RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

Sulle coincidenze di mappe ponderate

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 29 (1959), p. 256-270

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1959__29__256_0>

SULLE COINCIDENZE DI MAPPE PONDERATE

Nota (*) *di* GABRIELE DARBO (*a Padova*)

In una precedente memoria [1]) ho introdotto la nozione di « mappa ponderata », con coefficienti in un anello A. Il concetto si presenta come una generalizzazione delle applicazioni continue. Nella categoria degli spazi di Hausdorff e mappe ponderate ho costruito una teoria dell'omologia soddisfacente agli assiomi di Eilenberg-Steenrod.

Il teorema di Brouwer ed alcune nozioni, quali il grado topologico e il coefficiente di allacciamento sono già state estese al caso di mappe ponderate [2]). Non è stato tuttavia possibile finora estendere il teorema di Lefschetz sui punti fissi, per mappe ponderate di poliedri. La difficoltà ha origine nel teorema di approssimazione simpliciale, del quale non si possiede alcuna estensione adeguata (e pare ardua la via da seguire per giungervi!).

In questa Nota mi son proposto di sviluppare parte della teoria delle coincidenze e dei punti fissi di mappe ponderate. Ad ogni coppia di tali mappe associo degli invarianti di σ-omotopia, i quali giocano un ruolo analogo al numero di

---

(*) Pervenuta in Redazione il 31 maggio 1959.

Indirizzo dell'A.: Seminario di Matematica, Università. Padova.

1) G. DARBO, *Teoria dell'omologia in una categoria di mappe plurivalenti ponderate*. [Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXVIII (1958)], pp. 188-220.

2) L. DAL SOGLIO, *Sulla nozione di grado e di coefficiente di allacciamento per mappe ponderate*. [Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXVIII (1958)], pp. 280-289.

Lefschetz, nel senso che l'assenza di coincidenze implica l'annullarsi di detti invarianti. Nel caso di mappe univalenti tra varietà di ugual dimensione si ritrova sostanzialmente il numero di Lefschetz come unico invariante significativo.

Ho cercato di svolgere la teoria, per quanto è stato possibile, in forma invariantiva e in particolare senza alcun ricorso ad approssimazioni simpliciali. Il metodo si presta a facili generalizzazioni al caso di più di due mappe, onde ottenere analoghi risultati in relazione al problema delle coincidenze multiple.

1. - Considereremo, in tutto questo lavoro, spazi di Hausdorff e mappe (ponderate) con coefficienti in un prefissato anello Λ (commutativo con elemento unità). Con $\mathcal{H}$ denoteremo il funtore omologico definito nella citata memoria [3]) in cui l'anello Λ dei coefficienti verrà sempre sottointeso. H denoterà invece il funtore omologia singolare a coefficienti interi, quando non sia indicato esplicitamente l'anello Λ dei coefficienti. Useremo il termine *omomorfismo* nel senso di *omomorfismo compatibile con la struttura di Λ-modulo* tutte le volte che questa struttura è definita in modo manifesto. Così pure per il termine *isomorfismo* che verrà inteso sempre come *isomorfismo* « *su* ».

Siano X e W spazi di Hausdorff, $f, g: X \to W$ mappe ponderate.

Un punto $x \in X$ diremo una *coincidenza* della coppia (f, g) se è $\mathcal{T}_f(x) \cap \mathcal{T}_g(x) \neq 0$, essendo $\mathcal{T}_f$ e $\mathcal{T}_g$ i supporti minimali delle mappe f e g rispettivamente.

Indichiamo con E l'insieme delle coincidenze della coppia (f, g); come conseguenza della semicontinuità dei supporti, E risulta chiuso in X.

Sia A un sottoinsieme di X, libero da coincidenze; sarà $A \subset X - E$.

---

[3]) Vedi loc. cit. [1]).

[4]) Vedi loc.cit. [1]), pag. 191.

Consideriamo quindi il seguente diagramma commutativo

$$
(1)\quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "d_X"] & X \times X \arrow[r, "f \times g"] & W \times W \arrow[r, "\tilde{d}_W"] & W \times W,\ W \times W - 'W \\
X, A \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, "\varepsilon"'] & X, X - E \arrow[urr, "\lambda_{f,g}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

in cui 'W indica la diagonale in $W \times W$, d_X la mappa diagonale, $\tilde{d}_W$, ι ed ε sono inclusioni e la mappa $\lambda_{f,g} = (\lambda'_{f,g}, \lambda''_{f,g})$ è definita da $\lambda'_{f,g} = (f \times g) \circ d_X : X \to W \times W$ che subordina la mappa $\lambda''_{f,g} : X - E \to W \times W - 'W$.

DEF.: *La mappa $\lambda_{f,g} \circ \varepsilon$ induce per ogni q un omomorfismo*

$$(\lambda_{f,g} \circ \varepsilon)_{*q} : \mathcal{H}_q(X, A) \to \mathcal{H}_q(W \times W, W \times W - 'W)$$

che indicheremo con $\mathfrak{L}^q_{f,g}$.

Tale omomorfismo gode della proprietà fondamentale espressa dal seguente

TEOREMA 1) *Se la coppia (f, g) è priva di coincidenze si ha $\mathfrak{L}^q_{f,g} = 0$ per ogni q.*

Infatti l'omomorfismo $\mathfrak{L}^q_{f,g}$ si fattorizza in

$$\mathcal{H}_q(X, A) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathcal{H}_q(X, X - E) \xrightarrow{(\lambda_{f,g})_*} \mathcal{H}_q(W \times W, W \times W - 'W)$$

e se $E = O$ si ha $\mathcal{H}_q(X, X - E) = 0$ da cui l'asserto.

Valgono inoltre i teoremi seguenti

TEOREMA 2) *Se f_i, $g_j : X \to W$ sono mappe (in numero finito) tali che tutte le coppie (f_i, g_j) siano disgiunte in A (cioè prive di coincidenze in A) e se λ_i, $\mu_j \in \Lambda$, allora posto $f = \sum_i \lambda_i f_i$, $g = \sum_j \mu_j g_j$, la coppia (f, g) è disgiunta in A ed è*

$$\mathfrak{L}^q_{f,g} = \sum_{ij} \lambda_i \mu_j \mathfrak{L}^q_{f_i, g_j}.$$

Ciò è conseguenza immediata della bilinearità del prodotto $(\times)$ e della linearità del funtore $\mathcal{H}_q$.

TEOREMA 3) *Se $h : f_0 \simeq f_1$ e $k : g_0 \simeq g_1$ sono σ-omotopie* *disgiunte in $A \times I$ risulta*

$$\mathfrak{L}^q_{f_0, g_0} = \mathfrak{L}^q_{f_1, g_1}.$$

DIM. Poniamo

$$s' = (h \times k) \circ d_{X \times I} : X \times I \to W \times W$$

$d_{X \times I}$ essendo la mappa diagonale $X \times I \to (X \times I) \times (X \times I)$. Essendo (h, k) coppia disgiunta in $A \times I$, la mappa s' subordina una mappa

$$s'' : A \times I \to W \times W - 'W,$$

pertanto la mappa

$$s = (s', s'') : X \times I,\ A \times I \to W \times W,\ W \times W - 'W$$

rappresenta una σ-omotopia tra le mappe $\lambda_{f_0, g_0} \circ \varepsilon$ e $\lambda_{f_1, g_1} \circ \varepsilon$, che inducono quindi omomorfismi uguali $\mathfrak{L}^q_{f_0, g_0} = \mathfrak{L}^q_{f_1, g_1}$ per ogni q.

DEF.: *Sia B un sottoinsieme di X tale che gli insiemi $E' = E \cap B$ ed $E'' = E \cap (X - B)$ siano chiusi; diremo allora che B è un separatore delle coincidenze della coppia (f, g). Indicheremo inoltre con*

$$\mathfrak{L}^q_{f, g; B} \cdot \mathcal{H}_q(X, A) \to \mathcal{H}_q(W \times W,\ W \times W - 'W)$$

l'omomorfismo ottenuto per composizione, dalla sequenza

$$\mathcal{H}_q(X, A) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathcal{H}_q(X, X - E') \overset{(\eta_*)^{-1}}{=} \mathcal{H}_q(X - E'') \xrightarrow{\lambda_*} \mathcal{H}_q(W \times W, W \times W - 'W)$$

in cui ε è l'inclusione, η una excisione e λ è la mappa subordinata dalla $(f \times g) \circ d_X : X \to W \times W$.

Dalla precedente definizione segue immediatamente il

TEOREMA 4) *Se B_1 e B_2 sono separatori delle coincidenze tali che $E \cap B_1 = E \cap B_2$ si ha*

$$\mathfrak{L}^q_{f, g; B_1} = \mathfrak{L}^q_{f, g; B_2}.$$

Vale inoltre il seguente teorema di additività.

TEOREMA 5) *Sia $E = \bigcup_i E_i$ dove le porzioni E_i sono in numero finito e contenute in separatori U_i aperti, a due a due disgiunti* [5]*), si ha allora*

$$\mathfrak{L}^q_{f,g} = \sum_i \mathfrak{L}^q_{f,g;E_i}. \tag{2}$$

DIM.: Posto $E^i = E - E_i$, si ha la rappresentazione di somma diretta

$$\mathcal{H}_q(X - E^i, X - E) \xrightarrow{\alpha^i_*} \mathcal{H}_q(X, X - E) \xrightarrow{\beta^i_*} \mathcal{H}_q(X, X - E_i)$$

in cui α^i e β^i sono inclusioni. Se indichiamo con

$$\eta^i : X - E^i, X - E \to X, X - E_i$$

le excisioni, si ha

$$\mathfrak{L}^q_{f,g;E_i} = (\lambda_{f,g})_{*q} \circ \alpha^i_{*q} \circ (\eta^i_{*q})^{-1} \circ \beta^i_{*q} \circ \varepsilon_{*q};$$

$\lambda_{f,g}$ ed ε avendo il significato attribuito nel diagramma (1). Sommando quest'ultima rispetto ad i e tenendo presente la relazione

$$\sum_i \alpha^i_{*q} \circ (\eta^i_{*q})^{-1} \circ \beta^i_{*q} = \text{identità}$$

si ottiene la (2).

2. - DEF.: *Per un generico spazio di Hausdorff W, poniamo per definizione*

$$D_q(W) = H_q(W \times W, W \times W - {}'W),$$
$$D_q(W; \Lambda) = H_q(W \times W, W \times W - {}'W; \Lambda),$$
$$\mathfrak{D}_q(W) = \mathcal{H}_q(W \times W, W \times W - {}'W),$$

ricordando che, come si è detto all'inizio, H denota omologia

[5]) Se X è uno spazio normale, basta evidentemente che le porzioni E_i siano chiuse e a due a due disgiunte.

singolare e $\mathfrak{H}$ l'omologia per mappe ponderate (con coefficienti in Λ).

Sia ora $\varphi : W_1 \to W_2$ una mappa *univalente e localmente biunivoca.*

La controimmagine della diagonale $'W_2$ di $W_2 \times W_2$ mediante l'applicazione $\Phi = \varphi \times \varphi : W_1 \times W_1 \to W_2 \times W_2$ è un insieme chiuso $\Phi^{-1}('W_2) \subset W_1 \times W_1$ di cui $'W_1$ e $V = \Phi^{-1}('W_2) - 'W_1$ sono porzioni chiuse complementari. L'inclusione

$$\Xi : W_1 \times W_1 - V,\ W_1 \times W_1 - \Phi^{-1}('W_2) \to W_1 \times W_1,\ W_1 \times W_1 - 'W_1$$

è una excisione e la Φ subordina una mappa

$$\bar{\Phi} : W_1 \times W_1 - V,\ W_1 \times W_1 - \Phi^{-1}('W_2) \to W_2 \times W_2,\ W_2 \times W_2 - 'W_2 .$$

Porremo quindi per definizione per ogni intero q

$$D_q(\varphi) = \bar{\Phi}_{*q} \circ (\Xi_{*q})^{-1} : D_q(W_1) \to D_q(W_2)$$

in modo che $D_q(\varphi)$ *risulta essere un omomorfismo determinato dalla mappa* φ *univalente e localmente biunivoca. Analogamente definiremo gli omomorfismi*

$$D_q(\varphi;\ \Lambda) : D_q(W_1;\ \Lambda) \to D_q(W_2;\ \Lambda)$$

e

$$\mathfrak{D}_q(\varphi) : \mathfrak{D}_q(W_1) \to \mathfrak{D}_q(W_2).$$

È facile allora riconoscere che:

a) *ogni mappa identica è localmente biunivoca, e la composizione di mappe consecutive univalenti e localmente biunivoche è ancora una mappa dello stesso tipo; di conseguenza spazi di Hausdorff e mappe univalenti localmente biunivoche formano una categoria*

b) $D_q(...)$, $D_q(...;\Lambda)$ *e* $\mathfrak{D}(...)$ *sono funtori covarianti nella suddetta categoria.*

In seguito stabiliremo alcuni teoremi che faciliteranno il calcolo di $\mathfrak{D}_q(W)$ nel caso che W sia una varietà. È opportuno a tal fine estendere il teorema d'isomorfismo tra i gruppi $H_q(X, A;\ \Lambda)$ e $\mathfrak{H}_q(X, A)$ ad una categoria più vasta di quella delle coppie triangolabili. Per il significato di certi simboli che ora adopreremo, rinviamo alla memoria citata [6]). L'omomorfismo naturale quivi definito

$$\tilde{\beta}_q(X,\ A) : H_q(X,\ A\ ;\ \Lambda) \to \mathcal{H}_q(X,\ A)$$

porge un omomorfismo naturale

$$\tilde{\beta}_q(W \times W,\ W \times W - 'W) : D_q(W;\ \Lambda) \to \mathfrak{D}_q(W)$$

che, come dimostreremo più avanti, si riduce ad un isomorfismo se W è dotato di una triangolazione localmente finita. Avremo bisogno perciò del seguente

TEOREMA 6) *La teoria dell'omologia $\mathcal{H}$ è a supporti compatti* [7]).

Dimostriamo la proprietà estensiva. Sia $X,\ A$ una coppia di Hausdorff. Una classe d'omologia $\bar{\xi} \in \mathcal{H}_q(X,\ A)$ è rappresentata da una q-catena ponderata

$$\xi : \Delta_q \to X$$

il cui bordo $\partial\xi = \xi \circ d_q$ appartiene all'immagine dell'iniezione $\mathcal{C}_{q-1}(A) \to \mathcal{C}_{q-1}(X)$. Vi sarà dunque un diagramma commutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} \Delta_q & \xrightarrow{\xi} & X \\ {\scriptstyle d_q}\uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \text{incl.}} \\ \Delta_{q-1} & \xrightarrow[\xi']{} & A \end{array}$$

in cui ξ' è subordinata da $\xi \circ d_q$ per restrizione del codominio.

Poniamo quindi

$$X_\xi = \mathcal{T}_\xi(\Delta_q) \subset X$$

$$A_\xi = \mathcal{T}_{\xi'}(\Delta_{q-1}) \subset A$$

così che sarà $X_\xi,\ A_\xi$ contenuta in $X,\ A$. Poichè $\bar{\xi}$ appartiene

---

[6]) Vedi loc. cit. in [1]).

[7]) Cfr. S. EILENBERG and V. STEENROD, *Foundations of algebraic topology*. (Princeton University Press) (1952), pp. 255.

all'immagine dell'omomorfismo

$$\mathcal{H}_q(X_\xi, A_\xi) \to \mathcal{H}_q(X, A)$$

indotto da inclusione, basterà dimostrare che la coppia X_ξ, A_ξ è compatta. Ma ciò risulta da semplici considerazioni se si osserva che X_ξ e A_ξ sono immagini di compatti nelle trasformazioni sup-semicontinue $\mathfrak{T}_\xi$ e $\mathfrak{T}_{\xi'}$ rispettivamente e che queste mutano punti in insiemi finiti. Con ragionamenti altrettanto facili si dimostra la proprietà riduttiva.

Possiamo allora enunciare il seguente teorema d'isomorfismo:

Teorema 7) *Se X è un CW-complesso* [8]) *ed A è aperto in X, l'omomorfismo naturale*

$$\tilde{\beta}_q(X, A) : H_q(X, A; \Lambda) \to \mathcal{H}_q(X, A)$$

è un isomorfismo per ogni q.

Ciò è conseguenza del fatto che il sistema delle coppie compatte contenute in X, A ordinato per inclusione, contiene un sottosistema *cofinale* di coppie triangolabili per le quali $\tilde{\beta}_q$ è un isomorfismo.

In particolare si ha il seguente

Corollario. *Se W è uno spazio che ammette una triangolazione localmente finita, il teorema* (7) *è applicabile alla coppia $W \times W$, $W \times W - 'W$ e porge quindi l'isomorfismo*

$$D_q(W; \Lambda) \cong \mathfrak{D}_q(W).$$

Dimostriamo ora un teorema che facilita il computo dei gruppi $D_q(U)$ per i sottoinsiemi aperti U dello spazio euclideo n-dimensionale R^n.

Teorema 8) *Nella categoria dei sottoinsiemi aperti U di R^n e delle mappe d'inclusione esiste un isomorfismo naturale*

$$\psi_U^q : D_q(U) = H_{q-n}(U).$$

---

[8]) Per la definizione di CW-complesso cfr. J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy I.* [Bull. Amer. Math. Soc., 55, 3 (1949)], pp. 213-245.

DIM.: Sia B^n la n-cella unitaria *aperta* di R^n col centro nell'origine R^0 (cioè l'insieme dei punti $x \in R^n$ per cui è $\| x \| < 1$), e sia $U \subset R^n$ un qualunque insieme aperto (non vuoto). Per ogni $x \in U$ poniamo

$$\rho_U(x) = \min \{ 1, \text{ dist } (x, \ R^n - U) \}$$

convenendo di prendere $\rho_U(x) = 1$ se U coincide con tutto R^n. Definiamo la mappa univalente

$$\varphi_U : U \times B^n, \ U \times (B^n - R^0) \to U \times U, \ U \times U - 'U$$

mediante l'assegnazione (usiamo notazioni vettoriali)

$$\varphi_U(x, z) = (x, \ x + \rho_U(x) \cdot z), \qquad \text{per } (x, z) \in U \times B^n .$$

La mappa φ_U si fattorizza in un omeomorfismo ed una excisione e perciò induce isomorfismo (per ogni q)

$$(\varphi_U)_{*q} : H_q(U \times B^n, \ U \times (B^n - R^0)) \to D_q(U),$$

che, composto con gli isomorfismi canonici

$$H_q(U \times B^n, \ U \times (B^n - R^0)) =$$
$$= H_{q-n}(U) \otimes H_n(B^n, B^n - R^0) = H_{q-n}(U),$$

porge l'isomorfismo ψ_U^q desiderato.

L'asserita naturalezza di questo isomorfismo segue poi facilmente dal fatto che per ogni due insiemi aperti U e V di R^n con $V \subset U$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} U \times B^n, \ U \times (B^n - R^0) & \xrightarrow{\varphi_U} & U \times U, \ U \times U - 'U \\ \uparrow & & \uparrow \\ V \times B^n, \ V \times (B^n - R^0) & \xrightarrow{\varphi_V} & V \times V, \ V \times V - 'V \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono inclusioni, è *omotopicamente* commutativo [9]).

---

[9]) Una omotopia h tra le due composizioni è data da

$h(x, z; t) = (x, x + \{ t\rho_V(x) + (1 - t)\rho_U(x) \} \cdot z)$ per $(x, z) \in V \times B^n$, $0 \leq t \leq 1$.

Il risultato precedente può esser notevolmente generalizzato al caso di varietà (anche non compatte, ne connesse) per mezzo di un notevole teorema di dualità del tipo di Poincaré, dovuto a H. Cartan[10]), e può esser così formulato:

TEOREMA 9) *Se W è una n-varietà topologica paracompatta ed orientabile, nella categoria dei sottoinsiemi aperti U di W e delle mappe d'inclusione, esiste un isomorfismo naturale, per ogni q*

$$(3)\qquad \psi^q_U : D_q(U) = H_{q-n}(U).$$

DIM.: Se con $H^p(U)$ denotiamo il p-esimo gruppo di coomologia a supporti compatti, basato sulle cocatene di Alexander-Spanier a coefficienti interi, esiste un isomorfismo canonico

$$(4)\qquad H_q(U \times U,\ U \times U - 'U) = H^{2n-q}(U)$$

dipendente dalla scelta di una orientazione sulla varietà $2n$-dimensionale $U \times U$. Analogamente per la n-varietà U si avrà un isomorfismo

$$(5)\qquad H^{2n-q}(U) = H_{q-n}(U)$$

determinato a sua volta da una orientazione di U. Fissata quindi una orientazione su W è individuata in modo canonico una orientazione su $W \times W$. Prendendo per i sottoinsiemi aperti l'orientazione indotta da quella della varietà ambiente, gli isomorfismi (4) (5) sono determinati canonicamente e sono *naturali* nella categoria considerata. Da questi si ottiene l'isomorfismo (3) per composizione.

Se Λ è un anello a ideali principali si può ripetere il medesimo ragionamento prendendo omologia e coomologia a coefficienti in Λ.

Si ha in proposito il seguente

---

10) Cfr. H. CARTAN, *Seminaire de topologie algébrique.* (E.N.S.) (1950-51).

TEOREMA 10) *Nelle ipotesi del teorema* 9) *esiste un isomorfismo naturale*

$$(4) \qquad \psi^b_{U,\Lambda} : D_q(U;\ \Lambda) = H_{q-n}(U;\ \Lambda)$$

purchè si presenti una almeno delle seguenti circostanze:

a) Λ *è un anello principale* (*o in particolare un corpo*),

b) Λ *in quanto Z-modulo è privo di torsione,*

c) $q \leq n+1$ (*senza alcuna condizione per* Λ).

Nell'ipotesi a) sussiste il teorema di dualità e l'isomorfismo si ottiene con ragionamento analogo a quello del teorema (9).

Nelle ipotesi b) e c) si applichi il teorema dei coefficienti universali e si osservi che in entrambi i casi è

$$\mathrm{Tor}^Z(H_{q-n-1}(U),\ \Lambda) = 0 = \mathrm{Tor}^Z(D_{q-1}(U),\ \Lambda).$$

pertanto si hanno gli isomorfismi naturali

$$H_{q-n}(U;\ \Lambda) = H_{q-n}(U) \underset{Z}{\otimes} \Lambda,$$

$$D_q(U;\ \Lambda) = D_q(U) \underset{Z}{\otimes} \Lambda,$$

da cui l'isomorfismo (4) tramite (3).

TEOREMA 11) *Se W è una n-varietà paracompatta orientabile che ammette una triangolazione localmente finita esiste un isomorfismo naturale*

$$\psi^q_U : \mathfrak{D}_q(U) = \mathfrak{H}_{q-n}(U), \qquad U \textit{ aperto in } W$$

in ciascuna delle ipotesi a) b) c) *del teorema precedente.*

E infatti il teorema segue dal teorema 10), dal teorema 7) e dal suo corollario.

OSSERVAZIONE: *Se X, A è una varietà relativa* ($X - A$ connesso) e W una varietà (pure connessa) entrambe triangolabili, n-dimensionali e orientabili, e se $f,\ g : X \to W$ è una coppia di mappe ponderate disgiunte su A, l'unico valore di q per cui l'omomorfismo $\mathfrak{L}^q_{f,g} : \mathfrak{H}_q(X,\ A) \to \mathfrak{D}_q(W)$

è significativo è $q = n$. Infatti mentre è $\mathcal{H}_q(X, A) = 0$ se $q > n$, dal teorema 11) segue che è $\mathfrak{D}_q(W) = 0$ per $q < n$. Infine poichè è $\mathcal{H}_n(X, A) = \Lambda = \mathfrak{D}_n(W)$, l'omomorfismo $\mathfrak{L}^q_{f,g}$ può venir rappresentato da un elemento di Λ qualora si fissino le orientazioni su X, A e su W.

3. - Sia X uno spazio di Hausdorff, $f: X \to X$ una mappa ponderata e i l'identità in X. Le coincidenze della coppia f, i si diranno punti fissi di f: diciamo E il loro insieme e supponiamo che A sia un sottoinsieme *chiuso* di X e libero da punti fissi.

Posto $U = X - A$ consideriamo il diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccc} X, A & \to & X, X - E & \xrightarrow{\varphi} & X \times X, X \times X - 'X & & \\ & & \uparrow \text{exc} & & \uparrow & & \\ & & U, U - E & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & U \times X, U \times X - 'U & \xleftarrow{\text{exc}} & U \times U, U \times U - 'U \end{array}$$

in cui φ è la mappa definita da $\varphi(x) = f(x) \times x$ per $x \in X$, $\bar{\varphi}$ è subordinata dalla φ e le rimanenti sono inclusioni delle quali quelle indicate con «exc» sono excisioni. Potremo dare allora la seguente

DEFINIZIONE: *Indicheremo con*

$$\Phi^q_f : \mathcal{H}_q(X, A) \to \mathfrak{D}_q(X - A)$$

l'omomorfismo ottenuto per composizione, dalla sequenza

$$\mathcal{H}_q(X, A) \to \mathcal{H}_q(X, X - E) \overset{\text{exc}_*^{-1}}{=} \mathcal{H}_q(U, U - E) \xrightarrow{\bar{\varphi}_*}$$

$$\to \mathcal{H}_q(U \times X, U \times X - 'U) \overset{\text{exc}_*^{-1}}{=} \mathfrak{D}_q(U).$$

Ne segue che l'omorfismo $\mathfrak{L}^q_{f,g}$ si fattorizza in

$$\mathcal{H}_q(X, A) \xrightarrow{\Phi^q_f} \mathfrak{D}_q(X - A) \to \mathfrak{D}_q(X)$$

il secondo fattore essendo indotto dalla inclusione. Inoltre sussistono le seguenti proposizioni evidenti:

a) *se* f *è priva di punti fissi è* $\Phi_f^q = 0$ *per ogni* q;

b) Φ_f^q *è invariante rispetto a deformazioni* σ-*omotopiche della* f *nel senso precisato nel teorema* 3);

c) Φ_f^q *dipende unicamente dalla restrizione* $f \mid U : U \to X$, *vale a dire*: *se* $f, g : X \times X$ *sono tali che* $f \mid U = g \mid U$ *si ha* $\Phi_f^q = \Phi_g^q$ *per ogni* q.

Teorema 12) *Se* W *è una* n-*varietà connessa* (*compatta*) *triangolabile ed orientabile* $k : W \to W$ *è una applicazione costante univalente, l'omomorfismo*

$$\theta_W = \Phi_k^n = \mathfrak{L}_{k,i}^n : \mathcal{H}_n(W) \to \mathfrak{D}_n(W) \qquad (i = id\,W)$$

è un isomorfismo (*che non dipende ovviamente dalla scelta di* k).

Dim.: Sia $\lambda : W, W - x_0 \to W \times W, W \times W - 'W$ la mappa definita da $\lambda(x) = (x_0, x)$ per $x \in W$; l'omomorfismo θ_W si fattorizza in

$$\mathcal{H}_n(W) = \mathcal{H}_n(W, W - x_0) \xrightarrow{\lambda_*} \mathfrak{D}_n(W)$$

il primo isomorfismo essendo indotto da inclusione. Se U è un intorno di x_0 omeomorfo a R^n e $\bar\lambda : U, U - x_0 \to U \times U, U \times U - 'U$ è subordinata di λ, si ha il diagramma commutativo seguente

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_n(W, W - x_0) & \xrightarrow{\lambda_*} & \mathfrak{D}_n(W) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{H}_n(U, U - x_0) & \xrightarrow{\bar\lambda_*} & \mathfrak{D}_n(U) \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono isomorfismi, perchè il primo è indotto da excisione e il secondo è equivalente, in virtù del teorema (11), all'iniezione $\mathcal{H}_0(U) \to \mathcal{H}_0(W)$. Inoltre $\bar\lambda_*$ è un isomorfismo poichè $\bar\lambda$ è equivalente (a meno di omeomorfismi) all'inclusione standard $R^n, R^n - R^0 \to R^n \times R^n, R^n \times R^n - 'R^n$.

Dunque anche λ_* è un isomorfismo e da ciò il teorema.

Per le varietà relative sussiste l'analogo

TEOREMA 11) *Se W, $\dot W$ è una n-varietà relativa, triangolabile connessa ed orientabile, con bordo $\dot W$, e $k : W \to W$ è una mappa costante univalente: $k(W) = x_0 \in W - \dot W$ l'omomorfismo*

$$\theta_{W, \dot W} = \Phi_k^n : \mathcal{H}_n(W, \dot W) \to \mathfrak{D}_n(W - \dot W)$$

è un isomorfismo.

La dimostrazione è in tutto simile alla precedente.

Sia ora $f : W \to W$ una mappa qualsiasi, W una n-varietà triangolabile connessa ed orientabile. L'omomorfismo ottenuto per composizione di

$$\mathcal{H}_n(W) \xrightarrow{\Phi_f^n} \mathfrak{D}_n(W) \overset{\theta_W^{-1}}{=} \mathcal{H}_n(W)$$

è un endomorfismo di $\mathcal{H}_n(W) = \Lambda$ e pertanto si identifica con un ben determinato elemento di Λ che indicheremo con $L(f)$. Sussistono allora evidentemente le proposizioni seguenti:

a) *$L(f)$ è un invariante di σ-omotopia di f;*

b) *Se f è senza punti fissi, cioè se $x \notin \mathcal{G}_f(x)$ per ogni $x \in W$ è $L(f) = 0$;*

c) *Se $f = \sum_i \lambda_i f_i$ con $f_i : W \to W$ e $\lambda_i \in \Lambda$ $(i = 1, \ldots, r)$ è* $L(f) = \sum \lambda_i L(f_i)$. Se $\bar x$ è un punto fisso isolato si può definire il suo «indice» ponendo $L(f;\, \bar x)$ uguale a quell'elemento di Λ per cui è $L(f;\, \bar x)\theta_W = \mathfrak{L}^n_{f, i : \bar x}$; allora si ha

d) *Se f ha soltanto punti fissi isolati, detti questi $x_1, \ldots, x_r$ si ha*

$$L(f) = \sum_i L(f;\, x_i)$$

Ne segue che se f è una ordinaria applicazione continua (mappa univalente) e Λ coincide con l'anello Z degli interi, $L(f)$ coincide con il numero di Lefschetz classicamente definito come somma alterna di tracce di endomorfismi. Questo ultimo risultato si può ottenere con le seguenti considerazioni: se f è univalente, mediante deformazione omotopica è possibile far si che abbia soltanto punti fissi isolati e semplici. Con ciò non si altera $L(f)$. Basterà quindi osservare che l'indice di un punto fisso isolato semplice coincide con quello classicamente definito e allora l'affermazione segue dalla proprietà d) e dalla analoga proprietà del numero di Lefschetz.

È bene però osservare che non sempre $L(f)$ può esser calcolato mediante la formula delle tracce. Intanto è necessario (perchè abbia senso la nozione di « traccia di un endomorfismo ») che Λ sia un dominio d'integrità. Un ulteriore approfondimento, abbisogna della teoria dei prodotti cartesiani per l'omologia $\mathfrak{H}$, ma di ciò si discuterà in un successivo lavoro.