RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO BRESSAN

Questioni di regolarità e di unicità del moto in presenza di vincoli olonomi unilaterali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 29 (1959), p. 271-315

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1959__29__271_0>

QUESTIONI DI REGOLARITÀ E DI UNICITÀ DEL MOTO IN PRESENZA DI VINCOLI OLONOMI UNILATERALI

Memoria (*) *di* ALDO BRESSAN (*a Padova*)

PREFAZIONE

La dimostrazione della sufficienza della nota condizione di equilibrio per la quiete di un sistema olonomo S ad N gradi di libertà $q_1 \dots q_N$ e in assenza di attrito, costituisce un problema molto difficile e in generale insoluto, anche qualora i vincoli unilaterali presenti siano rappresentabili nella forma

$$q_{m+1} \geq 0 \dots q_N \geq 0 \tag{1}$$

e valgono teoremi di unicità per le equazioni di Lagrange. Nell'ipotesi che la posizione d'equilibrio P^* sia di confine per gli ultimi $N - \mu$ dei vincoli unilaterali (1), una tale dimostrazione è stata data da Signorini [1]) nell'ipotesi che le componenti lagrangiane

$$Q_{\mu+1}(q \mid \dot{q} \mid t) \dots Q_N(q \mid \dot{q} \mid t)$$

della sollecitazione attiva siano continue e tutte proprio negative in P^* e per valori nulli delle $\dot{q}$.

Fondamentale è in tale dimostrazione l'ipotesi della continuità delle reazioni vincolari effettive.

Tuttavia si può osservare che l'incondizionata continuità delle reazioni vincolari non sempre sembra avere fondamento

---

(*) Pervenuta in Redazione il 5 novembre 1958.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

[1]) A. SIGNORINI, *Meccanica razionale*, Vol. II, pag. 337, 2ª ediz.

fisico sufficiente. Cattaneo ad esempio dimostra la « sufficienza » del principio dei lavori virtuali all'equilibrio di un sistema materiale, per un sistema particellare, soddisfacente a larghe condizioni di regolarità, soggetto a vincoli fissi anche scabri, e che possono essere in parte olonomi bilaterali e in parte anolomoni anche unilaterali, evitando inoltre la detta ipotesi sulle reazioni [2]).

In effetti il problema di dedurre, almeno in casi sufficientemente regolari, la continuità delle accelerazioni lagrangiane e delle reazioni effettive, da opportuni postulati, fisicamente soddisfacenti e meglio accettabili della diretta ammissione della continuità delle suddette reazioni, è più complesso di quel che sembra a prima vista, e costituisce oggetto della prima parte del presente lavoro.

* * *

Sia S il generico sistema olonomo, con vincoli lisci anche unilaterali e rappresentati dalle (1), dotato inoltre di espressione lagrangiana

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{N} a_{hk}(q \mid t)\dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^{N} b_h(q \mid t)\dot{q}_h + d(q \mid t) \tag{2}$$

della forza viva e di componenti lagrangiane

$$Q_h = Q_h(q \mid \dot{q} \mid t) \qquad (h = 1 \dots N) \tag{3}$$

della sollecitazione attiva, tali che siano continui i secondi membri delle equazioni di Lagrange risolute rispetto alle $\ddot{q}$ e sia $\{q_h(t)\}$ la generica N-pla di funzioni continue verificanti le (1).

Per semplificare l'esposizione mi sembra opportuno premettere le seguenti definizioni.

---

[2]) C. CATTANEO (Pisa), *Sulla « sufficienza » del principio dei lavori virtuali all'equilibrio di un generico sistema materiale*, Rendiconti di matematica. Università di Roma, lugio-dicembre 1954, pag. 209.

G. GRIOLI nel suo testo di meccanica razionale osserva a pag. 318 che all'ammissione di continuità delle reazioni vincolari è preferibile un principio di continuità del lavoro effettivo di esse.

DEFINIZIONE 1ª - *Per $m < r \leq N$ dirò che all'istante ξ la $q_r(t)$ prende (o lascia) lo zero — od anche che il sistema S, pensato animato dal moto $q_h = q_h(t)$ $(h = 1 \dots N)$, prende (o perde) contatto con l' $(r - m)^0$ vincolo unilaterale — se è*

$$q_r(\xi) = 0$$

e per ogni $t_1 < \xi$ (rispettivamente per ogni $t_2 > \xi$), esiste un t in $\overline{t_1 \xi}$, [rispettivamente in $\overline{\xi t_2}$] con $q_r(t) > 0$. Dirò poi che tale presa [o perdita] di contatto è semplice se esiste un $t_1 < \xi$ (un $t_2 > \xi$) tale che in $\overline{t_1 \xi}$ [in $\overline{\xi t_2}$] si abbia sempre

$$q_r(t) > 0.$$

DEFINIZIONE 2ª - *Dirò che $\overline{\xi_1 \xi_2}$ è un intervallo di regolarità (rispetto ai vincoli (1)) dell' N-pla suddetta, se per ogni t in $\overline{\xi_1 \xi_2}$ nessuna delle $q_{m+1}(t) \dots q_N(t)$ prende o lascia lo zero.* Ciò equivale all'essere in $\overline{\xi_1 \xi_2}$ una parte di esse $\equiv 0$, l'altra sempre > 0.

DEFINIZIONE 3ª - *Dirò regione R di regolarità dell' N-pla $\{q_h(t)\}$ (rispetto alle (1)), l'insieme aperto R, somma dei suoi intervalli di regolarità (rispetto alle (1))* [3]).

DEFINIZIONE 4ª - *Dirò che la considerata N-pla è rispetto ai vincoli (1) regolare se tale al confine* [4]), *se esistono continue tutte le $\dot{q}_h$ e $\ddot{q}_h$ in ogni intervallo aperto $\overline{\xi_1 \xi_2}$ che sia di continuità per le derivate 1ᵉ e 2ᵉ di ciascuna delle $q_{m+1}(t) \dots q_N(t)$ che in $\overline{\xi_1 \xi_2}$ almeno una volta prenda o lasci lo zero* [5]).

---

3) Si badi che nonostante R sia denso nell'intervallo $\overline{t_1 t_2}$ di definizione della considerata N-pla (ossia ogni punto di $\overline{t_1 t_2}$ è di accumulazione per R), il complementare CR di tale regione rispetto a $\overline{t_1 t_2}$ può avere misura arbitrariamente prossima a $t_2 - t_1$), e ciò pure in casi dinamici molto regolari (vedi esempio I°, § 1 - n. 2) per cui anche le $\ddot{q}$ sono continue.

4) Dirò tale pure il moto da essa rappresentato.

5) L'n-pla $\{q_h(t)\}$ è regolare st tale al confine rispetto ai vincoli (1) se e solo se, per ogni ξ in cui essa è definita, una delle $\dot{q}_k(t)$ o $\ddot{q}_k(t)$ $(h = 1, \dots, N)$ può essere ivi discintinua solo a patto che per un $r = m + 1, \dots, N$ sussista una o l'altra delle due seguenti condizioni per ξ:

a) $\dot{q}_r(t)$ o $\ddot{q}_r(t)$ sia discontinua per $t = \xi$;

b) ξ sia punto di accumulazione di istanti per cui si verifica la condizione a).

Se la detta N-pla rappresenta un moto di S mi sembra fisicamente ben accettabile l'ammissione per essa di regolarità conseguente alla regolarità al confine (secondo la def. 4), in quanto si può ritenere che tale proprietà traduce analiticamente il fatto che eventuali irregolarità del moto siano imputabili, nelle fatte ipotesi di regolarità di S, esclusivamente a prese o perdite di contatto con qualche vincolo unilaterale.

Ammetterò che ogni moto $\{q_h(t)\}$ dinamicamente possibile per S risolva le equazioni L) di Lagrange in senso lato, ossia che in ogni intervallo $\overline{\xi_1\xi_2}$ di regolarità abbia derivate 1e e 2e continue e risolva le L) in corrispondenza a reazioni che i vincoli siano capaci di esplicare.

* * *

Nella 1a parte del presente lavoro considero appunto la generica soluzione in senso lato $\{q_h(t)\}$ delle equazioni di Lagrange colle $q_h(t)$ e $\dot{q}_h(t)$ continue, cosicchè soddisfano la legge U) d'urto con cui va completata la definizione di S, qualunque sia U); e dimostro che in ogni intervallo $\xi_1\xi_2$ sono continue le derivate seconde di quelle delle $q_{m+1}(t) \ldots q_N(t)$ che ivi almeno una volta prendono o lasciano lo zero. Supposta la $\{q_h(t)\}$ regolare se tale al confine, resta allora assicurata la continuità di tutte le $\ddot{q}_h$ e anche delle reazioni. vincolari.

Ha interesse notare che per giungere a questa conclusione l'ipotesi che la $\{q_h(t)\}$ sia regolare se tale al confine, è essenziale perchè da esempi risulta che altrimenti pur essendo le $\dot{q}_h(t)$ assolutamente continue, non solo le $\ddot{q}_h$ possono essere discontinue [6]), ma possono presentarsi casi di indeterminazione nel senso che le condizioni iniziali risultino largamente insufficienti ad individuare un movimento [7]); tale indeterminazione, nello sola ipotesi di continuità delle $\dot{q}_h(t)$ può presentarsi anche in casi in cui l'equazioni del Lagrange sono soddisfatte quasi ovunque (mis $CR = 0$) [8]).

* * *

[6]) Vedi Osservazione 2a, n. 3 di § 1.

[7]) Vedi Osservazione 1a, n. 3, § 1.

[8]) Vedi nel n. 3 di § 1 l'Esempio 2° e le 9 righe che le precedono.

La complessità del problema accennato all'inizio di questa introduzione e studiato nella prima parte del lavoro, si ha, tra l'altro perchè, secondo la nota [3]), può essere positiva la misura dell'insieme CR dove le $q_h(t)$ non sono, almeno a priori, tenute a soddisfare le equazioni di Lagrange.

Altre complicazioni derivano dalla possibilità di prese o perdite del contatto del sistema con qualche vincolo unilaterale in modo non semplice (secondo la def. 1), e dal poter esser R non connessa.

* * *

Giovandomi di risultati conseguiti nella prima parte del presente lavoro estendo nella seconda il citato teorema di equilibrio di Signorini al caso dinamico, sempre con referenza a moti regolari se tali al confine, dimostrando un teorema di unicità della soluzione dinamica. Precisamente dimostro il requisito di unicità per ogni moto di confine, regolare se tale al confine, sotto ipotesi sui dati che nel caso statico riescono meno restrittive di quelle di Signorini. Dimostro cioè che se sotto prefissate condizioni iniziali l'equazioni di Lagrange ammettono una soluzione di confine, essa è l'unica nella classe di tutti i moti (anche con distacco), dinamicamente possibili per S e verificanti le stesse condizioni iniziali, purchè la sollecitazione attiva soddisfi opportune condizioni. Nel caso statico il teorema è in particolare applicabile tra l'altro al caso delle forze puramente posizionali e soddisfacenti assieme agli altri dati, alle condizioni di Lipschitz. Per quanto mi consta il detto teorema d'equilibrio di Signorini non è stato ancora rigorosamente esteso nemmeno a questo caso. Probabilmente ciò è dovuto al fatto che le difficoltà che esso presenta, richiedono l'uso di metodi di natura diversa da quelli impiegati da Signorini.

Grazie ad una estensione di un teorema di Agostinelli è possibile generalizzare i risultati di questo lavoro al caso in cui si aggiungano al considerato sistema S, dei vincoli anolomi bilaterali lineari e regolari. Tale argomento sarà oggetto di una prossima nota.

§ 1. - OSSERVAZIONI SULLE EQUAZIONI DI LAGRANGE NEL CASO DI VINCOLI OLONOMI UNILATERALI

N. 1. - **Considerazioni preliminari.**

Riferendomi al sistema S considerato nell'introduzione, di sollecitazione attiva e forza viva espresse dalle (3) e (2), pongo

$$(4) \qquad \tau_h(q\,|\,\dot{q}\,|\,t) + \sum_{k=1}^{N} a_{hk}\ddot{q}_k = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{q}_h} - \frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q_h} \qquad (h=1\dots N)$$

$$(5) \qquad \vartheta_h(q\,|\,\dot{q}\,|\,t) = \tau_h(q\,|\,\dot{q}\,|\,t) - Q_h(q\,|\,\dot{q}\,|\,t) \qquad (h=1\dots N)$$

Conviene precisare la nozione di soluzione in senso lato, di cui ho già parlato nell'introduzione, mediante la

DEFINIZIONE 5ª - *Dirò che la considerata N-pla $\{q_h(t)\}$ risolve in senso lato le equazioni di Lagrange di S in $\overline{t_1 t_2}$, se ivi le $\dot{q}_h$ e $\ddot{q}_h$ $(h=1\dots N)$ sono continue in ogni intervallo di regolarità rispetto alle 1) ed inoltre esistono N funzioni $\Phi_1(t)\dots\Phi_N(t)$ per le quali sussistono in R le*

$$(6) \qquad \begin{cases} \Phi_1 \equiv \dots \equiv \Phi_m \equiv 0 \\ \Phi_j(t) \geq 0 \qquad\qquad (j=m+1\dots N), \end{cases}$$

la

$$(7)_1 \qquad \Phi_j(t) = 0$$

ad ogni istante t per cui sia

$$(7)_2 \qquad q_j(t) > 0 \qquad (j=m+1\dots N),$$

e le

$$(8) \qquad \sum_{k=1}^{N} a_{hk}\ddot{q}_k + \vartheta_h(q\,|\,\dot{q}\,|\,t) = \Phi_h(t) \qquad (h=1\dots N).$$

Si noti che tale definizione non implica a priori che R sia un insieme di continuità per le $\ddot{q}_1(t)\dots\ddot{q}_N(t)$.

DEFINIZIONE 6ª - *Dirò infine moti di tipo $\mathfrak{M}_S$ quelli rappresentati da N-ple $\{q_h(t)\}$ colle $\dot{q}_h(t)$ continue, regolari se* *tali al confine rispetto alle* (1) [*che esprimono i vincoli unilaterali di* S], *risolventi inoltre in senso lato l'equazione di Lagrange di* S.

N. 2. - Qualche proprietà dell'insieme R di regolarità.

Poichè ogni N-pla $\{q_h(t)\}$, soluzione in senso lato delle equazioni di Lagrange, le risolve solo nella propria regione R di regolarità è importante notare le proprietà di R espresse dai seguenti teoremi.

TEOREMA I° - *Esistono N-ple $\{q_h(t)\}$ (con le $\dot{q}_h(t)$ e $\ddot{q}_h(t)$ continue) soluzioni di problemi dinamici molto regolari* [*in cui precisamente le $\vartheta_h(q \mid q \mid t)$ date da* (4) *sono continue con le derivate fino ad un prefissato ordine* ν] *per le quali la regione di regolarità R ha misura inferiore ad un $\varepsilon > 0$, prefissato ad arbitrio.*

Per dimostrarlo procedo per gradi.

Dati sull'asse reale a e b $(a < b)$, sia $r_1, \dots, r_n$ la successione di tutti i numeri razionali contenuti in $\overline{ab}$, ordinati per es. secondo l'usuale metodo diagonale. Per $n = 1, 2, \dots,$ sia $\overline{r'_n r''_n}$ l'intervallo aperto di centro r_n e lunghezza $\frac{\varepsilon}{2^n}$ (con $\varepsilon > 0$). Allora, posto

$$R^* = R^*_{\varepsilon, a, b} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{r'_n r''_n}, \tag{9}$$

R^* è aperto e soddisfa la

$$0 < \text{mis}\, R^* \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{mis}\, \overline{r'_n r''_n} = \varepsilon. \tag{10}$$

Inoltre *il suo complementare CR^*, oltre ad essere chiuso ed ad avere misura > 0 in ogni intervallo contenuto in $\overline{ab}$ e più lungo di ε, non contiene, ciò nonostante, alcun segmento.*

Infatti se $\overline{\xi\eta}$ appartenesse a CR^*, ivi cadrebbe certo un numero razionale r_n che invece appartiene a R^*.

In secondo luogo considero con L. Schwartz [9]) la funzione $\rho(u)$, continua in $\overset{\vert\!-\!\vert}{-1\;1}$, definita da

$$\rho(u) = e^{-\frac{1}{1-u^2}} \qquad |u| < 1 \tag{11}$$

per le sue proprietà di essere > 0 in $\overline{-1\;1}$, indefinitamente derivabile in tutto $\overset{\vert\!-\!\vert}{-1\;1}$, e con

$$\rho^{(n)}(x) = 0 \qquad x = \pm 1 \qquad n = 0, 1, 2 \dots, \tag{12}$$

il che è di facile verifica.

Sia per ogni fissato intero $\nu \geq 0$

$$\begin{cases} L_\nu = \text{maggiore dei numeri } \max\limits_{|u| \leq 1} |\rho^{(h)}(u)| & h = 0, 1 \dots \nu+1 \\ k_\nu^{(a,b)} = \text{minore dei numeri } 1, \left(\dfrac{b-a}{2}\right)^{\nu+1} L_\nu & (a < b). \end{cases} \tag{13}$$

Risulta allora (per ogni $a < b$)

$$\left| \frac{d^h}{dx^h} k_\nu^{(a,b)} \left(\frac{2x - b + a}{b - a} \right) \right| \leq k_\nu^{(a,b)} \left(\frac{2}{b-a} \right)^h L_\nu \leq L_\nu \quad h = 0, 1 \dots \nu+1 \tag{14}$$

Ciò premesso, si può enunciare il seguente 2° passo della dimostrazione in corso.

Dato sull'asse reale il generico insieme aperto A, detta $\overset{\vert\!-\!\vert}{a_h\,b_h}$ ($h = 1, 2 \dots$) *una successione di tutti i tratti congiunti a* CA (che dirò associati ad A e sono caratterizzati dall'avere i soli estremi non appartenenti ad A), *la funzione*

$$\psi(x) = \rho_{\nu, A}(x) = \begin{cases} k_\nu^{(a,b)} \left(\dfrac{2x - b_h + a_h}{b_h - a_h} \right) & a_h \leq x \leq b_h \ (h = 1, 2 \dots) \\ 0 & x \in CA \ ([10]) \end{cases} \tag{15}$$

---

[9]) L. SCHWARZ, *Théorie des distributions*, Tome I, pag. 22.

[10]) Userò le notazioni della teoria degli insiemi: in particolare $x \in I$ significa: x appartiene all'insieme I.

è > 0 in A, mentre in CA è $= 0$ assieme alle derivate fino all'ordine ν, che esistono continue ovunque.

La derivata d'ordine $\nu + 1$ è discontinua, quindi quelle di ordine $k > \nu + 1$ non esistono negli eventuali punti a d'accumulazione degli a_h (e non esistono solo ivi).

Valgono inoltre ovunque le diseguaglianze

$$(16) \qquad | \rho^{(h)}_{\nu,A}(x) | < L_\nu \qquad (h=0, 1 \dots \nu).$$

Basta provare la continuità della $\psi(x)$, l'esistenza e la continuità delle $\psi^{(1)}(x) \dots \psi^{(\nu)}(x)$ che a priori può affermarsi solo negli $\overset{\vdash\dashv}{a_h\, b_h}$ presi singolarmente.

Posto, come è possibile

$$(17) \qquad \psi_h(x) = \begin{cases} \rho^{(h)}_{\nu,A}(x) & x \in A \\ 0 & x \in CA \end{cases} \qquad (h=0, 1, \dots \nu+1)$$

per (15) e (12) è

$$\int_{a_k}^{b_k} \psi_h(\xi) d\xi = \rho^{(h-1)}_{\nu,A}(b_k^-) - \rho^{(h-1)}_{\nu,A}(a_k^+) = 0 \quad (k=1, 2, \dots)$$

Allora, intendendo $\alpha = x$ per x in CA, e $\alpha = a_j$ se è $a_j < x < b_j$ per un opportuno indice j, si ha

$$\int_{a_1}^{x} \psi_h(\xi) d\xi = \int_{\overset{\vdash\dashv}{a_1\, x} \cdot A} \psi_h d\xi + \int_{\overset{\vdash\dashv}{a_1\, x} \cdot CA} \psi_h d\xi =$$

$$= \sum_{\overset{\vdash\dashv}{a_k\, b_k} \subset \overset{\vdash\dashv}{a_1\, x}} \int_{a_k}^{b_k} \psi_h d\xi + \int_{\alpha}^{x} \psi_h d\xi + 0 = \psi_{h-1}(x) \qquad (h=1, \dots, \nu+1).$$

Le $\psi_0 \dots \psi$ risultano allora continue su tutto l'asse reale e di conseguenza si ha

$$\psi_h(x) = \frac{d\psi_{h-1}}{dx} \qquad (h = 1 \dots \nu)$$

onde per la $\psi_0(x) \equiv \rho_{\nu, A}(x)$ risulta provata l'asserita derivabilità.

Osservato infine che in ogni $\overline{a_k b_k}$ (con $b_k - a_k < 2$)$\rho^{(\nu+1)}_{\nu, A}(x)$ per (15), $(13)_2$ e (14) assume un valore fisso $L > 0$ [11]) mentre per (15) e (12) è $\rho^{(\nu+1)}_{\nu, A}(a_n) = 0$, ne segue che se a è punto d'accumulazione degli a_k (onde dei b_k), ivi la $\rho^{(\nu+1)}_{\nu, A}$ non può essere continua e quindi non esistono le $\rho^{(k)}_{\nu, A}$ con $k > \nu + 1$ come ho già avvertito.

* * *

Completo la dimostrazione della prima proprietà di R mediante il seguente

ESEMPIO 1° - Sia P un punto materiale, di massa unitaria, riferito a coordinate cartesiane ortogonali xyz, verificante il vincolo liscio

$$(18) \qquad z \geq 0.$$

Su S agisca una forza $\boldsymbol{F}$ di componenti X, Y, Z date da

$$(19) \qquad X = Y = 0 \qquad Z(x) = \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

con $\psi(x)$ espressa dalla (15) in corrispondenza ad un intero $\nu \geq 2$ ed all'insieme aperto $A = \mathrm{R}^*_{\varepsilon, -\infty, +\infty}$ (con $\varepsilon > 0$), dato da (9).

Dalle considerazioni precedenti, in particolare dalla non appartenenza a $CR^*_{\varepsilon, -\infty, +\infty}$ di alcun intervallo, stabilita nel

---

11) Infatti $b_k - a_k < 2$ implica, per $(13)_2$, $k_\nu^{(a_k, b_k)} = \left(\frac{b_k - a_k}{2}\right)^{\nu+1}$, onde per (15) e (14) è $\max\limits_{(a_k \leq x \leq b_k} \psi^{(\nu+1)}(x) = \max\limits_{-1 \leq x \leq 1} \rho^{(\nu+1)}(x) = L$ indipendente da k.

1° passo, segue che valendo le (18) e (19), le equazioni

$$\ddot{x} = X \qquad \ddot{y} = Y \qquad \ddot{z} = Z + \Phi_z \tag{20}$$

del moto di P, ammettono la soluzione

$$x = t \qquad y = 0 \qquad z = \psi(t) \qquad \Phi_z = 0 \tag{21}$$

avente per regione di regolarità $R^*_{\varepsilon, -\infty, +\infty}$ che ha la misura finita ε.

In altri termini, *può avere misura comunque grande l'insieme CR degli istanti ξ in ogni cui intorno il punto P prende e perde infinite volte contatto col piano xy.*

N. 3. - Importanza della regolarità conseguente alla regolarità al confine per le soluzioni in senso lato.

Le considerazioni svolte permettono di fare anche la seguente

OSSERVAZIONE 1ª - *Una soluzione $\{q_h(t)\}$ in senso lato delle equazioni di Lagrange di S, verificante date condizioni iniziali, può essere largamente indeterminata anche imponendo l'assoluta continuità delle $\dot{q}_h$.*

Infatti qualunque sia la funzione sommabile $Y_1(t)$, nulla in R^*, le

$$x(t) = t \qquad y(t) = \int_0^t (t - \xi) y_1(\xi) d\xi \qquad z(t) = \psi(t) \tag{22}$$

risolvono nel senso suddetto le equazioni dinamiche del punto P, considerato nel primo esempio, con le forze date dalle (19), verificando le condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(0) = y(0) = 0 & z(0) = \psi(0) \\ \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0 & z(0) = \dot{\psi}(0) \end{cases} \tag{23}$$

e la $y(t)$ può ben non essere $\equiv 0$ dato che CR può avere misura > 0.

OSSERVAZIONE 2ª - Ha forse un certo interesse osservare a questo punto che, in accordo con il teorema VIII [fondamentale nel presente lavoro e che verrà dimostrato nel n. 1 di § 3], se la soluzione (22) non è $\equiv 0$, pur essendo dotata di derivate 1ᵉ assolutamente continue, non ha quelle 2ᶜ continue (né per $y_1(t)$ sommabile generica essa esisterà ovunque). Infatti la continuità della $\ddot{y}$ implicherebbe ovunque per $(22)_2$, l'uguaglianza

$$y(t) = y_1(t)$$

da cui la continuità della $y_1(t)$, la quale risulterebbe nulla ovunque, perchè tale in $R^*_{\varepsilon, -\infty, +\infty}$ che è denso su tutto l'asse dei tempi.

Si conclude allora, essendo la $z(t)$ continua e verificando essa le (18), che il moto (22) non è regolare se tale al confine.

L'importanza della regolarità conseguente alla regolarità al confine, per soluzioni delle equazioni di Lagrange di S in senso lato risulta oltre che dalla precedente osservazione 1ª anche dalla possibilità che una soluzione $\{q_h(t)\}$ del tipo detto, colle $\dot{q}_h$ continue ma non assolutamente e colle $\ddot{q}_h$ quasi ovunque esistenti, sia non determinata dalle condizioni iniziali pur soddisfacendo le equazioni di Lagrange quasi ovunque [12]).

Si consideri allo scopo il seguente

ESEMPIO 2º - Sia τ il noto insieme di Cantor definito dalle

$$\tau = \overset{\vdash\!\dashv}{0\;1} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{3^{n-1}} I_{n,s}$$

con

$$I_{n,s} = \overline{\frac{3s-2}{3^n} \quad \frac{2s-1}{3^n}} \quad (s=1 \dots 3^{n-1}) \; (n=1, 2 \dots)$$

che, come si sa, è perfetto e di misura nulla.

---

[12]) Tale ipotesi fa per esempio CATTANEO nel n. 3 dell'op. cit. in nota [2]).

Si consideri di nuovo il problema dinamico del punto P del primo esempio determinato dalle (18) (19) e (23). La $\psi = \psi_{\nu,\varepsilon}$ figurante nella $(19)_3$, sia ancora espressa da (15), assumendo però ora in quest'ultima anzichè $A = R_{\varepsilon, -\infty, +\infty}$:

$$A = \overset{|-|}{0\;1} - \tau = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{s^{n-1}} I_{n,s}.$$

La regione di regolarità di tale ψ, che per costruzione è nulla in τ e nelle semirette $t \leq 0$, $1 \leq t$, è $C\tau$.

Sia ora $\bar{\varphi}(t)$ la corrispondenza di Cantor definita dalla [13]) dalla [13])

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{s - \frac{1}{2}}{3^{n-1}} \qquad \text{per } t \in I_{n,s}$$

purchè $I_{n,s}$ non appartenga a

$$\sum_{m=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{s^{m-1}} I_{m,r} \qquad \begin{matrix}(s = 1, \ldots 3^{n-1}) \\ (n = 1, 2 \ldots\ldots)\end{matrix}$$

dalle

$$\bar{\varphi}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & 1 \leq t \end{cases}$$

e dalla condizione di essere continua ovunque.

Come è noto tale $\bar{\varphi}(t)$ è non decrescente, e con derivata nulla in tutto $C\tau$.

Detta $\lambda(t)$ un'arbitraria funzione continua, posto

$$\varphi(t) = \int_0^t \lambda(t) d\bar{\varphi}(t) \tag{24}$$

(l'integrale essendo nel senso di Stiltjes) è

$$\varphi(t) = 0 \qquad t \leq 0$$

$$\frac{d}{dt}\varphi(t) = \lambda(t)\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = 0 \qquad t \in C\tau$$

---

[13]) Se $\overset{|-|}{a\;b}$ appartiene ad A ed a e b no, in $\overline{a\;b}$ $\bar{\varphi}(t)$ vale $(b-a)/2$.

onde le

$$(25) \qquad x(t) = t \qquad y(t) = \int_0^t \varphi(\xi) d\xi \qquad z = \psi(t)$$

risolvono in senso lato il problema dinamico considerato, per cui in particolare verificano quasi ovunque, precisamente in $C\tau$, le

$$\ddot{x} = \ddot{y} = 0 \qquad \ddot{z} = \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

La soluzione (25) dipende secondo (24) dalla detta $\lambda(t)$, che invece non influisce sulle condizioni iniziali

$$(26) \qquad \begin{cases} x(-1) = -1 & y(-1) = z(-1) = 0 \\ \dot{x}(-1) = 1 & \dot{y}(-1) = \dot{z}(-1) = 0 \end{cases}$$

verificate dalle (25).

CONCLUSIONE - La condizione di regolarità conseguente alla regolarità al confine del generico moto $\{q_h(t)\}$ di S, sembra quindi oportuna oltre che per essere sufficiente (come si proverà col teorema VIII) ad assicurare l'esistenza e la continuità delle $\ddot{q}_h$ e delle reazioni, anche perchè se non la si ammette manca certo l'unicità del moto, per sistemi pur dotati delle proprietà di regolarità supposte per S e pei quali soppressi i vincoli unilaterali, valgano teoremi di unicità.

N. 4. - **Sulle regioni di regolarità delle ultime $N-m$ delle $q_1(t) \dots q_N(t)$ colle q_h continue e rispettanti i vincoli** (1).

Indicherò con Γ la classe dei 2^{N-m} insiemi costituiti coi numeri $m+1, \dots, N$ (incluso l'insieme vuoto), con γ il generico di essi, e userò pure le posizioni

$$(27) \qquad \begin{cases} c\gamma = (m+1, \dots, N) - \gamma \\ \bar{\gamma} \in \Gamma = (1, \dots, m) + \gamma \\ \omega_\gamma = \text{numero degli elementi di } \gamma \qquad \gamma \in \Gamma \end{cases}$$

Considero una generica N-pla $q = \{q_k(t)\}$ di funzioni continue e rispettanti le (1), definite in un intervallo $a\,b$ con a o b eventualmente all'infinito.

Accanto ad ogni simbolo Σ a cui venga dato un significato in relazione alla considerata N-pla q (per es. la «R» introdotta per esprimere la regione di regolarità della q) potrò talvolta usare il simbolo $\Sigma^{(q)}$ con lo stesso significato in cui è messa in evidenza la dipendenza da q. Ciò convenuto passo ad introdurre vari enti appunto dipendenti da q.

Per $j = m+1, \ldots, N$ indicherò con N_j e P_j gli insiemi, l'uno chiuso, l'altro aperto degli istanti t con $q_j(t)$ nullo, rispettivamente positivo e dirò regione di regolarità di $q_j(t)$ l'insieme aperto

$$R_j = P_j + (N_j - \mathfrak{F}N_j) \qquad (j = m+1, \ldots, N). \tag{28}$$

Userò pure la posizione

$$R^\gamma = R^{\gamma(q)} = (\prod_{i \in \gamma} P_i) \cdot \pi_{j \in c\gamma} (N_j - \mathfrak{F}N_j) \qquad \gamma \in \Gamma \tag{29}$$

che può leggersi: $\bar{t}$ è in R^γ se e solo se in un suo conveniente intorno sono positive solo quelle delle $q_{m+1}(t) \ldots q_N(t)$ che hanno l'indice in γ

Per la def. 3 di regione R di regolarità, dalla (28) segue

$$R = \prod_{j=m+1}^{N} R_j. \tag{30}$$

Per la def. 3 e il significato soprascritto dell'insieme R vale pure la

$$R = \sum_{\gamma \in \Gamma}{}^{\cdot} R^\gamma \tag{31}$$

il puntino stando ad indicare (secondo l'uso per es. del Prof. Fichera) che per due elementi distinti γ_1 e γ_2 di Γ si ha:

$$R^{\gamma_1} \cdot R^{\gamma_2} = 0.$$

Volendo, la (31) può ottenersi sostituendo in (30) la (28) e sviluppando.

Per elementari proprietà della teoria degli insiemi di punti, verificando le $q_{m+1}(t) \dots q_N(t)$ le (1), da (28) seguono le

$$(32) \qquad \begin{cases} \overline{a\,b} = P_j \dotplus N_j = R_j \dotplus \mathfrak{F}N_j \\ \mathfrak{F}P_j = \mathfrak{F}N_j = \mathfrak{F}R_j \end{cases} \qquad (j = m+1, \dots, N)$$

e dalle (31) la

$$(33) \qquad \mathfrak{F}R \subset \sum_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{F}R^{\gamma}$$

Poichè gli insiemi $R_{m+1} \dots R_N$ sono aperti e per (32) densi e, come è noto, il prodotto di due insiemi aperti e densi su $\overline{a\,b}$ è pure tale, dalla (30) segue il

TEOREMA II - *La regione R di regolarità rispetto alle* (1) *di un N-pla $\{q_h(t)\}$ di funzioni definite in $\overline{a\,b}$, ivi continue, è densa su $\overline{a\,b}$ (anche se di misura $< b - a$).*

Avendo poi Γ un numero finito di elementi (2^{N-m}), da (31) si deduce il:

COROLLARIO - *Per ogni ξ in $\overline{a\,b}$ vi è almeno un elemento γ di Γ, per cui ξ sia punto di accumulazione per R^{γ}.*

§ 2. - SU FUNZIONI AVENTI IL SIGNIFICATO DI CERTE REAZIONI E DI CERTE ACCELERAZIONI LAGRANGIANE

N. 1. - Introduzione delle $\overset{\gamma}{\alpha}_h(q \mid \dot{q} \mid t)$ e $\overset{\gamma}{\psi}_h(q \mid \dot{q} \mid t)$.

Fissato un γ in Γ, si considerino, valendo le (27), le 2 N equazioni nelle 2 N incognite $\dot{q}_h$ e Φ_h $(h = 1 \dots N)$

$$(34) \qquad \sum_{k=1}^{N} a_{hk}\ddot{q}_k + \vartheta_h(q \mid \dot{q} \mid t) = \Phi_h \qquad (h=1 \dots N)$$

$$(35) \qquad \begin{cases} \ddot{q} = 0 & k \in C\gamma \\ \Phi_h = 0 & h \in \gamma \end{cases}$$

La loro soluzione $\ddot{q}_h = \overset{\gamma}{\alpha}_h(q \mid \dot{q} \mid t)$, $\Phi_h = \overset{\gamma}{\psi}_h(q \mid \dot{q} \mid t)$ $(h = 1 \dots N)$ è data dalle

$$(36)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\overset{\gamma}{\alpha}_k(q|\dot{q}|t) = \begin{cases} -\sum\limits_{k\in\gamma} \overset{\gamma}{A}_{hk}(q \mid t)\vartheta_h(q \mid \dot{q} \mid t) & k \in \gamma \\ 0 & k \in C\gamma \end{cases} \\ &\overset{\gamma}{\psi}_h(q|\dot{q}|t) = \begin{cases} 0 & h \in \gamma \\ \sum\limits_{k\in\gamma} a_{hk}(q \mid t)\overset{\gamma}{\alpha}_k(q \mid \dot{q} \mid t) & h \in C\gamma \end{cases} \end{aligned} \right.$$

ove la matrice $\| \overset{\gamma}{A}_{hk} \|$, d'ordine $m + \omega_\gamma$ — secondo $(27)_3$ — è la reciproca di quella formata con le righe e le colonne di $\| a_{hk} \|$ $(h, k = 1 \dots N)$ di indici appartenenti a γ.

OSSERVAZIONE 1ª - *Tali* $\overset{\gamma}{\alpha}_h$ e $\overset{\gamma}{\psi}_h$ *sono quindi regolari, in particolare continue e lipschitziane se tali sono le* $Q_h(q \mid \dot{q} \mid t)$ *e l'energia cinetica* $\mathcal{T}$ *e le derivate* 1ᵉ *delle* $a_{hk}(q \mid t)$, $b_h(q \mid t)$ *e* $d(q \mid t)$ $(h = 1 \dots N)$.

OSSERVAZIONE 2ª - *Quanto al significato meccanico, fissati ad arbitrio dei valori* $\bar{q}$, $\dot{\bar{q}}$, $\bar{t}$ *di* q, $\dot{q}$, t, *le* $\overset{\gamma}{\alpha}_h(\bar{q} \mid \dot{\bar{q}} \mid \bar{t})$ *e* $\overset{\gamma}{\psi}_h(\bar{q} \mid \dot{\bar{q}} \mid \bar{t})$ *sono le accelerazioni e le componenti lagrangiane delle reazioni che si avrebbero all'istante* $\bar{t}$, *se per* $t = \bar{t}$ *il sistema si trovasse nello stato* $(\bar{q}, \dot{q})$, *e se fosse sempre soggetto anzichè ai vincoli unilaterali* (1), *agli* $N - m - \omega_\gamma$ *vincoli bilaterali*

$$q_s = \bar{q}_s + (t - \bar{t})\dot{\bar{q}}_s \qquad s \in C\gamma$$

oltre agli altri bilaterali eventualmente preesistenti.

N. 2. - Una proprietà delle $\overset{\gamma}{\alpha}_h$ e $\overset{\gamma}{\psi}_h$.

TEOREMA III - *Se per* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (*con* $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ *vuoto* $\gamma \in \Gamma$), é

$$(37)\qquad \overset{\gamma}{\alpha}_h = 0 \qquad h \in \gamma_2$$

oppure

$$(37') \qquad \overset{\gamma_1}{\psi}_h = 0 \qquad h \in \gamma_2 ,$$

è

$$(38) \qquad \overset{\gamma}{\alpha}_h = \overset{\gamma_1}{\alpha}_h \qquad \overset{\gamma}{\psi}_h = \overset{\gamma_1}{\psi}_h \qquad h = 1 \, .. \, N$$

da cui per (36) *risulta*

$$(39) \qquad \overset{\gamma}{\alpha}_j = 0 \qquad \overset{\gamma_1}{\psi}_j = 0 \qquad j \in \gamma_2 .$$

Valga infatti l'alternativa (37). Allora per costruzione e per la (37) stessa le $\overset{\gamma}{\alpha}_h$ e $\overset{\gamma_1}{\alpha}_h$ costituiscono due soluzioni delle $m + \omega_{\gamma_1}$ equazioni

$$\sum_{k \in \gamma_1} a_{hk} \ddot{q}_k + \vartheta_h(q \ddot{q} t) = 0 \qquad h \in \underline{\gamma_1} ,$$

lineari nelle $m + \omega_{\gamma_1}$ incognite $\ddot{q}_k$ $(k \in \bar{\gamma}_1)$, e a matrice incompleta $\neq 0$; esse quindi coincidono. Per (37) e le ultime $(36)_1$, valgono allora tutte le $(38)_1$, onde, per le (34), anche le $(38)_2$. Analogamente nell'alternativa (37') ,sia le $\overset{\gamma}{\alpha}_h$ che le $\overset{\gamma_1}{\alpha}_h$, $(h \in \underline{\gamma})$ risolvono il sistema lineare determinato

$$\sum_{k \in \underline{\gamma}} a_{hk} \ddot{q}_k + \vartheta_h(q \mid \ddot{q} \mid t) = 0 \qquad h \in \underline{\gamma}$$

onde coincidono. Allora per le ultime (36) valgono di nuovo tutte le (38), onde, per (34), le $(38)_2$.

c. d. d.

N. 3. - **Introduzione di altri enti riferentisi all'** N-pla $\{q_h(t)\}$ **colle** $\dot{q}$ **continue e rispettanti i vincoli** (1).

Considero ora una generica N-pla di funzioni $q_h(t)$ continue colle $\dot{q}_h$, e rispettanti i vincoli (1). In relazione ad essa pongo per ogni t, $\Gamma_t = \Gamma_t^{(q)} =$ sottoclasse di Γ, luogo dei γ

per cui è

$$t \in \overline{R^{\gamma}} \quad [14] \tag{40}$$

Essendo gli R^{γ} aperti, la (40) dice che γ appartiene a Γ_t se e solo se t è punto d'accumulazione di istanti ξ per cui è

$$\begin{cases} q_h(\xi) > 0 & h \in \gamma \\ q_h(\xi) = 0 & h \in c\gamma . \end{cases} \tag{41}$$

Avverto che le (41) potrebbero valere per $\xi = t$ senza che γ appartenga a Γ_t. Per es. sia

$$q_h(\xi) = K(\xi - t)^2 \qquad h = m+1 \dots N$$

con K costante. In tal caso Γ_t contiene il solo insieme $\gamma^* = (m+1, \dots, N)$, dato che le (41) valgono per valori di ξ comunque prossimi a t, solo per $\gamma = \gamma^*$. Si osservi che non appartiene a Γ_t il sottoinsieme vuoto γ_0 di Γ nonostante le (41) valgano per $\xi = t$ e $\gamma = \gamma_0$. Pongo poi (in accordo con una convenzione fatta al n. 2 di § 1)

$$p_t = p_t^{(q)} = \prod_{\gamma' \in \Gamma_t} \gamma' \qquad s_t = \sum_{\gamma' \in \Gamma_t} \gamma', \tag{42}$$

inoltre, stanti le (36),

$$\begin{cases} \overset{\gamma}{\alpha}_h(t) = \overset{\gamma}{\alpha}{}_h^{(q)}(t) = \overset{\gamma}{\alpha}_h[q(t) \mid \dot{q}(t) \mid t] \\ \overset{\gamma}{\psi}_h(t) = \overset{\gamma}{\psi}{}_h^{(q)}(t) = \overset{\gamma}{\psi}_h[q(t) \mid \dot{q}(t) \mid t] \qquad (h=1, \dots, N) \end{cases} \tag{43}$$

e

$$\begin{cases} \overset{(q)}{\alpha}_h(t) = \overset{p_t}{\alpha}_h(t) = \overset{p_t^{(q)}}{\alpha}_h [q(t) \mid \dot{q}(t) \mid t] \\ \overset{(q)}{\psi}_h(t) = \overset{p_t}{\psi}_h(t) = \overset{p_t^{(q)}}{\psi}_h [q(t) \mid \dot{q}(t) \mid t] \qquad (h=1, \dots, N). \end{cases} \tag{43'}$$

---

[14]) Ove con $\bar{I}$ si intende la chiusura $I + \mathfrak{F}I$ dell'insieme I.

Osservo che p_t può non appartenere a Γ_t ; anzi possono esservi dei γ con

$$p_t \subseteq \gamma \subseteq s_t$$

che non siano elementi di Γ_t.

Si consideri ad esempio il caso

$$m = n - 3 \qquad e \qquad \Gamma_t = [(n-2,\ n-1),\ (n-1,\ n),\ (n,\ n-2)].$$

Essendo vuoto, p_t non appartiene a Γ_t.

Si ha poi

$$p_t \subset \gamma = (n-2,\ n-1,\ n) = s_t$$

senza che γ appartenga a Γ_t.

Però se t è in R, essendo esso interno a un certo R^γ, $p_t = \gamma$ è l'unico elemento di Γ_t.

Si badi infine che le proprietà di regolarità della $\mathfrak{T}$ e delle Q_h, supposte nell'osservazione (1) del N. 2, implicano la continuità delle $\overset{\gamma}{\alpha}_h$ e $\overset{\gamma}{\psi}_h$ $(\gamma \in \Gamma)$, non però in generale quella delle $\overset{(q)}{\alpha}_h(t)$ e $\overset{(q)}{\psi}_h(t)$, anche se il moto $q = \{q_h(t)\}$ ha le $\ddot{q}$ continue ed è consentito ad S dai vincoli [15]). Tali funzioni godono però della proprietà espressa dal teorema IV. Prima di esporlo preferisco introdurre altri enti che sebbene mi saranno necessari molto più avanti, sono simili alle $p_t^{(q)}$. Convengo cioè di indicare per ogni t, con γ_t l'elemento di Γ_t per cui è

$$(44) \qquad \begin{cases} q_j(t) > 0 & j \in \gamma_t \\ q_j(t) = 0 & j \in C\gamma_t \ (^{16}). \end{cases}$$

Si ha allora

$$(45) \qquad \gamma_t \subseteq \gamma \qquad t \in R^\gamma + \mathfrak{F}R^\gamma, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Infatti per $m+1 \leq j \leq N$ e $j \in \gamma_t$, per (44) è $q_j(t) > 0$, onde $q_j > 0$ in un intorno di t il quale, supposto t in $R^\gamma + \mathfrak{F}R^\gamma$, contiene certo un punto di R^γ.

---

[15]) Tale implicazione sossiste se le $q_k(t)$ sono anche regolari se tali al confine e risolvono in senso lato le equazioni di Lagrange, come sarà dimostrato nel teorema VIII.

[16]) Ricordo che è $c\gamma_t = (m+1, \ldots, N) - c\gamma_t$.

Essendo $q_j > 0$ ivi, lo è, per (29), in tutto R^γ. È dunque $j \in \gamma$ onde la (45).

Dalla definizione (42) di p_t, stante la (41) si ha che vale la

$$\gamma_t \subseteq p_t \tag{46}$$

potendo valere l'inclusione effettiva, come ad esempio nel caso

$$q_j(t) = k(t - \bar{t})^2 \qquad (j = m+1, \dots, N)$$

con k costante. In tal caso infatti le (44) valgono con $\gamma_{\bar{t}}$ vuoto mentre è $p_t = (m + 1, \dots, N)$.

N. 4. - Ulteriori proprietà degli enti introdotti precedentemente.

TEOREMA IV - *Se per l'istante t, qualunque siano γ e $\gamma' \in \Gamma$, si ha l'implicazione*

$$t \in \mathfrak{F}R^\gamma \cdot \mathfrak{F}R^{\gamma'} \quad \textit{implica} \quad \overset{\gamma}{\alpha}_h(t) = \overset{\gamma'}{\alpha}_h(t) \qquad (h=1 \dots N) \tag{47}$$

allora per ogni γ in Γ_t risulta

$$\overset{\gamma}{\alpha}_h(t) = \overset{p_t}{\alpha}_h(t) \quad \overset{\gamma}{\psi}_h(t) = \overset{p_t}{\psi}_h(t) \qquad (h=1 \dots N),\ \gamma \in \Gamma_t \tag{48}$$

si ha anche, stanti le posizioni (27), (42), *e* (43),

$$\left\{\begin{array}{ll} \overset{p_t}{\alpha}_h(t) = \overset{\gamma}{\alpha}_h(t) = 0 & h \in Cp_t \\ \overset{p_t}{\psi}_h(t) = \overset{\gamma}{\psi}_h(t) = 0 & h \subset s_t \end{array}\right. \qquad \gamma \subset \Gamma_t \tag{49}$$

Infatti l'asserto è ovvio per t interno a qualche R^γ.

Sia ora t in CR. Si fissi γ in Γ_t onde è $t \in \mathfrak{F}R^\gamma$.

Fissato comunque h in $\gamma_2 = \gamma - p_t$, per (42) esiste in Γ_t un γ' non contenente h che per costruzione di Γ_t soddisfa la

$$t \in \mathfrak{F}R^{\gamma'}.$$

Per la supposta implicazione (47), vale la tesi di questa onde per le ultime $(36)_1$ è $\overset{\gamma}{\alpha}_h = \overset{\gamma'}{\alpha}_h = 0$. Si può concludere anzi

$$\overset{\gamma}{\alpha}_h(t) = 0 \qquad h \in \gamma_2 \ (\gamma_2 = \gamma - p_t).$$

Essendo

$$\gamma = p_t + (\gamma - p_t) \quad \text{con} \quad p_t \cdot (\gamma - p_t) \ \text{vuoto},$$

in base al teorema III [nel cui enunciato si ponga $\gamma_1 = p_t$, $\gamma_2 = \gamma - p_t$], segue

$$\overset{\gamma}{\alpha}_h = \overset{p_t}{\alpha}_h \quad \overset{\gamma}{\psi}_h = \overset{p_t}{\psi}_h \qquad (h = 1 \ldots N)$$

e

$$(39') \qquad \overset{\gamma}{\alpha}_j = 0, \qquad \overset{p_t}{\psi}_j = 0 \qquad j \in \gamma - p_t.$$

Valgono dunque le eguaglianze (48) e, tenendo conto delle (36), le $(49)_1$. Poichè fissato comunque h in s_t per (42) esiste un γ in Γ_t contenente h, le $(39')_2$, $(48)_2$ e $(36)_2$ implicano le eguaglianze $(49)_2$.

* * *

TEOREMA V - *Per $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_2 \subset \Gamma$ (con γ_0, γ_1, γ_2 prive di elementi comuni) all'istante t, sia*

$$(50) \qquad \begin{array}{lll} \overset{\gamma_0+\gamma_1}{\alpha_k} \geq 0 & \overset{\gamma_0+\gamma_2}{\psi_k} \geq 0 & k \in \gamma_1 \\ \overset{\gamma_0+\gamma_2}{\alpha_h} \geq 0 & \overset{\gamma_0+\gamma_1}{\psi_h} \geq 0 & k \in \gamma_2. \end{array}$$

Al medesimo istante valgono allora anche le

$$(51) \qquad \alpha_h^* = \overset{\gamma_0+\gamma_1}{\alpha_h} = \overset{\gamma_0+\gamma_2}{\alpha_h}, \quad \psi^* = \overset{\gamma_0+\gamma_1}{\psi_h} = \overset{\gamma_0+\gamma_2}{\psi_h} \qquad (h = 1 \ldots N)$$

e risulta

$$(51') \qquad \alpha_h^* = 0 \quad \psi_h^* = 0 \qquad h \in \gamma_1 + \gamma_2$$

Infatti dalle (34) e (36) segue

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_{hk} \overset{\gamma_0+\gamma_1}{\alpha_k} + \vartheta_h = \overset{\gamma_0+\gamma_1}{\psi_h} \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_{hk} \overset{\gamma_0+\gamma_2}{\alpha_k} + \vartheta_h = \overset{\gamma_0+\gamma_2}{\psi_h} \end{cases} \qquad (h=1 \dots N). \tag{52}$$

Posto

$$x_h = \overset{\gamma_0+\gamma_2}{\alpha_h} - \overset{\gamma_0+\gamma_1}{\alpha_h} \qquad (h=1 \dots N) \tag{53}$$

onde

$$\begin{cases} x_h = \overset{\gamma_0+\gamma_2}{\alpha_h} & h \in \gamma_2 \\ x_h = - \overset{\gamma_0+\gamma_1}{\alpha_h} & h \in \gamma_1 \\ x_h = 0 & h \in C(\gamma_0+\gamma_1+\gamma_2) \end{cases} \tag{54}$$

le (52) sottratte membro a membro danno

$$\sum_{k \in \underline{\gamma}_0+\gamma_1+\gamma_2} a_{hk} x_k = \sum_{k=1}^{N} a_{hk} x_k = \overset{\gamma_0+\gamma_2}{\psi_h} - \overset{\gamma_0+\gamma_1}{\psi_h} \qquad (h=1 \dots N) \tag{55}$$

Ma essendo per (36)

$$\overset{\gamma_0+\gamma_1}{\psi_h} = 0 \quad h \in \underline{\gamma}_0 + \gamma_1, \qquad \overset{\gamma_0+\gamma_2}{\psi_h} = 0 \quad h \in \underline{\gamma}_0 + \gamma_2,$$

e dato che le a_{hk} sono i coefficienti di una forma definita positiva, da (55), per (54) segue

$$0 \leq \sum_{h,\, k \in \underline{\gamma}_0+\gamma_1+\gamma_2} a_{hk} x_h x_k = \sum_{h \in \underline{\gamma}_0+\gamma_1+\gamma_2} x_h \left(\overset{\gamma_0+\gamma_2}{\psi_h} - \overset{\gamma_0+\gamma_1}{\psi_h} \right) =$$

$$= - \sum_{h \in \gamma_1} \overset{\gamma_0+\gamma_1}{\alpha_h} \overset{\gamma_0+\gamma_2}{\psi_h} - \sum_{h \in \gamma_2} \overset{\gamma_0+\gamma_2}{\alpha_h} \overset{\gamma_0+\gamma_1}{\psi_h} .$$

Per le ipotesi (50), l'ultimo membro di (56) è ≤ 0, onde la (56) può sussistere solo se è

$$\sum_{h,k \in \gamma_0+\gamma_1+\gamma_2} a_{hk} x_h x_k = 0$$

da cui, per $(54)_3$ e ancora il significato meccanico delle a_{hk}, è

$$x_h = 0 \qquad (h = 1 \dots N)$$

onde per (53), le (51).

N. 5. - **Ultime considerazioni preliminari.**

DEFINIZIONE 7ª - *Dirò che* $\delta_I(\varepsilon)$ *è un modulo di continuità della funzione* $f(x)$ *nell'insieme* I*, se per ogni* $\varepsilon > 0$, ε *è superiore ai valori assunti da* $|f(x_2) - f(x_1)|$ *al variare di* x_1 *e* x_2 *in* I *verificando la*

$$(56) \qquad |x_2 - x_1| < \delta_I(\varepsilon).$$

TEOREMA VI - *Per la considerata* N*-pla* $q = \{q_h(t)\}$ *definita in* $\overline{t_1 t_2}$, *colle* $\dot{q}_h$ *continue, valga l'implicazione* (47), *onde sussistono le eguaglianze* (48). *Le* Q_h *e l'energia cinetica* $\mathcal{T}$ *siano funzioni continue di* q, $\dot{q}$, t. *Allora le* $\overset{(q)}{\alpha}_h(t)$ *e* $\overset{(q)}{\psi}_h(t)$ *date da* (43') *sono continue e hanno per comune modulo di continuità*

$$(57) \qquad \overset{*}{\delta}_{\overline{a\,b}}(\varepsilon) = \delta_{\overline{a\,b}}\left(\frac{\varepsilon}{2^{N-m}}\right) \qquad \overline{a\,b} \subset \overline{t_1 t_2}.$$

$\delta_{\overline{a\,b}}(\varepsilon)$ *essendo un modulo di continuità comune alla* $\overset{\gamma}{\alpha}_h(t)$, $\overset{\gamma}{\psi}_h(t)$ $(h = 1, \dots, N)$.

Infatti, dato $\varepsilon > 0$, presi in $\overline{a\,b}$ η_1 e η_2 con $0 < \eta_2 - \eta_1 < \overset{*}{\delta}_{\overline{a\,b}}(\varepsilon)$, esistono ν istanti $\eta_1 = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_\nu = \eta_2$ con $\nu \leq 2^{N-m}$ e ξ_{r-1}, ξ_r in uno stesso $R^{\gamma_r} + \mathfrak{F}R^{\gamma_r}$ $(\gamma_r \in \Gamma)$ $(r = 2 \dots \nu)$. Allora, essendo ovviamente $| \xi_r - \xi_{r-1} | < \overset{*}{\delta}_{\overset{\vdash\dashv}{a\,b}}(\varepsilon)$ $(r = 2 \dots \nu)$ e valendo le (48), è

$$| \alpha_h(\eta_2) - \alpha_h(\eta_1) | \leq \sum_{r=1}^{\nu} | \alpha_h(\xi_r) - \alpha_h(\xi_{r-1}) | =$$

$$= \sum_{r=1}^{\nu} | \overset{\gamma_r}{\alpha_h}(\xi_r) - \overset{\gamma_r}{\alpha_h}(\xi_{r-1}) | \leq \frac{\nu\varepsilon}{2^{N-m}} \leq \varepsilon$$

onde l'asserto.

* * *

TEOREMA VII - *A sia un insieme aperto su* $\overset{\vdash\dashv}{a\,b}$, *ove le* $f(x)$ *e* $g(x)$ *siano continue. Sia poi*

$$g(x) = f'(x) \qquad \text{in } A \tag{58}$$

$$f(x) = 0 \qquad \text{in } \overset{\vdash\dashv}{a\,b} - A \tag{59}$$

$$g(x) = 0 \qquad \text{in } D(\overset{\vdash\dashv}{a\,b} - A), \tag{60}$$

(*D indicando l'operazione di derivazione di insiemi*).

Allora $f'(x)$ *esiste in tutto* $\overset{\vdash\dashv}{a\,b}$ *ed è*

$$g(x) = f'(x) \qquad a \leq x \leq b. \tag{61}$$

Infatti siano $\overset{\vdash\dashv}{a_k\,b_k}$ $(k = 1, 2 \dots)$ gli intervalli associati ad A, per cui a_k e b_k non appartengono ad A $(k = 1, 2 \dots)$ ed è

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k b_k}\,.$$

Per (58) e (59) risulta

$$\int_{\xi}^{\eta} g(x)dx = f(\eta) - f(\xi) \qquad \text{per} \qquad \overset{\vdash\dashv}{\xi\,\eta} \subseteq \overset{\vdash\dashv}{a_k\,b_k} \qquad (k, 1, 2, \dots)$$

onde in particolare

$$(62') \qquad \int_{a_k}^{b_k} g(x)dx = 0 \qquad (k = 1,\ 2 \ldots).$$

Sia ora x_0 in $\overset{|-|}{a\,b} - A$ onde $f(x_0) = 0$.

Essendo $g(x)$ sommabile, per ogni x di $\overset{|-|}{a\,b}$, si ha per (62)

$$\int_{x_0}^{x} g(x)dx = \int_{\overset{|-|}{x_0\,x} - A} g dx + \int_{\overset{|-|}{x_0\,x} \cdot A} g dx = 0 +$$

$$+ \sum_{\overset{|-|}{a_k\,b_k} \subseteq \overset{|-|}{x_0\,x}} \int_{a_k}^{b_k} g dx + I_x = I_x$$

con

$$I_x = \begin{cases} \displaystyle\int_{a_n}^{x} g(t)dt = f(x) - 0 & \text{se vi è un } n \text{ con } a_n \leq x < b_n \\ 0 & \text{per } x \in \overset{|-|}{a\,b} - A. \end{cases}$$

Dunque è ovunque un $\overset{|-|}{a\,b}$

$$\int_{x_0}^{x} g(t)dt = f(x)$$

da cui, per la continuità di $g(x)$, segue la (61).

c. d. d.

Osservo che il Teor. VII non è più valido appena si tolga l'ipotesi (59), anche se è mis $[\overset{|-|}{a\,b} - A] = 0$.

Infatti, allora le condizioni (58) e (60) possono essere soddisfatte oltre che da $f(x)$ e $g(x)$, da $f(x) + \varphi(x)$ e $g(x)$, essendo $\varphi(x)$ una qualunque funzione continua in $\overset{\vdash\dashv}{a\,b}$, e a derivata nulla in A, ma con

$$\varphi(a) \neq \varphi(b) \quad ^{17})$$

§ 3. - PROPRIETA' DELLE SOLUZIONI IN SENSO LATO, REGOLARI SE TALI AL CONFINE E CON VELOCITA' CONTINUE

TEOREMA VIII - *Il moto* $\{q_h(t)\}$ *sia di tipo* MS [18]), *ossia valgano le seguenti ipotesi:*

IPOTESI 1ª - *Per* $h, k, l, = 1 \dots N$ le $Q_h(q \mid \dot{q} \mid t)$ *e le funzioni*

$$(63) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_{hk}(q \mid t), \dfrac{\partial a_{hk}}{\partial q_l}, \dfrac{\partial a_{hk}}{\partial t} \\[2ex] b_{hk}(q \mid t), \dfrac{\partial b_h}{\partial q_k}, \dfrac{\partial b_h}{\partial t} \\[2ex] d(q \mid t), \dfrac{\partial d}{\partial q_h}, \dfrac{\partial d}{\partial t} \end{array} \right.$$

siano continue.

IPOTESI 2ª - *In* $t_1\,t_2$ *le* $\dot{q}_h(t)$ *siano continue colle* $\ddot{q}_h(t)$ *e verifichino le* (1).

IPOTESI 3ª - *Le* $q_h(t)$ *in* $\overline{t_1\,t_2}$ *risolvano in senso lato rispetto alle* (1) *il problema dinamico di* S, *cosicchè per*

$$\xi\,\bar{\eta} \subset R = \sum_{\gamma \in \Gamma} R\gamma$$

---

17) Funzioni di questo tipo sono per es. le corrispondenze di CANTOR.

18) Vedi def. 6 del n. 1 di § 1, essendo S il sistema introdotto nella prefazione e nel n. 1 di § 1.

le $\ddot{q}_h$ siano continue in $\xi\eta$ e per t in R si abbia, valendo le (36) *e* (42),

$$(64)\qquad \begin{cases} \ddot{q}_h(t) = \overset{p_t}{\alpha_h}[q(t)\,|\,\dot{q}(t)\,|\,t] = \overset{(q)}{\alpha_h}(t) \\ \overset{p_t}{\psi_h}[q(t)\,|\,\dot{q}(t)\,|\,t] = \overset{(q)}{\psi_h}(t) \geq 0 \end{cases} \qquad (h=1 \dots N).$$

IPOTESI 4ª - *L'n-pla $\{q_h(t)\}$ sia regolare se tale al confine secondo la definizione 4ª.*

Valgono allora le seguenti tesi:

TESI Iª - *Le $\overset{(q)}{\alpha_h}(t)$ e $\overset{(q)}{\psi_h}(t)$ $(h = 1 \dots N)$ [date da (43')] verificano (48) e (49) in tutto $\overline{t_1 t_2}$ e ivi sono continue col modulo $\delta^*_{\overset{|-|}{a\ b}}(\varepsilon)$ dato da (57).*

TESI IIª - *Le $\ddot{q}_1(t), \dots, \ddot{q}_N(t)$ esistono continue in $\overline{t_1 t_2}$, e le (64) sussistono in tutto $\overline{t_1 t_2}$ (estremi finiti inclusi).*

La tesi seconda in effetti esprime che per ogni t in $\overline{t_1 t_2}$, stante $(27)_3$ e $(42)_1$ le $m + \omega_{p_t}$ $q_h(t)$ $(h \in p_t)$, soddisfano le $m + \omega_{p_t}$ equazioni di Lagrange pure, relative al sistema S_{p_t} (a $m + \omega_{p_t}$ gradi di libertà) ottenuto da S sostituendo ai vincoli unilaterali (1) i vincoli bilaterali

$$q_j = 0 \qquad j \in (m+1, \dots, N) - p_t$$

DIMOSTRAZIONE. - Osservo che vi è un intero ν con

$$(65)\qquad 0 \leq \nu \leq N - m$$

per cui è soddisfatta la seguente

CONDIZIONE I_ν. *Esiste in Γ un γ verificante [stante $(27)_3$] le* [19])

$$(66)\qquad \overline{t_1 t_2} \subseteq \prod_{j \in \gamma} R_j, \qquad \omega_\gamma = (N - m) - \nu.$$

Per dimostrare il teorema basta allora provare che per ogni intero ν le ipotesi 1ª, ..., 4ª e le condizioni (65) e I_ν implicano le tesi I e II. Ma tale implicazione, che dirò J_ν vale certo per $\nu = 0$. Infatti, allora è per $(66)_2$, $\omega_\gamma = N - m$,

---

[19]) ν è il numero di vincoli unilaterali toccati dal sistema almeno ad un istante dell'intervallo $\overline{t_1 t_2}$.

onde $\gamma = (m+1, \dots, N)$, da cui per (66), e (30), è $\overline{t_1 t_2} \subset R$, onde le tesi I e II si possono considerare contenute nelle ipotesi 2ª e 3ª.

Suppongo ora valida J_ν per ν intero ≥ 0.

Volendo dimostrare l'implicazione $J_{\nu+1}$, comincio col supporre valide, oltre le ipotesi 1ª ... 4ª e J_ν, anche le

$$0 \leq \nu + 1 \leq N - m \tag{65'}$$

e, per un certo γ' di Γ, la

$$\overline{t_1 t_2} \subset \prod_{j \in \gamma'} R_j \qquad \omega_{\gamma'} = N - m - \nu - 1. \tag{66'}$$

Allora per $s \in (m+1, \dots, N) - \gamma'$, posto

$$\gamma = \gamma' + (s), \tag{67}$$

vale la $(66)_2$.

Siano $\overline{a_k b_k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ i tratti associati a R_s, (certo appartenenti a $\overline{t_1 t_2}$), così che per definizione, mentre le a_k e b_k non sono in R_s, è

$$\sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k b_k} = R_s$$

onde per (66') vale anche la

$$\overline{a_k b_k} \subseteq \prod_{j \in \gamma} R_j \qquad k = 1, 2 \dots. \tag{68}$$

Per ogni intero positivo k, per il sistema $\mathcal{S}$ e le $q_h(t)$ in $\overline{a_k b_k}$ è dunque soddisfatta, oltre le ipotesi 1ª, ..., 4ª, la condizione I_ν. Valendo anche la (65) in conseguenza di (65'), applicando la supposta implicazione J_ν, si ha il seguente

1° PASSO - *Nelle ipotesi* (65') *e* (66'), *in corrispondenza ad un qualunque* s *scelto in* $(m+1, \dots, N) - \gamma'$, *le tesi* 1ª *e* 2ª *valgono in ciascuno degli intervalli* $\overline{a_k b_k}$ $(k = 1, 2 \dots)$ *presi singolarmente.*

Come corollario si ha poi che, *preso comunque* $\overline{t_3 t_4}$ *in* $\overline{t_1 t_2}$, *per ogni* $\overline{a_k b_k} \subset \overline{t_3 t_4}$, *le* $\overset{\nu_t}{\alpha_h}(t)$ *e* $\overset{\nu_t}{\psi_h}(t)$ $(h = 1 \dots N)$, *date da* (43'), *sono continue in* $\overline{a_k b_k}$ *con modulo* $\delta^*_{\overline{t_3 t_4}}(\varepsilon)$ *dato da* (57) *e indipendente da* k.

Infatti per la tesi 1ª, valida in virtù del 1° passo in ogni $\overline{a_k\, b_k} \subset \overline{t_3\, t_4}$, le $\overset{p_t}{\alpha_h}(t)$, $\overset{p_t}{\psi_h}(t)$ sono ivi continue con modulo $\overset{*}{\delta}_{\overline{a_k b_k}}(\varepsilon)$, ed è certo

$$\overset{*}{\delta}_{\overline{a_k b_k}}(\varepsilon) \geq \overset{*}{\delta}_{\overline{t_3 t_4}}(\varepsilon) \qquad \overline{a_k\, b_k} \subset \overline{t_3\, t_4} \quad k = 1, 2 \dots . \tag{69}$$

Osservo che però finora non è dimostrato se $\overline{t_1\, t_2} \cdot R_s = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k b_k}$ sia un insieme di continuità per le $\overset{(q)}{\alpha_h}(t)$, $\overset{(q)}{\psi_h}(t)$ e tanto meno se lo sia $\overline{t_1\, t_2}$.

* * *

2° PASSO - *Nelle ipotesi* (65′) *e* (66′), *se è*

$$\xi \in \mathfrak{F}R^{\vartheta}, \qquad \vartheta \in \Gamma, \qquad t_1 < \xi < t_2, \tag{70}$$

si ha

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overset{\vartheta}{\alpha}_j(\xi) \geq 0 \quad j \in (m+1, \dots, N) - \gamma_{\xi} & \text{[ossia per ogni } j = m + 1 \dots N \text{ per cui sia } q_j(\xi) = 0] \\ \overset{\vartheta}{\psi}_h(\xi) \geq 0 \quad (h = 1 \dots N) \quad [20]. & \end{array} \right. \tag{71}$$

Infatti, stante la (70), considerato l'insieme γ_{ξ} definito dalle (44) in cui si faccia $t = \xi$, esiste certo un indice s, in ϑ e non in γ_{ξ}, per cui cioè si ha

$$s \in \vartheta - \gamma_{\xi}. \tag{72}$$

Allora, scelti t_3 e t_4 con

$$t_1 < t_3 < \xi < t_4 < t_2, \tag{73}$$

---

20) La $(71)_2$ non è contenuta nell'ipotesi che la $\{q_k(t)\}$ risolva le equazioni del LAGRANGE in senso lato perchè non si è ancora riconosciuto nemmeno alle $\overset{p_t}{\psi_h}(t)$ $(h = 1 \dots N)$ il significato di componenti lagrangiane delle reazioni vincolari competenti al moto $\{q_k(t)\}$.

mentre per (44) è $q_s(\xi) = 0$, per (70) esiste in $\overline{t_3 t_4} \cdot R^\gamma$ una successione di punti ξ_r $(r = 1, 2 \dots)$ con

$$(74) \qquad \lim_{r \to \infty} \xi_r = \xi, \quad q_s(\xi) > 0, \quad t_3 < \xi_r < t_4 \qquad r = 1, 2 \dots.$$

Essendo $\overline{a_k b_k}$ $(k = 1, 2 \dots)$ i tratti associati ad R_s, esiste una successione k_r $(r = 1, 2 \dots)$ con

$$(75) \qquad a_{k_r} < \xi_r < b_{k_r}.$$

Ma per il 1° Passo, la seconda tesi affermante la continuità delle $\ddot{q}_h$ vale in $\overline{a_{k_r} b_{k_r}}$ e per definizione di R_s si ha

$$q_s(a_{k_r}) = q_s(b_{k_r}) = 0 \qquad r = 1, 2, \dots .$$

Allora in base alle $(74)_2$ e (75), per $r = 1, 2 \dots$ esiste un η_r per cui è

$$(76) \qquad a_{k_r} < \eta_r < b_{k_r}$$

anzi

$$(76') \qquad \xi \leq a_{k_r} < \eta_r < \xi_r < b_{k_r}$$

o

$$(76'') \qquad a_{k_r} < \xi_r < \eta_r < b_{k_r} \leq \xi$$

a seconda che è $\xi < \xi_r$ o $\xi_r < \xi$, ed inoltre si ha

$$(77) \qquad \alpha_s(\eta_r) = \ddot{q}_s(\eta_r) > 0 \qquad r = 1, 2 \dots .$$

Poichè pel teor. II la regione R di regolarità [rispetto alle (1)] è ovunque densa in $\overline{t_1 t_2}$, per la continuità di $\ddot{q}_s(t)$ in $\overline{a_{k_r} b_{k_r}}$, e per (76) e (77), si possono supporre gli η_r in R.

Tali η_r possono non appartenere ad R_ϑ, ma poichè Γ ha un numero finito (2^{N-m}) di elementi per la (31) esiste un elemento δ di Γ (eventualmente $\delta = \vartheta$) con R^δ contenente infiniti η_r. Per semplicità suppongo, come è lecito, che li contenga tutti. Per costruzione — vedi (43) e (36) —, in base all'ipotesi 1ª, le $\overset{\gamma}{\alpha}_s(t)$, $\overset{\delta}{\alpha}_s(t)$ sono continue in tutto $t_1 t_2$ con modulo $\overset{*}{\delta}_{\overline{t_3 t_4}}(\varepsilon)$, ed è

$$(78)\qquad |\overset{\vartheta}{\alpha}_s(\xi) - \overset{\delta}{\alpha}_s(\eta_r)| \leq |\overset{\vartheta}{\alpha}_s(\xi) - \overset{\vartheta}{\alpha}_s(\xi_r)| + |\overset{\vartheta}{\alpha}_s(\xi_r) - \overset{\delta}{\alpha}_s(\eta_r)|\,.$$

Dato $\varepsilon > 0$, per (74), si può prendere un r in modo che sia, stante (57),

$$(79)\qquad |\xi_r - \xi| < \delta^*_{\overset{|-|}{t_3\, t_4}}(\varepsilon/2).$$

Ma pel primo passo in $\overline{a_{k_r} b_{k_r}}$ vale la tesi 1ª, quindi le $\overset{p_t}{\alpha^h}(t)$ date da (43) verificano le (48) e (per il corollario) sono continue ivi con modulo $\delta^*_{\overset{|-|}{t_3\, t_4}}(\varepsilon)$.

Poichè oltre a ciò da (79) per (76′) o (76″) segue

$$|\xi_r - \eta_r| < \delta^*_{\overset{|-|}{t_3\, t_4}}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

valendo in $\overline{a_{k_r} b_{k_r}}$, come ho detto, le $(48)_1$, si ha

$$|\overset{\vartheta}{\alpha}_s(\xi_r) - \overset{\delta}{\alpha}_s(\eta_r)| = |\overset{p_t}{\alpha}_s(\xi_r) - \overset{p_t}{\alpha}_s(\eta_r)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

onde (78) dà, per (79)

$$(80)\qquad |\overset{\vartheta}{\alpha}_s(\xi) - \overset{\delta}{\alpha}_s(\eta_r)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ma per (77) è $\alpha_s(\eta_r) = \overset{\delta}{\alpha}_s(\eta_r) > 0$, onde per la arbitrarietà di $\varepsilon (> 0)$, (80) dà

$$\overset{\vartheta}{\alpha}_s(\xi) \geq 0.$$

È dunque assodata la validità di $(75)_1$, per $j \in \vartheta - \gamma_{\xi}$.

Per $j \in (m+1, \ldots, N) - \gamma_{\xi}$, essa vale per costruzione — vedi (36) — come uguaglianza.

Quanto alle $(71)_2$, esse valgono per (70) e per la continuità in $\overline{t_1\, t_2}$ delle $\overset{\vartheta}{\psi}_h(t)$ espresse da (36) e (43) e per la validità delle

$$\psi_h(t) \geq 0 \qquad t \in R^{\vartheta} \qquad (h = 1 \ldots N)$$

dovuta al fatto che in R^{ϑ}, per l'ipotesi 3ª le $q_h(t)$ risolvono le equazioni di Lagrange di S, in senso lato.

3° PASSO - *Stanti le* (65') *e* (66') *in* $\overline{t_1 t_2}$ *vale la tesi* 1ª.
Infatti sia

$$(81) \qquad \xi \in \mathfrak{F}\overset{\vartheta}{R} \cdot \mathfrak{J}\overset{\delta}{R} \qquad \vartheta, \delta \in \Gamma \qquad t_1 < \xi < t_2 .$$

La (45) con $t = \xi$ in cui per (81) non può valere il segno $=$, è allora

$$\vartheta \supset \gamma_\xi , \qquad \delta \supset \gamma_\xi$$

Onde

$$\vartheta - \delta \subset (m+1 \ldots, N) - \gamma_\xi$$

$$\delta - \vartheta \subset (m+1, \ldots, N) - \gamma_\xi .$$

Applicando il 2° Passo si ha

$$\begin{cases} \overset{\vartheta}{\alpha}_h(\xi) \geq 0 & \overset{\vartheta}{\psi}_h(\xi) \geq 0 & h \in \vartheta - \delta \\ \overset{\delta}{\alpha}_h(\xi) \geq 0 & \overset{\delta}{\psi}_h(\xi) \geq 0 & h \in \delta - \vartheta . \end{cases}$$

Queste coincidono colle (50) per $\gamma_0 = \vartheta - \delta$, $\gamma_1 = \vartheta - \delta$ $\gamma_2 = \vartheta + \delta$.

Per il teorema V, valgono allora le (51) scritte nella forma

$$(82) \qquad \overset{\vartheta}{\alpha}_h(\xi) = \overset{\delta}{\alpha}_h(\xi) \qquad \overset{\vartheta}{\psi}_h(\xi) = \overset{\delta}{\psi}_h(\xi) \qquad (h=1 \ldots N).$$

Dunque per ϑ, $\delta \in \Gamma$ da (81) segue (82), e ciò costituisce l'implicazione (47). Allora per il teorema IV le (48), (49) valgono per ogni ξ in $\overline{t_1 t_2}$, e per il teorema VI, stante l'ipotesi 1ª, le $\overset{(q)}{\alpha}_h(t)$ e $\overset{(q)}{\psi}_h(t)$ $(h = 1 \ldots N)$, date da (43') sono continue in tutto $\overline{t_1 t_2}$ con modulo di continuità $\overset{*}{\delta}_{\overline{t_3 t_4}}(\varepsilon)$ per $\overline{t_3 t_4}$ variabile in $\overline{t_1 t_2}$.

Le $(64)_2$ valgono certo per ragioni sopraddette in tutto $\overline{t_1 t_2}$.

Tenendo conto anche dell'ipotesi 4ª, finora non usata, si può stabilire

4° PASSO - *Stanti le* (65'), (66') *la tesi II vale in tutto* $\overline{t_1 t_2}$.

Poiche le $\overset{(b)}{\psi}_h(t)$ date da $(43')_2$, come si è or ora stabilito sono continue in $\overline{t_1 t_2}$ e le $(64)_2$ valgono per l'ipotesi 3ª nella regione R di regolarità la quale pel teorema II è densa su $\overline{t_1 t_2}$, si può intanto affermare la validità di esse in tutto $\overline{t_1 t_2}$.

Per dimostrare le (64), indico con $\varkappa$ l'elemento di Γ tale che se e solo se è $h \in \varkappa$, $q_h(t)$ si annulla per almeno un t di $\overline{t_1 t_2}$. Sia ora $h \in \varkappa$. Se fosse $q_h(t) \equiv 0$, la $(64)_1$ per tale h varrebbe certamente.

Si consideri ora il caso rimasto, per cui $\mathfrak{F}R_h = \overline{t_1 t_2} - R_h$ non è vuoto. Sia $t \in \mathfrak{F}R_h$, anzi valga la

$$t \in D\mathfrak{F}R_h \tag{83}$$

(D indicando l'operazione di derivazione di insieme).

Detti $\overline{a_k b_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ gli intervalli associati a R_h esiste una successione $\overline{a_{h_r}\ {}_{k_r}}$ $(r = 1, 2, \ldots)$ con

$$\lim_{r \to \infty} a_{k_r} = \lim_{r \to \infty} b_{k_r} = t. \tag{84}$$

Essendo per costruzione di R_h, $q_h(a_{k_r}) = q_h(b_{k_r}) = 0$, per le (1) e a supposta continuità delle $q_h(t)$ è anche

$$\dot q_h(a_{k_r}) = \dot q_h(b_{k_r}) = 0 \qquad r = 1, 2 \ldots. \tag{85}$$

Per il 1° Passo in $\overline{a_k b_{k_r}}$ le $\ddot q_h(t)$ sono continue. Allora, essendolo ivi pure le $q_h(t)$ e $\dot q_h(t)$, per (85) esiste ivi un η_r con

$$\alpha_h(\eta_r) = \ddot q_h(\eta_r) = 0 \qquad r = 1, 2 \ldots$$

onde per (84)

$$a_h(t) = \lim_{r \to \infty} \alpha_h(\eta_r) = 0 \qquad h \in \varkappa.$$

Tenendo conto che pel 1° passo le tesi 1ª e 2ª valgono in ogni intervallo appartenente a R_h, le ipotesi del teorema VI sono dunque verificate per qualunque $a\,b \subset \overline{t_1\,t_2}$ [21]) assumendo

$$A = R_h \cdot \overset{\vert\!-\!\vert}{a\;b} \qquad f(t) = \dot{q}_h(t) \qquad g(t) = \alpha_h(t) \qquad\qquad h \in \varkappa .$$

Ne risulta l'esistenza di $\ddot{q}_h(t)$ e la validità di (64), in tutto $\overset{\vert\!-\!\vert}{a\;b}$ quindi in tutto $\overline{t_1\,t_2}$ per $h \in \varkappa$.

Applicando a questo punto l'ipotesi IV segue l'esistenza e continuità di tutte le $\ddot{q}_h(t)$ in tutto $\overline{t_1\,t_2}$. Per l'ipotesi III e l'essere R denso su $\overline{t_1\,t_2}$ segue poi la validità di tutte le $(64)_1$ in tutto $\overline{t_1\,t_2}$. Vale cioè il passo 4°. Con ciò risulta dimostrata l'implicazione $J_{\nu+1}$, onde per quel che si è detto all'inizio della dimostrazione è vero il teorema.

c. d. d.

§ 4. - CONSEGUENZE MECCANICHE DEI PRECEDENTI TEOREMI

N. 1. - **Identificazione delle reazioni vincolari effettive e loro annullarsi al distacco.**

TEOREMA IX - *Il moto* $\{q_h(t)\}$ *sia di tipo* $\mathfrak{M}\mathfrak{T}_{\mathfrak{S}}$ [22]).

Posto, stanti le $(42)_1$ e $(36)_2$,

$$\Phi_h(t) = \overset{(q)}{\psi}_h(t) = \overset{(p_t)}{\psi}_h[q(t) \mid \dot{q}(t) \mid t] \qquad (h = 1, \dots, N), \tag{86}$$

tali $\Phi_h(t)$ — che pel teor. VIII sono continue assieme alle $\ddot{q}_h(t)$ e che assieme al moto $\{q_h(t)\}$ verificano in tutto $\overline{t_1\,t_2}$ (estremi finiti inclusi) le equazioni di Lagrange (8) — ***hanno il significato di reazioni vincolari effettive, in quanto verificano le*** (6) ***e, per*** $j = m+1, \dots, N$, ***la*** $(7)_1$. ***ossia è*** $\Phi_j(t) = 0$, ***appena sia*** $q_j(t) > 0$.

Infatti le $(6)_1$ valgono per costruzione nella regione di regolarità e quindi in tutto $\overline{t_1\,t_2}$ per la continuità ivi delle

21) In $\overline{t_1\,t_2}$ intendo qui inclusi gli estremi al finito.

22) Secondo la def. 6 del n. 1, § 4.

$\Phi_1(t), \ldots, \Phi_m(t)$ e per essere R denso su $\overline{t_1 t_2}$. Le $(6)_2$ sono incluse nelle $(64)_2$ il cui sussistere in tutto $\overline{t_1 t_2}$ è affermato nella tesi 2ª del teor. VIII.

Per un t al finito e in $\overset{\vdash\dashv}{t_1 t_2}$ e per una $j = m+1, \ldots, N$ si abbia:

$$q_j(t) > 0$$

Allora esiste certo un γ in Γ (precisamente in Γ_t) tale che secondo (40) t sia punto di accomulazione per l'insieme R definito da (29). Ma come ho osservato fra le formule (43') e (44) per ξ in R^γ è $p_\xi = t$ onde per ξ in un conveniente intorno J di t per cui sia $q_j(\xi) > 0$, per costruzione delle ψ^γ_h e la (86) è

$$\Phi_j(\xi) = \overset{(\gamma)}{\psi_j}[q(\xi) \mid \dot{q}(\xi) \mid \xi] = 0 \qquad \xi \in R^\gamma \cdot J.$$

Per la continuità di Φ_j è allora $\Phi_j(t) = 0$.

c. d. d.

COROLLARIO - *Il moto* $\{q_h(t)\}$ *sia di tipo* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$ [23]) *e per uno* μ *dei numeri* $m+1 \ldots N$ *la* $q_\mu(t)$ *per* $t = t_0$ *prenda o lasci lo zero* [24]). *Allora è*

$$\overset{(q)}{\psi_\mu}(t_0) = 0 \tag{86}$$ [25]).

Si può dunque dimostrare per i moti di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$ l'annullarsi delle reazioni vincolari effettive nel distacco o presa di contatto con quache vincolo unilaterale, proprietà questa generalmente ammessa solo in base ad un principio di continuità delle reazioni vincolari effettive.

N. 2. - **Unicità di certi moti di confine.**

TEOREMA X - *In* $\overset{\vdash\dashv}{t_1 t_2}$ *il moto* $\{q^*_h(t)\}$ *sia di tipo* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$ [26]) *e di confine per gli ultimi* $N - \mu$ *dei vincoli* (1) (*con*

---

[23]) Secondo la def. 6 del n. 1 di § 4.

[24]) Vedi def. 1 nella prefazione.

[25]) Vedi (43).

[26]) Vedi loc. cit. in nota [24]).

$m \leq \mu < N$), ossia valgono le

$$q_j^*(t) \equiv 0 \qquad (j = \mu + 1 \dots N) \tag{87}$$

[però non si escludono prese o perdite di contatto di S cogli eventuali rimanenti dei vincoli (1)*].*

Indicata con q^* l'N-pla $\{q_h^*(t)\}$, si abbia

$$\overset{(q^*)}{\psi}_h(t) > 0 \qquad t_1 < t < t_2 \qquad (h = \mu + 1 \dots N) \tag{88}$$

il significato delle $\overset{(q^*)}{\psi}_h$ essendo determinato dalle $(43')_2$.

Infine il moto $q_1^*(t) \dots q_\mu^*(t)$ goda della proprietà di unicità per es. nel futuro [nel passato], come moto di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}'_\mu}$ ove $\mathfrak{S}'_\mu$ è il sistema ottenuto da S imponendo alle ultime $N - \mu$ delle (1) *di valere come uguaglianze; ossia per ogni t_0 in $\overline{t_1 t_2}$, il moto subordinato in $\overset{|-}{t_0 t_1}$ $[\overline{t_1 t_0}]$ dal precedente sia l'unico moto $y_1(t), \dots, y_\mu(t)$ ivi definito, di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}'}$ e verificante le*

$$y_i(t_0) = q_i^*(t_0) \qquad \dot{y}_i(t_0) = \dot{q}_i^*(t_0) \qquad (i = 1 \dots \mu).$$

Allora, stanti le (87)*, il moto $\{q_h(t)\}$ gode della proprietà di unicità nel futuro [nel passato] come moto di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$.*

Infatti si supponga che non valga la tesi del teorema.

Esistono allora un istante t_0 e un moto $\{\bar{q}_h(t)\}$ di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$, definito in $\overline{t_0 t_2}$ $[\overline{t_1 t_0}]$, pel quale le eguaglianze

$$\begin{aligned} \bar{q}_h(t) &= q_h^*(t) \\ \dot{\bar{q}}_h(t) &= \dot{q}_h^*(t) \qquad (h = 1 \dots N) \end{aligned} \tag{89}$$

valgono per $t = t_0$ ma non valgono identicamente in $\overline{t_0 t_2}$.

Detto allora t_a l'estremo superiore (inferiore) degli istanti per cui le (89) valgono in $\overset{|-}{t_0 \xi}$ $[\overline{\xi t_0}]$, posto

$$q_h(t) = \begin{cases} q_h^*(t) & t_1 < t \leq t_a \quad [t_a \leq t < t_2] \\ \bar{q}_h(t) & t_a \leq t < t_2 \quad [t_1 < t \leq t_a] \end{cases} \qquad (h = 1 \dots N],$$

il moto $\{q_h(t)\}$ è di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$ onde vale la seguente

AFFERMAZIONE A [A']. - In $\overline{t_1 t_2}$ esistono un istante t_d e un moto $\{q_h(t)\}$ di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$, per cui le

$$(81') \qquad q_h(t) = q_h^*(t) \qquad \dot{q}_h(t) = \dot{q}_h^*(t) \qquad (h=1\,..\,N)$$

sussistono in $\overline{t_1 t_d}$ $[\overline{t_d t_2}]$ e ciononostante per $\xi > t$ $[\xi < t]$ esse non sussistono identicamente in $\overline{t_d \xi}$ $[\overline{\xi t_d}]$.

Allora non può esservi un $\xi > t_d$ $[\xi < t_d]$ con

$$q_j(t) \equiv 0 \quad t_d \leq t \leq \xi \quad [\xi \leq t \leq t_d] \qquad (j=\mu+1 \ldots N)$$

dato che in tal caso il moto $[q_1(t), \ldots, q_\mu(t)]$ sarebbe un moto di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}'}$ verificante le stesse condizioni iniziali di $[q_1^*(t), \ldots q_\mu^*(t)]$ per $t = t_d$, onde per la supposta proprietà di unicità di questo, i due moti considerati dovrebbero coincidere in contrasto con l'ultima parte della affermazione A[A'].

Deve dunque esservi uno l dei numeri $\mu + 1 \ldots N$, tale che $q_l(t)$ lasci [prenda] lo zero per $t = t_d$.

Allora per il corollario del teorema IX è

$$\overset{(q)}{\psi}_l(t) = 0,$$

onde per la continuità di $\overset{(q^*)}{\psi_l}(t)$ e $\overset{(q)}{\psi_l}(t)$ e la loro coincidenza in $\overline{t_1 t_d}$ $[\overline{t_d t_2}]$ vale la

$$\overset{(q^*)}{\psi_l}(t_d) = 0,$$

in contrasto con le (88).

Deve dunque valere la tesi del teorema.

c. d. d.

COROLLARIO - *Le* $Q_h(q\,|\,\dot{q}\,|\,t)$ *e le funzioni* (63) *figuranti nell'espressione* (2) *dell'energia cinetica* $\mathcal{T}$ *per* $h, k, l = 1 \ldots N$ *siano continue, e per* $h, k, l = 1, \ldots, \mu$ *(essendo come prima*

$m \leq \mu < N$) dopo avervi annullato le $q_{\mu+1}, \ldots, q_N$, $\dot{q}_{\mu+1} \ldots \dot{q}_N$ risultino uniformemente lipschitziane rispetto alle $q_1 \ldots q_\mu$, $\dot{q}_1 \ldots \dot{q}_\mu$ in un intorno di $(q_1^0 \ldots q_\mu^0, \dot{q}_1^0 \ldots \dot{q}_\mu^0, t_0)$ con

$$q_l^0 > 0 \qquad (l = m+1 \ldots \mu).$$

Sia poi

$$(91) \qquad \overset{(\mu+1 \ldots N)}{\psi_j} (q_1^0 \ldots q_\mu^0, 0 \ldots 0, \dot{q}_1^0 \ldots \dot{q}_\mu^0, 0 \ldots 0, t^0) > 0 \quad (j = \mu+1 \ldots N).$$

Esiste allora un intorno $\overline{t_1 t_2}$ di t_0 in cui il moto $\{q_h(t)\}$ di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$, verificante le condizioni iniziali

$$(92) \qquad q_h(t_0) = q_h^0 \qquad \dot{q}_h(t_0) = \dot{q}_h^0 \qquad (h = 1 \ldots N).$$

è unico e verifica pure le (87).

Ciò significa che se il sistema S soddisfa alle (92) e si può ritenerne il moto di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$, magari basandosi su un criterio di scarto [27]), S compie come moto di confine quello compiuto, verificando le stesse condizioni iniziali, dal sistema S' introdotto nel teorema X.

Infatti per noti teoremi di esistenza ed unicità validi per le equazioni di Lagrange di S', pensato liberato dai suoi eventuali vincoli unilaterali [espressi dalle prime $\mu - m$ delle (1)] esiste unica in un intorno $\overline{t_1 t_2}$ di t_0, la soluzione delle dette equazioni e delle prime μ delle (92) (come condizioni iniziali). Posto

$$(93) \qquad q_j^*(t) \equiv 0 \qquad t_1 < t < t_2 \qquad (j = \mu+1 \ldots N).$$

per la continuità delle $q_h^*(t)$ $\dot{q}_h^*(t)$ e delle $\overset{(\mu+1, \ldots, N)}{\psi_h}(q \mid \dot{q} \mid t)$ date dalle $(36)_2$ $(h = 1 \ldots N)$, eventualmente restringendo l'intorno $\overline{t_1 t_2}$ di t_0, in esso, per (90) le $q_h^*(t)$ verificano le (1) e anzi tenendo conto anche delle (90), (93) e $(43)_2$, è

$$\overset{(q^*)}{\psi_h}(t) = \overset{(\mu+1, \ldots, N)}{\psi_h} [q^*(t) \mid \dot{q}^*(t) \mid t] \qquad (h = 1, \ldots, N)$$

---

27) Di tali criteri parlerò in un prossimo lavoro.

onde per (91) in $\overline{t_1 t_2}$ si possono ritenere valide le (88). L'asserto sussiste allora in base al teorema X.

OSSERVAZIONE - *Osservo esplicitamente, che i precedenti teoremi sono validi anche senza che per le equazioni di Lagrange di S, pensato liberato da tutti i vincoli unilaterali* (1), *sussista un teorema di unicità* [28]).

N. 3. - Caso delle $\overset{(m+1 \dots N)}{\psi_h}$ $[q^*(t) \mid \dot{q}^*(t) \mid t]$ nulle, e dati verificanti le condizioni di Carathéodory.

TEOREMA XI - *In $\overline{t_1 t_2}$ il moto $\{q_1^*(t), \dots q_m^*(t)\}$ colle $\dot{q}_h^*$ assolutamente continue sia dinamicamente possibile pel sistema bilaterale S' introdotto nel Teor.* X.

Poste le (87) [*con* $\mu = m$], *in luogo della* (88) *valgano quasi ovunque in $\overline{t_1 t_2}$ le eguaglianze*

$$\overset{(q^*)}{\psi_h}(t) = 0 \qquad (h = 1 \dots N). \tag{94}$$

Per ogni $\bar{t}$ in un intorno di $[q^*(\bar{t}) \mid \dot{q}^*(\bar{t}) \mid \bar{t}]$, le $Q_h(q \mid \dot{q} \mid t)$ e le funzioni (63) *per* ($h, k, l = 1, \dots, N$) *siano limitate e uniformemente lipschitziane rispetto alle q, $\dot{q}$ per quasi ogni t, e misurabili rispetto a t.*

Di esse le a_{hk} siano continue anche rispetto a t [*le altre funzioni* (63) *e le $Q_h(q \mid \dot{q} \mid t)$, in questo teorema possono non esserlo*]. *Allora l'N-pla $q^* = \{q_h^*(t)\}$ rappresenta l'unico moto $\{q_h(t)\}$ del sistema $\mathfrak{S}$ considerato soddisfacente come condizioni iniziali le* (89') *per $t =$ ad un istante t_0 di $\overline{t_1 t_2}$, e di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}^*$ ossia colle $\dot{q}_h$ assolutamente continue e, per ogni γ di Γ risolvente quasi ovunque in $\overline{R\gamma} = R\gamma + \mathfrak{F}R\gamma$* le (34) *e* (35) *in corrispondenza a delle Φ_h verificanti le* (6).

Infatti si supponga che la tesi non valga. Sussiste allora la precedente affermazione A o la A' in cui però il moto

---

28) Si osservi però che fra le ipotesi figurano le effettive disuguaglianze (88), (91). Sostituendole colle corrispondenti uguaglianze, come verrà fatto nel teor. XI l'osservazione 1ª non rimane vera.

$q = \{q_h(t)\}$ anzichè di tipo $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, è di tipo $\mathfrak{M}^*_{\mathcal{S}}$. Per fissare le idee suppongo che valga la A (in cui si afferma l'esistenza di un distacco).

Per la fatta ipotesi di lipschitzianità, per l'osservazione 1ª del N. 1 di § 2, e per la continuità delle $q_h(t)$, $\dot{q}_h(t)$, $q^*_h(t)$, $\dot{q}^*_h(t)$ $(h = 1, \dots, N)$ esiste un intorno $\overline{t_d \xi}$ (per fissare le idee $t_d < \xi$) di t_d ed una costante $L > 0$ per cui qualunque sia γ in Γ, è (quasi ovunque)

$$(95) \qquad \begin{aligned} &|\overset{\gamma}{\alpha}_h[q^*(t) \mid \dot{q}^*(t) \mid t] - \overset{\gamma}{\alpha}_h[q(t) \mid \dot{q}(t) \mid t]| \leq \\ &\leq L \sum_{i=1}^{N} (|q^*_i(t) - q_i(t)| + |\dot{q}^*_i(t) - \dot{q}_i(t)|) \\ &\qquad t_d \leq t \leq \xi \qquad (h=1 \dots N) \quad \gamma \in \Gamma. \end{aligned}$$

Ma l'ipotesi (94) e la (87) con $\mu = m$, dicono che per $(q \mid \dot{q} \mid t) = [q^*(t) \mid q^*(t) \mid t]$ le $2N$ quantità $\ddot{q}_h(t)$, $\overset{(q^*)}{\psi^h}(t)$ $(h = 1 \dots N)$ soddisfano le (34) e (35) quasi ovunque in $\overline{t_d \xi}$ per qualunque γ di Γ. È dunque

$$(96) \qquad \ddot{q}^*_h(t) = \overset{\gamma}{\alpha}_h[q^*(t) \mid \dot{q}^*(t) \mid t] \quad t_d \leq t \leq \xi. \quad (h=1 \dots N) \ \gamma \in \Gamma.$$

Considerati poi gli enti $\overset{(q)}{p_t}$ (variabile in Γ) e $\overset{(q)}{\alpha}_h(t)$, associati mediante le (42) e (43) all'N-pla $q = \{q_h(t)\}$, le (96) dicono che la $\{q^*(t)\}$ soddisfa quasi ovunque in $\overline{t_d \xi}$ il sistema

$$(96') \qquad \ddot{y}_h = \overset{(q)}{\alpha}_h[y \mid \dot{y} \mid t] \qquad (h = 1 \dots N)$$

in cui, per le (95), le $\overset{(q)}{\alpha}_h$ soddisfano le (95) stesse. Ma essendo $\{q_h(t)\}$ di tipo $\mathfrak{M}^*_{\mathcal{S}}$ per quasi ogni t di CR è

$$\ddot{q}_h(t) = \overset{\gamma}{\alpha}_h(t) \qquad \gamma \in \Gamma_t \quad (h=1 \dots N)$$

onde vale l'implicazione (47). Pel teorema IV, segue allora (48), onde

$$\ddot{q}_h(t) = \overset{p_t^{(q)}}{\alpha}_h(t) \qquad (h=1 \dots N),$$

cioè anche $\{q_h(t)\}$ risolve (96′) quasi ovunque in $\overset{\vdash\!\dashv}{t_d\,\xi}$.

Valendo in base all'affermazione A) le (89′) per $t=t_d$, in base ad un noto teorema di unicità di Carathéodory le due N-ple considerate coincidono in $t_d\,\xi$ in contrasto con l'ultima parte della affermazione A).

Vale quindi la tesi del teorema.

c. d. d.

OSSERVAZIONE - *Supposte le funzioni* (63) *e le* $Q_h(q\,|\,\dot{q}\,|\,t)$ *continue, pel Teorema VIII ogni moto di tipo* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$, *è di tipo* $\mathfrak{M}^*_{\mathfrak{S}}$,

N. 4. - Caso delle $\overset{(m+1\,...\,N)}{\psi_h}[q^*(t)\,|\,\dot{q}^*(t)\,|\,t]$ anche variabili col tempo sotto certe condizioni.

TEOREMA XII - *Le* $q^*_h(t)$ $(h=1\,...\,N)$ *rappresentino un moto di tipo* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}}$ *verificante nell'intervallo* $t_1\,t_2$ *(o* $\overset{\vdash}{t_1\,t_2}$*) le*

$$q^*_h(t)=0 \qquad (h=m+1\,...\,N). \tag{97}$$

Le $Q_h(q\,|\,\dot{q}\,|\,t)$ *e le funzioni* (63), *per* $h, k, l=1\,...\,N$, *siano lipschitziane rispetto alle* q, $\dot{q}$ *come si è supposto nel Teor. XI e continue rispetto alle* q, $\dot{q}$, t.

Ciascuna delle

$$\overset{q^*}{\psi_h}(t)=\overset{(m+1\,...\,N)}{\psi_h}[q^*(t)\,|\,\dot{q}^*(t)\,|\,t]\ ^{29)} \qquad (h=1\,...\,N) \tag{98}$$

non passi mai dal valore zero a valori non nulli e verifichi le disuguaglianze

$$\overset{(q^*)}{\psi_h}(t)\geq 0 \qquad (h=m+1\,...\,N). \tag{99}$$

Il moto $\{q_h(t)\}$ *gode allora della proprietà di unicità nel futuro nel senso dichiarato nel Teor. X* [30]).

---

29) Vedi (97), (36), (43′), Convengo che la (98) valga anche per $t=t_1$ nel caso che ci si riferisca all'intervallo $\overset{\vdash}{t_1\,t_2}$.

30) Ossia per ogni t_0 di $\overline{t_1\,t_2}$, in $\overline{t_0\,t_2}$ coincide con $\{q_h(t)\}$ ogni moto definito in $\overline{t_0\,t_2}$ e verificante le stesse condizioni iniziali relative all'istante $t=t_0$.

Procedo per induzione.

Il teorema vale certo (per m e N qualunque) se, per t in $\overline{t_1 t_2}$ (o in $\overline{t_1 t_2}$) valgono le

$$\text{(100)} \qquad \overset{(q^*)}{\psi_h}(t) = 0 \qquad (h = \mu + 1, \dots, N)$$

$$\overset{(q^*)}{\psi_h}(t) \geq 0 \qquad (h = m + 1, \dots, \mu) \qquad [m \leq \mu \leq N]$$

con $\mu - m = 0$, dato che allora si ricade nel caso considerato del teorema XI.

Lo si supponga vero per $\mu - m \leq r$.

Fatte le ipotesi del teor. XII, per assurdo non valga la tesi per

$$\text{(101)} \qquad \mu = m + r + 1.$$

Allora, supposta la (101), sussiste l'affermazione A [31]).

Considero dapprima il caso

$$\text{(102)} \qquad \overset{(q^*)}{\psi_\mu}(t_d) > 0.$$

In base al Teor. X, la $q_\mu(t)$ rimane nulla in un intorno $\overline{t_d \xi}$ di t_d.

Dunque le $q_h(t)$ e $q_h^*(t)$ $(h = 1 \dots \mu - 1,\ \mu + 1 \dots N)$ risolvono le equazioni del sistema ad $N - 1$ gradi di libertà ottenuto da S imponendogli l'ulteriore vincolo bilaterale.

$$q_\mu = 0.$$

Per tale sistema vanno considerate solo le prime $r = \mu - m - 1$ delle $(100)_2$ quindi, per l'ipotesi induttiva, $q_h(t)$ e $q_h^*(t)$ coincidono in $\overline{t_d \xi}$ $(\xi > t_d)$. Essendo ciò in contrasto con l'ultima parte dell'affermazone A, segue la validità della tesi del Teorema per $\mu = m + r + 1$, nel caso espresso dalla $(100)_2$.

---

31) Vedi dimostrazione del teorema X.

Nel caso rimanente per ipotesi si ha

$$\overset{(q^*)}{\psi}_{\mu}(t) = 0 \qquad\qquad t_d \leq t < t_2 \tag{103}$$

onde, applicando l'ipotesi induttiva all'intervallo $\overset{-|}{t_1\, t_d}$ (o $\overset{|-|}{t_1\, t_d}$), segue di nuovo la tesi.

In ogni caso il Teorema vale dunque per $\mu = m + r + 1$. Pel principio d'induzione il teorema XII è dunque dimostrato.

OSSERVAZIONE 1ª - *Il precedente teorema sussiste certo anche pel sistema* $\mathcal{S}_0$ *ottenuto aggiungendo ad* $\mathcal{S}$ *i vincoli unilaterali*

$$q_h \geq 0 \qquad\qquad (h = m_0 + 1 \ldots m) \tag{1'}$$

purchè oltre le (97) *sussistano le*

$$q_h^*(t) > 0 \qquad\qquad (h = m_0 + 1 \ldots m).$$

Basta osservare che altrimenti sussisterebbe ancora l'affermazione A e che per la continuità delle $q_h\,(t)$ e $q_h^*(t)$ e le (97') per $\xi - t_d$ abbastanza piccolo, in $\overline{t_d\, \xi}$, $q_h(t)$ e $q_h^*\,(t)$ sono pure moti di tipo $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}}$, intendendo con $\mathcal{S}$ il sistema originario [per cui non valgana le (1')], ma ciò è assurdo pel teorema XII.

N. 5. - **Regola d'equilibrio.**

Il precedente teorema permette di dimostrare la seguente « regola d'equilibrio ».

I vincoli del considerato sistema $\mathcal{S}$ *siano per semplicità fissi*[32]). *La configurazione* $\{q_h^0\}$ *verifichi le*

$$\begin{cases} q_h^0 > 0 & (h = m_0 + 1 \ldots m) \\ q_h^0 = 0 & (h = m + 1 \ldots N) \end{cases} \tag{104}$$

e si abbia pure

$$Q_h(q^0 \,|\, 0 \,|\, t) \leq 0 \qquad\qquad (h = m + 1 \ldots N) \tag{105}$$

---

[32]) Generalizzo tale risultato al caso di vincoli anche anolonomi e non necessariamente fissi nella nota *Sul moto di sistemi anolonomi a vincoli variabili.*

e ogni $Q_h(q^0 \mid 0 \mid t)$ $(h = m+1 \dots N)$ non passi mai, al variare di t, dal valore zero a valori non nulli.

Se ad un certo istante t_0, $\mathfrak{S}_0$ si trova in $\{q_h^0\}$ con atto di moto nullo, e si può ritenere che il suo moto sia di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}_0}$ [33] *(il che certo si verifica se si possono ritenere continue le velocità e le accelerazioni), esso vi rimane indefinitamente in quiete.*

Infatti il moto

$$q_h^*(t) \equiv q_h^0 \qquad (h=1 \dots N)$$

è certo di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}_0}$, inoltre le (34) valgono per t qualunque, $q_h = q_h^0$, $\dot{q}_h = 0$, $\ddot{q}_h = 0$, $\gamma = (m+1, \dots, N)$. Per costruzione delle ϑ_h [vedi (4) e (5)], si ha

$$\overset{(m+1\dots N)}{\psi_h}[q^0 \mid 0 \mid t] = \vartheta_h(q^0 \mid 0 \mid t) = -Q_h[q^0 \mid 0 \mid t] > 0 \quad (h=m+1 \dots N)$$

quindi per (106) son soddisfatte le ipotesi del teorema XII, onde, tenuto conto dell'ultima osservazione, l'asserto.

In particolare resta trattato (credo per la prima volta) il caso di forze posizionali.

La regola di equilibrio di Signorini [34]) segue dalla precedente nel caso in cui le (105) valgono come effettive disuguaglianze.

---

[33]) Che il detto moto sia di tipo $\mathfrak{S}_0$ risulta applicando un certo criterio di scarto che mi sembra accettabile come postulato e di cui parlerò in un lavoro successivo sull'incompatibilità dei teoremi di esistenza e di unicità del moto.

[34]) SIGNORINI, *Meccanica razionale*, Vol. II, 2ª ediz., pag. 337 (Si sostituiscano m_0, m, v con m, m', n).