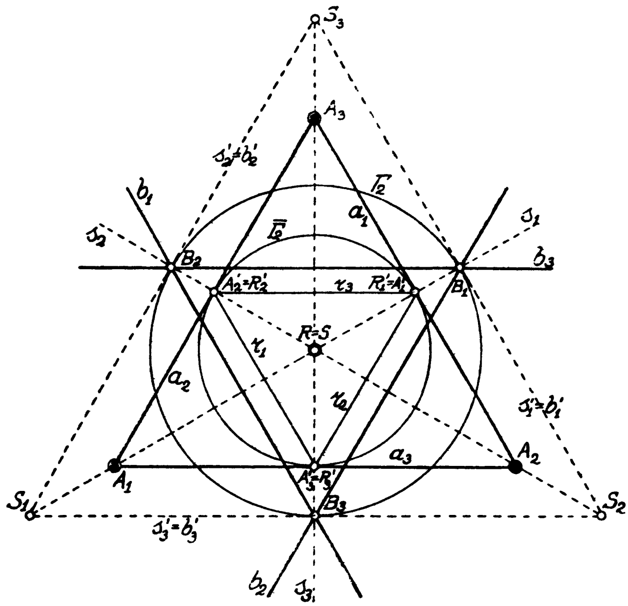

Fig. 28.

Lasciando da parte l'ipotesi che (A_i) sia equilatero, supponiamo infine che *gli assi* b_i *concorrano in* S. Allora *le rette limiti* c_i *delle* Ω_i^{-1} *sono tangenti a* $\overline{\Gamma}_2$ *e una tangente variabile* g *di* $\overline{\Gamma}_2$ *sega su di esse una terna di punti* P_i^{-1} *omologhi nelle* Ω_i^{-1} *di uno stesso improprio* P_∞, *variabile con* g. *Sicchè viceversa le tre omologhe* g_i *di* g *nelle* Ω_i *sono parallele* (*a* P_∞).

Nella fig. 26 si sono messi in evidenza anche i punti di contatto $c_i \cdot s_i$ delle c_i con $\overline{\Gamma}_2$.

CAP. IV.

IL CASO IN CUI I CENTRI SONO ALLINEATI E GLI ASSI CONCORRENTI

22. - Premesse algoritmiche - Uguaglianza delle caratteristiche.

Andiamo infine ad esaminare brevemente il caso finora escluso in cui contemporaneamente accade che *i tre centri* A_i *delle* Ω_i *sono allineati* su di una retta r *ed i loro tre assi* b_i *concorrono in un punto* R, non appartenente ad r.

Siano a_i le rette RA_i e B_i i punti $r \cdot b_i$.

Supponiamo anche che le Ω_i non siano speciali ed ammettiamo, com'è suggerito da ragioni di continuità (partendo ad es. dal caso già esaminato che i tre assi non concorrano in un punto) che *le tre coppie di punti* A_i, B_i *della retta* r (e quindi anche le tre coppie di rette a_i, b_i del fascio R) *si corrispondano in una stessa involuzione* I, *non degenere, di punti doppi* S, T.

Sia k_i la caratteristica puntuale della Ω_i. Assunti come fondamentali per il riferimento proiettivo puntuale i punti $R(001)$, $S(010)$, $T(100)$, sarà:

$$B_i = (1,\ m_i,\ 0)\,,\ A_i = (1, -m_i,\ 0)\,.$$

Per ottenere le equazioni della Ω_i, ossia per esprimere le coordinate y_{ik} del punto P_i in funzione di quelle x_i del punto P di cui è trasformato, basta esprimere:

1) che P, P_i, A_i sono allineati

2) che il birapporto delle quattro rette r, b_i, B_iP, B_iP_i è uguale a k_i.

In coordinate non omogenee $P(x, y)$, $P_i(x_i y_i)$, si ha:

$$\frac{y_i - y}{x_i - x} = -m_i, \quad \frac{y_i - m_i x_i}{y - m_i x} = k_i,$$

ossia:

$$\begin{cases} 2m_i x_i = (1 + k_i)m_i x + (1 - k_i)y, \\ 2m_i y_i = (1 - k_i)m_i^2 x + (1 + k_i)m_i y, \end{cases}$$

e quindi, in coordinate omogenee:

$$(22.1) \qquad \begin{aligned} y_{i1}:y_{i2}:y_{i3} = {} & [(1 + k_i)m_i x_1 + (1 - k_i)x_2]: \\ & :[(1 - k_i)m_i x_1 + (1 + k_i)x_2]m_i : 2m_i x_3 . \end{aligned}$$

Tenendo presente che, nelle ipotesi fatte, $k_i \neq \infty, 0, 1$, si può porre:

$$(22.2) \quad h_i = \frac{1+k_i}{1-k_i}, \ (h_i \neq -1, 1, \infty; h_i = 0 \text{ se } k_i = -1, \text{cioè } \Omega_i \text{ armonica}),$$

e quindi:

$$k_i = \frac{h_i - 1}{h_i + 1}, \quad \frac{2}{1 - k_i} = h_i + 1 .$$

Allora le equazioni della Ω_i si scrivono:

$$(22.3) \quad y_{i1}:y_{i2}:y_{i3} = (m_i h_i x_1 + x_2) : m_i(m_i x_1 + h_i x_2) : m_i(h_i + 1)x_3 .$$

Si verifica facilmente che *la cubica luogo dei punti P i cui omologhi P_i sono allineati non svanisce identicamente e si spezza nei tre lati r, s, t del triangolo RST appena $h_1 = h_2 = h_3$.*

Le Ω_i risulteranno in posizione omologica *puntuale* quando il trilatero di vertici $P_1P_2P_3$ risulti sempre omologico a quello (degenere) degli assi $b_1b_2b_3$, ossia quando risultino allineati i tre punti $Q_i = P_kP_l \cdot b_i$ $(i \neq k \neq l = 1, 2, 3)$.

Le coordinate del punto Q_1 si ottengono risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} y_2 = m_1 y_1 \\ \begin{vmatrix} y_1 & m_1 y_1 & y_3 \\ m_2 h_2 x_1 + x_2 & m_2(m_2 x_1 + h_2 x_2) & m_2(h_2+1)x_3 \\ m_3 h_3 x_1 + x_2 & m_3(m_3 x_1 + h_3 x_2) & m_3(h_3+1)x_3 \end{vmatrix} = 0, \end{cases}$$

da cui:

$$(22.4)\quad \begin{cases} y_1 : y_2 : y_3 = \\ = [m_2 m_3(m_3 h_2 - m_2 h_3)x_1^2 + (m_3^2 - m_2^2)x_1 x_2 + (m_3 h_3 - m_2 h_2)x_2^2] : \\ : m_1[m_2 m_3(m_3 h_2 - m_2 h_3)x_1^2 + (m_3^2 - m_2^2)x_1 x_2 + (m_3 h_3 - m_2 h_2)x_2^2] : \\ : x_3[m_2 m_3 \{ (m_1 + m_3)h_2 - (m_1 + m_2)h_3 - (m_2 - m_3) \} x_1 - \\ - \{ m_2(m_1 + m_3)h_2 - m_3(m_1 + m_2)h_3 + m_1(m_2 - m_3) \} x_2]. \end{cases}$$

Analogamente per Q_2, Q_3, le cui coordinate si ottengono da quelle di Q_1 permutando circolarmente gli indici, 1, 2, 3 nelle lettere m_i, h_i.

Per $x_1 = 0$, $x_2 x_3 \neq 0$ la condizione di allineamento di Q_1, Q_2, Q_3 fornisce [17]:

$$| m_3 h_3 - m_2 h_2 ,\ m_1(m_3 h_3 - m_2 h_2) ,$$
$$m_3(m_1 + m_2)h_3 - m_2(m_1 + m_3)h_2 + m_1(m_3 - m_2) \,| = 0 ,$$

e poichè sommando le righe si ottiene zero in corrispondenza alla 1ª e alla 3ª colonna, per l'annullarsi del determinante occorre e basta che sia zero anche la somma relativa alla 2ª colonna, ossia:

$$(22.5)\quad h_1 m_1(m_2 - m_3) + h_2 m_2(m_3 - m_1) + h_3 m_3(m_1 - m_2) = 0 .$$

Per $x_2 = 0$, $x_1 x_3 m_1 m_2 m_3 \neq 0$, la condizione di allineamento

---

17) Qui ed in seguito si è scritta solo la 1ª riga di un determinante le cui righe successive si ottengono dalla prima permutando circolarmente gli indici 1, 2, 3 nelle lettere m_i. h_i.

di Q_1, Q_2, Q_3 si scrive:

$$\begin{vmatrix} m_2m_3(m_3h_2 - m_2h_3), & m_1m_2m_3(m_3h_2 - m_2h_3), \\ m_2m_3\{(m_1 + m_3)h_2 - (m_1 + m_2)h_3 - (m_2 - m_3)\} \end{vmatrix} = 0,$$

ossia, sopprimendo il fattore comune $m_1m_2m_3$ dalla 2ª colonna, moltiplicando la riga i-esima per m_i e sopprimendo poi dalla 1ª e 3ª colonna il fattore comune $m_1m_2m_3$:

$$\begin{vmatrix} m_3h_2 - m_2h_3, & m_1(m_3h_2 - m_2h_3), \\ (m_1 + m_3)h_2 - (m_1 + m_2)h_3 - (m_2 - m_3) \end{vmatrix} = 0.$$

È poichè anche ora, sommando le righe, si ottiene zero in corrispondenza della 2ª e 3ª colonna, occorre e basta che sia zero anche la somma degli elementi della 1ª colonna, ossia:

$$(22.6) \qquad h_1(m_2 - m_3) + h_2(m_3 - m_1) + h_3(m_1 - m_2) = 0.$$

Dalle (22.5), (22.6) si ricava:

$$h_1(m_2-m_3):h_2(m_3-m_1):h_3(m_1-m_2)=(m_2-m_3):(m_3-m_1):(m_1-m_2),$$

ossia (essendo distinti gli assi delle Ω_i, cioè avendosi $(m_2 - m_3)(m_3 - m_1)(m_1 - m_2) \neq 0$):

$$(22.7) \qquad h_1 = h_2 = h_3 = h.$$

Dunque intanto: *condizione necessaria per la posizione omologica puntuale delle Ω_i è che esse abbiano la stessa caratteristica.*

23. - Le omologie debbono essere armoniche. Configurazione dei centri e degli assi.

Tenendo conto delle (22.7) le coordinate del punto Q_1 si scrivono:

$$\begin{aligned} y_1:y_2:y_3 = {} & [m_2m_3hx_1^2 + (m_2 + m_3)x_1x_2 + hx_2^2]: \\ & :m_1[m_2m_3hx_1^2 + (m_2 + m_3)x_1x_2 + hx_2^2]: \\ & :(h + 1)x_3(m_2m_3x_1 + m_1x_2), \end{aligned}$$

e quelle di Q_2, Q_3 si ottengono da queste permutando gli indici 1, 2, 3 nelle m_i.

Quindi, essendo $(h+1)\,x_3 \neq 0$, la condizione di allineamento di Q_1, Q_2, Q_3 diviene:

$$(23.1) \qquad \begin{aligned} &|[m_2m_3hx_1^2 + (m_2+m_3)x_1x_2 + hx_2^2]\,, \\ &m_1[m_2m_3hx_1^2+(m_2+m_3)x_1x_2+hx_2^2]\,,\ (m_2m_3x_1+m_1x_2)\,| = 0 \end{aligned}$$

e dovrà essere soddisfatta *identicamente rispetto alle* x_i, se si vuole che le Ω_i siano in posizione omologica puntuale.

Supponiamo dapprima $h \neq 0$. Sottraendo dalla 1ª colonna del determinante (23.1) la 3ª moltiplicata per hx_1 e dalla 2ª la 3ª moltiplicata per hx_2, la (23.1) si scrive:

$$\begin{aligned} &|\,(m_2+m_3)x_1 + h(x_2 - m_1x_1)\,,\ \ m_1(m_2+m_3)x_2 - hm_2m_3(x_2 - m_1x_1)\,, \\ &\qquad m_2m_3x_1 + m_1x_2\,| \equiv 0\,, \end{aligned}$$

da cui, con facili trasformazioni e tenendo conto che:

$$m_1m_2m_3(m_2-m_3)(m_3-m_1)(m_1-m_2)(h+1) \neq 0\,,$$

si ottiene infine la condizione di allineamento nella forma:

$$(23.2) \qquad \begin{aligned} &hm_1m_2m_3x_1^3 + (m_2m_3 + m_3m_1 + m_1m_2)x_1^2x_2 + \\ &+ (m_1+m_2+m_3)x_1x_2^2 + hx_2^3 \equiv 0\,. \end{aligned}$$

Dunque intanto: *le* Ω_i *non possono essere in posizione omologica puntuale se non sono armoniche,* ossia se $h \neq 0$.

Esaminiamo infine il *caso che le* Ω_i *siano armoniche* $(h = 0)$. Allora la condizione di omologia (23.1) si scrive:

$$|\,m_2+m_3\,,\ m_1(m_2+m_3)\,,\ m_2m_3x_1 + m_1x_2\,| \equiv 0\,,$$

e si traduce quindi nelle due condizioni:

$$\begin{cases} |\,m_2+m_3\,,\ m_1(m_2+m_3)\,,\ m_2m_3\,| = 0 \\ |\,m_2+m_3\,,\ m_1(m_2+m_3) \quad m_1\,| = 0 \end{cases}$$

ossia, con facili trasformazioni, essendo:

$$(m_2-m_3)(m_3-m_1)(m_1-m_2) \neq 0,$$

nelle:

$$(23.3) \qquad \begin{cases} m_1 + m_2 + m_3 = 0 \\ m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2 = 0 \,. \end{cases}$$

In altre parole le Ω_i sono in posizione omologica puntuale solo allora che l'equazione cubica che fornisce i valori di m_1, m_2, m_3 è del tipo:

$$(23.4) \qquad m^3 = \mu,$$

dove μ è una costante non nulla. Anzi, scegliendo su uno degli assi b_i il punto unità del riferimento proiettivo (sul quale non era stata fatta alcuna ipotesi) si può adirittura supporre

$$\mu = 1.$$

Ciò equivale a dire che: *tre omologie Ω_i non speciali con i centri A_i distinti e allineati su di una retta r e gli assi distinti e concorrenti in un punto R sono in posizione omologica puntuale solo se armoniche e se nel fascio di centro R la proiettività ciclica $(b_1 b_2 b_3)$ ha come rette unite le stesse rette doppie s, t della involuzione cui appartengono le tre coppie $a_i b_i$.*

Si noti che, essendo la configurazione (A_i, b_i) autoduale, *le Ω_i sono allora anche in posizione omlogica radiale.* E dualmente.

24. - Modello metrico e proprietà che se ne deducono.

Se le Ω_i sono reali, cioè se sono reali i loro assi b_i ed i loro centri A_i, le rette s, t risultano immaginarie coniugate. Perciò con una omografia reale si può trasformare la retta r nella retta impropria e le rette s, t nelle rette isotrope uscenti da un punto proprio R del piano. La figura resta determinata a meno di una similitudine di centro R e le Ω_i divengono le simmetrie ortogonali rispetto a tre assi b_i che dividono in parti uguali l'angolo giro di centro R (v. fig. 29).

Dunque *tre omologie reali* Ω_i, *non speciali, con i centri* A_i *distinti ed allineati su di una stessa retta* r *e gli assi distinti e concorrenti in un punto* R *non appartenente ad* r, *sono in posizione omologica* (radiale e, contemporaneamente, puntuale) *solo se con una omografia reale si possono trasformare nelle sim-*

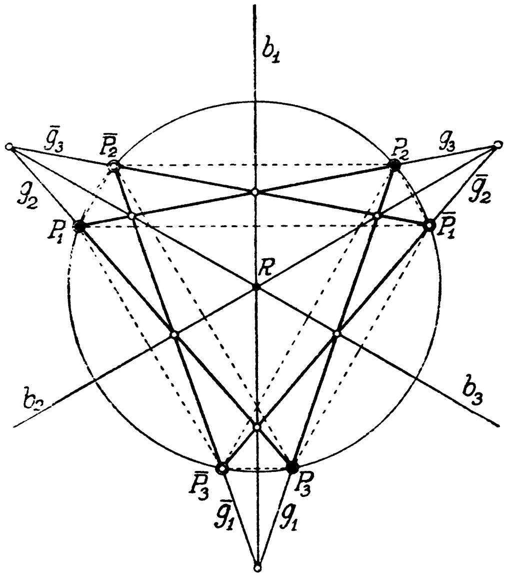

Fig. 29.

metrie ortogonali rispetto a tre assi concorrenti e dividenti in parti uguali l'angolo giro.

Pertanto, *prese nel piano tre rette* b_1, b_2, b_3 *uscenti da un medesimo punto* R *e dividenti in parti uguali l'angolo giro*:

I) *Si consideri il triangolo* $P_1P_2P_3$ *avente per vertici i simmetrici* P_i *di un medesimo punto* $\bar{P}_1$ *rispetto alla retta* b_i. *Sia* Q_i *il punto di intersezione con* b_i *del lato del triangolo opposto al vertice* P_i. *Allora i tre punti* Q_1, Q_2, Q_3 *sono allineati su di una retta* $\bar{g}_1$, *variabile con* $\bar{P}_1$.

II) *Si consideri il trilatero* $g_1g_2g_3$ *avente per lati le simmetriche* g_i *di una medesima retta* $\bar{g}_1$ *rispetto alle rette* b_i. *Sia* q_i *la retta normale all'asse* b_i *per il vertice del trilatero opposto al lato* g_i. *Allora le tre rette* q_1, q_2, q_3 *concorrono in un punto* $\bar{P}_1$, *variabile con* $\bar{g}_1$.

Osservando la fig. 29 si riconosce che:

III) *Se la retta* $\bar{g}_1$ *dell'enunciato di sinistra coincide con quella dell'enunciato di destra, lo stesso accade per i due punti* $\bar{P}_1$. Ossia la trasformazione di sinistra $\pi = (\bar{P}_1 \rightarrow \bar{g}_1)$ è l'inversa di quella di destra $(\bar{g}_1 \rightarrow \bar{P}_1)$. Inoltre:

IV) *La trasformazione* π *è la polarità armonica rispetto al triangolo* RST. Si ricordi che nella fattispecie S e T sono i punti ciclici [18]).

V) *Il triangolo* $P_1P_2P_3$ *è equilatero, col centro in* R, *e coincide col trilatero* $g_1g_2g_3$.

VI) *Sia* $\bar{P}_1\bar{P}_2\bar{P}_3$ *il triangolo equilatero ottenuto ruotando quello* $P_1P_2P_3$ *attorno ad* R, *fino a sovrapporre uno qualsiasi dei* P_i *a* $\bar{P}_1$: *allora i suoi lati sono le rette* $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, $\bar{g}_3$, come si potrebbe verificare facilmente anche per via analitica.

La situazione dei due triangoli $(P_i) = (g_i)$ e $(\bar{P}_i) = (\bar{g}_i)$ rispetto alle tre rette b_1, b_2, b_3 è perfettamente simmetrica, in quanto:

A) *i vertici di uno di essi sono i simmetrici di uno qualsiasi dei vertici dell'altro rispetto a* b_1, b_2, b_3;

B) *i lati di uno di essi sono i simmetrici di uno qualsiasi dei lati dell'altro rispetto a* b_1, b_2, b_3;

C) *ciascuna delle simmetrie di asse* b_i *trasforma uno dei due triangoli nell'altro,* cosicchè essi sono omologici in tre modi diversi [19]).

È chiaro che gli enunciati precedenti, già di per se notevoli nella loro formulazione metrica, esprimono altrettante proprietà proiettive delle terne di omologie in posizione omologica con gli assi concorrenti ed i centri allineati.

Così ad es. la circostanza che il triangolo $P_1P_2P_3$ sia equi-

---

[18]) Cfr. E. MORGANTINI, *Su una relazione di armonia fra i triangoli del piano proiettivo complesso*, n. 13. [Annali Triestini, vol. XXI (1951), Sez. II, pp. 5-33].

[19]) Se uno dei due triangoli si ottiene dall'altro con una rotazione di $\pi/3$ (e quindi anche di π), alle precedenti tre omologie si aggiunge anche la simmetria rispetto al centro R.

latero col centro R si può esprimere in forma proiettiva dicendo che i punti di intersezione della retta r con i suoi lati costituiscono un ciclo di una delle due proiettività cicliche del 3° ordine coi punti uniti S e T e che la retta r è la polare armonica di R rispetto al triangolo.

Così una rotazione di centro R diviene una omografia coi punti uniti R, S, T che muta in sé una (e quindi ogni) conica irriducibile tangente in S, T alle rette RS, RT.

Ma ormai è ora di finire, ringraziando il paziente e benevolo lettore.

INDICE DEL TESTO

INDICE DELLE FIGURE