Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

E. Bentsik

Una classe di moti del corpo rigido soggetto a forze di potenza nulla

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 29 (1959), p. 318-327
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1959__29__318_0>

UNA CLASSE DI MOTI DEL CORPO RIGIDO SOGGETTO A FORZE DI POTENZA NULLA

Nota (*) *di* E. Bentsik (*a Padova*)

In questo lavoro mi propongo di studiare in assenza di attrito il moto di un corpo rigido $\mathcal{C}$ soggetto a forze di potenza nulla ed il cui momento della quantità di moto rispetto ad un punto O abbia carattere precessionale cioè sia del tipo

$$\boldsymbol{K}_0 = a\boldsymbol{H} + b\boldsymbol{k} \tag{1}$$

con a e b costanti e con $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{k}$ vettori invariabili rispettivamente nello spazio e nel corpo, nel caso di una sollecitazione del tipo delle forze centrifughe composte.

Determinerò precisamente tutti i moti rotatori che soddisfano alla condizione (1) e mostrerò che possono aversi anche moti richiesti coincidenti con delle precessioni regolari se il corpo ha struttura giroscopica. In altri casi strutturalmente interessanti non esistono moti soddisfacenti alla (1).

1. - Premesse di carattere generale.

Detto $\mathcal{C}$ un corpo rigido qualsiasi, si può sempre assumere una terna trirettangola levogira di origine O e solidale a $\mathcal{C}$ tale che uno dei tre momenti di deviazione (ad esempio C') risulti nullo.

(*) Pervenuta in Redazione il 15 luglio 1959.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Padova.

In tal caso l'omografia d'inerzia σ è data da

$$\sigma \equiv \begin{vmatrix} A & 0 & B' \\ 0 & B & A' \\ B' & A' & C \end{vmatrix} \tag{2}$$

in cui i simboli A, B, ecc.... hanno l'abituale significato.

Sia λ l'omotetia

$$\lambda \equiv \begin{vmatrix} A+B+C & 0 & 0 \\ 0 & A+B+C & 0 \\ 0 & 0 & A+B+C \end{vmatrix} \tag{3}$$

e $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare del corpo $\mathcal{C}$.

Nell'ipotesi che O sia un punto fisso, il momento delle forze esterne rispetto ad O vale [1])

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H}. \tag{4}$$

Il teorema del momento della quantità di moto in assenza di attrito e nell'ipotesi di O fisso o coincidente con il baricentro, tenuto conto di (1), è espresso da [1])

$$b(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{\omega} \wedge (2\sigma - \lambda)\boldsymbol{H} = 0. \tag{5}$$

Ne segue

$$\boldsymbol{\omega} = \rho[b\boldsymbol{k} + (2\sigma - \lambda)\boldsymbol{H}] \tag{6}$$

con $\rho(t)$ funzione arbitraria del tempo.

Inoltre, per la invariabilità di $\boldsymbol{H}$, si ha

$$\dot{\boldsymbol{H}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{H} = 0 \tag{7}$$

---

1) GIUSEPPE GRIOLI: *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla.* Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, vol. XXVII, 1957.

ove il punto indica derivazione rispetto al tempo con riferimento agli assi solidali.

Nell'ipotesi di forze di potenza nulla ne consegue l'invariabilità dell'energia cinetica di $\mathcal{C}$, cioè

$$\boldsymbol{K}_0 \times \boldsymbol{\omega} = 2E_0 . \tag{8}$$

Sussiste un secondo integrale primo [2]) ma ometto di esprimerlo dato che non me ne servirò.

2. - Moti rotatori.

Se il problema ammette soluzioni rappresentate da moti rotatori questi sono necessariamente uniformi ed avvengono [2]) attorno ad un asse parallelo ad $\boldsymbol{H}$.

Deve cioè essere

$$\boldsymbol{\omega} = \nu \boldsymbol{H} \tag{9}$$

con ν costante.

Per la (6) si ha quindi

$$\rho[b\boldsymbol{k} + (2\sigma - \lambda)\boldsymbol{H}] = \nu \boldsymbol{H} \tag{10}$$

ovverossia

$$\rho b\boldsymbol{k} + [\rho(2\sigma - \lambda) - \nu]\boldsymbol{H} = 0. \tag{11}$$

Dalla (11) segue immediatamente la costanza di ρ; infatti da (11) segue

$$\dot{\rho} b\boldsymbol{k} + \dot{\rho}(2\sigma - \lambda)\boldsymbol{H} + [\rho(2\sigma - \lambda) - \nu]\dot{\boldsymbol{H}} = 0 \tag{12}$$

che, essendo $\boldsymbol{H}$ solidale al corpo e $\nu \neq 0$, implica [vedi anche (11)]

$$\dot{\rho} = 0, \quad \rho = \text{cost.} \tag{13}$$

Ricordando che

$$\boldsymbol{K}_0 = \sigma \boldsymbol{\omega} \tag{14}$$

---

2) Vedi nota precedente.

e tenendo conto della (6) e della (1) si ha

$$aH + bk = \rho\sigma[bk + (2\sigma - \lambda)H] \tag{15}$$

cioè, per la (11)

$$bk + (a - \sigma\nu)H = 0. \tag{16}$$

La (11) e la (16) costituiscono il sistema che caratterizza i moti rotatori.

* * *

Consideriamo per primo il caso in cui il vettore $\boldsymbol{k}$ sia parallelo ad $\boldsymbol{H}$; per la (14) e la (1) risulta

$$\sigma\nu H\, \boldsymbol{k} = (aH + b)\, \boldsymbol{k} \tag{17}$$

Ne segue che $\sigma\boldsymbol{k}$ è parallelo a $\boldsymbol{k}$ e quindi $\boldsymbol{k}$ è il versore di un asse principale. Sia esso il terzo, segue:

$$\nu HC = aH + b \tag{17}$$

per la quale è verificata anche la (16).

Quindi: *se* $\boldsymbol{k}$ *è asse principale; ogni rotazione uniforme attorno ad esso verifica le condizioni richieste, avendosi però, dalla* (11):

$$aH + b = \omega C. \tag{19}$$

$\boldsymbol{K}_0$ in tal caso mantiene orientamento invariabile.

* * *

Si supponga ora $\boldsymbol{H}$ non parallelo a $\boldsymbol{k}$. Non può neppure supporsi parallelo ad un asse principale [vedi (16) supponendo che la terna solidale abbia il terzo asse parallelo ad $\boldsymbol{H}$] senza ricadere nel caso precedente.

Eliminando $b\boldsymbol{k}$ fra le (12) e (17) si riconosce allora che condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza dei moti richiesti è che sia:

$$(20) \qquad \nu = -2$$

$$(21) \qquad \rho = \frac{2}{a + A + B + C}.$$

Si conclude che ogni rotazione uniforme attorno ad una retta che non sia asse principale d'inerzia verifica le condizioni richieste allora e solo allora che a, b, $\boldsymbol{k}$ verificano l'equazione:

$$(22) \qquad b\boldsymbol{k} = -(a + 2\sigma)\boldsymbol{H}$$

3. - Ricerca di moti non rotatori.

Escludendo ormai che il moto cercato sia rotatorio, osservo che da (15), valida in generale, segue

$$(23) \qquad \tau\boldsymbol{H} = -b\beta\boldsymbol{k}$$

con

$$(24) \qquad \begin{cases} \tau = \rho\sigma(2\sigma - \lambda) - a \\ \beta = \rho\sigma - 1 \end{cases}$$

ove, tenendo conto del significato dei simboli, le omografie (24) sono espresse dalle matrici

$$(25) \quad \tau \equiv \begin{vmatrix} \rho[A(A-B-C)+2B'^2]-a & 2\rho A'B' & \rho B'(B-A-C) \\ 2\rho A'B' & \rho[B(B-A-C)+2A'^2]-a & \rho A'(A-B-C) \\ \rho B'(B-A-C) & \rho A'(A-B-C) & \rho[C(C-A-B)+2A'^2+2B'^2]-a \end{vmatrix}$$

$$(26) \qquad \beta \equiv \begin{vmatrix} \rho A - 1 & 0 & -\rho B' \\ 0 & \rho B - 1 & -\rho A' \\ -\rho B' & -\rho A' & \rho C - 1 \end{vmatrix}$$

Considererò alcuni casi particolari.

I CASO. Suppongo $\boldsymbol{k}$ versore di un asse principale. Si ha quindi

$$A' = B' = 0. \tag{27}$$

Dalla (23), tenuto conto di (25) (26), si ha subito che, affinchè $\boldsymbol{H}$ non sia solidale al corpo deve essere pure

$$A = B, \tag{28}$$

L'ipotesi (27) porta dunque come conseguenza che il corpo $\mathcal{C}$ deve avere struttura giroscopica rispetto ad O. Ma per le (27), (28), dalla (6) si trae

$$\boldsymbol{\omega} = \rho\,\{\, b\,\boldsymbol{k} - CH_1\boldsymbol{i} - CH_2\boldsymbol{j} + (C - 2A)H_3\boldsymbol{k}\,\} \tag{29}$$

dove $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sono i versori della terna solidale a $\mathcal{C}$; cioè

$$\boldsymbol{\omega} = -\rho\,\{\, C\boldsymbol{H} + [2(A - C)H_3 - b]\,\boldsymbol{k}\,\}. \tag{30}$$

Si tratta quindi di movimenti di precessione che non possono essere che regolari; infatti dalla (7), moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{k}$, si ha subito

$$H_3 = \text{cost.} \tag{31}$$

Applicando i risultati ottenuti alle (1), (14) si ha che deve essere

$$\rho = -\frac{a}{AC} = \text{cost.} \tag{32}$$

$$aH_3 + b = \rho C[b + (C - 2A)H_3]. \tag{33}$$

* * *

II CASO. Sia invece $A' \neq 0$ ma $A = B$ e $B' = 0$.

Dalla (23) si trae

$$-(\rho AC + a)H_1 = 0 \tag{34}$$

e se non si vuole che sia ρ costante bisognerà supporre che sia $H_1 = 0$.

Si ha allora proiettando la (7) sugli assi di versori $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$

$$\dot{H}_1 = 0 ; \quad \dot{H}_2 = 0 \tag{35}$$

e quindi

$$H_1 = \text{cost.} \quad H_2 = \text{cost.} \tag{36}$$

ed $\boldsymbol{H}$ solidale al corpo, il che è da escludersi se non si vuole ricadere nel caso dei moti rotatori.

L'ipotesi $\rho = $ costante è contenuta nel *caso V*.

* * *

III CASO. Si abbandoni ora ogni ipotesi strutturale aprioristica, ma si supponga

$$H_3 = 0. \tag{37}$$

Dalla (7) proiettando sull'asse di versore $\boldsymbol{k}$ si vede subito che deve essere

$$A = B. \tag{38}$$

Proiettando sugli assi della terna solidale la (23) si ha

$$\left\{ \begin{aligned} aH_1 &= 2\rho B'(B'H_1 + A'H_2) - \rho ACH_1 - \rho bB' \\ aH_2 &= 2\rho A'(B'H_1 + A'H_2) - \rho ACH_2 - \rho bA' \\ \rho C(B'H_1 &+ A'H_2) = (\rho C - 1)b \end{aligned} \right. \tag{39}$$

e quindi dalle prime due delle (39), tenuto conto della terza, si trae

$$\left\{ \begin{aligned} C(a + \rho AC)H_1 &= (\rho C - 2)bB' \\ C(a + \rho AC)H_2 &= (\rho C - 2)bA' \end{aligned} \right. \tag{40}$$

Le (40) implicano, per $\dot{\rho} \neq 0$, che sia

$$H_1 = \text{cost.} \quad H_2 = \text{cost.},$$

e cioè moti rotatori. Alla stessa conclusione si giunge anche nell'ipotesi $\dot{\rho} = 0$. Infatti osservo che in tal caso da (40) segue

$$a = -\rho A C \qquad \rho C = 2 \tag{41}$$

e, tenuto conto di queste, la terza delle (39) assume la forma

$$2(B'H_1 + A'H_2) = b. \tag{42}$$

Ricordando che

$$H_1 + H_2^2 = H^2 \tag{43}$$

segue ancora

$$H_1 = \text{cost.} \quad H_2 = \text{cost.}$$

* * *

IV CASO. Consideriamo infine il caso che durante il moto il vettore $\boldsymbol{H}$ si mantenga costantemente parallelo al piano (O, yz). Sarà allora

$$H_1 = 0 \tag{44}$$

Dalla (23) proiettando sull'asse di versore $\boldsymbol{i}$ si trae

$$\rho B'[2A'H_2 + (B - A - C)H_3 - b] = 0. \tag{45}$$

Tenendo conto della (45) e della (43) si vede che sarà $H_1 =$ costante e $H_2 =$ costante a meno che non si ponga

$$B' = 0. \tag{46}$$

In tal caso però proiettando la (7) sugli assi di versore $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ si ha ancora

$$H_2 = \text{cost.} \quad H_3 = \text{cost.}$$

* * *

V Caso. Supporrò $\dot{\rho} = 0$ e $A' \neq 0$.

Dalla (23) segue che $\boldsymbol{H}$ è solidale a $\mathcal{C}$, a meno che le tre equazioni che si ottengono proiettando la (23) non siano fra di loro dipendenti.

Bisognerà supporre addirittura che la matrice completa abbia caratteristica uno, dato che altrimenti la relazione

$$H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = H^2 \tag{47}$$

implicherebbe $\boldsymbol{H}$ solidale a $\mathcal{C}$.

Supporremo per ora diverse da zero le tre H_i $(i = 1, 2, 3)$.

Dette λ e μ due costanti dovrà essere:

$$\tag{48} \begin{cases} \rho[A(A - B - C) + 2B'^2] - a = \lambda 2\rho A'B' \\ 2\rho A'B' = \lambda \{ \rho[B(B - A - C) + 2A'^2] - a \} \\ \rho B'(B - A - C) = \lambda\rho A'(A - B - C) \\ -\rho B' = -\lambda\rho A' \end{cases}$$

$$\tag{49} \begin{cases} \rho B'(B - A - C) = \mu 2\rho A'B' \\ \rho A'(A - B - C) = \mu \{ \rho[B(B - A - C) + 2A'^2] - a \} \\ \rho[C(C - A - B) + 2A'^2 + 2B'^2] - a = \mu\rho A'(A - B - C) \\ \rho C - 1 = -\mu\rho A'. \end{cases}$$

Da queste si trae

$$(50)\qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{B'}{A'} \qquad \mu = -\dfrac{C}{2A'} \\ A = B \\ a = -\rho AC \\ \rho = \dfrac{2}{C} \\ C^2 - 2AC + 4A'^2 + 4B'^2 = 0 \end{cases}$$

Le tre equazioni che si ottengono dalla (23) si riducono alla

$$(51)\qquad b = 2B'H_1 + 2A'H_2 - CH_3.$$

Introducendo nella (6) e nella (1) le condizioni (50) e (51) si ha

$$(52)\qquad \boldsymbol{\omega} = \left(-2H_1 - 4\frac{B'}{C}H_3\right)\boldsymbol{i} + \left(-2H_2 - 4\frac{A'}{C}H_3\right)\boldsymbol{j} - 4\frac{A}{C}H_3\,\boldsymbol{k}$$

$$(53)\qquad \boldsymbol{K}_0 = -2AH_1\boldsymbol{i} - 2AH_2\boldsymbol{j} + [-2AH_3 - CH_3 + 2B'H_1 + 2A'H_2]\boldsymbol{k}$$

Tenuto conto delle (52), (53), dalla (8) si ha

$$(54)\qquad 4AH^2 + 8\frac{A^2}{C}H_3^2 = 2E_0$$

da cui $H_3 =$ costante.

Dalle (51), (52) si trae che, affinchè non sia anche $H_1 =$ costante e $H_2 =$ costante si deve avere

$$(55)\qquad A' = B' = 0$$

e si ricade così nel caso I della struttura giroscopica.