Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Aldo Bressan

Sul moto dei sistemi anolonomi a vincoli variabili

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 29 (1959), p. 227-241

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1959__29__227_0>

SUL MOTO DEI SISTEMI ANOLONOMI A VINCOLI VARIABILI

Nota (*) *di* ALDO BRESSAN (*a Padova*)

Nella presente nota mi propongo di generalizzare al caso di vincoli olonomi bilaterali ed anolonomi (lineari) variabili, alcuni teoremi stabiliti da Agostinelli nel caso che i vincoli siano fissi [1]), giovandosi della rappresentazione dei sistemi dinamici su una certa « varietà vincolare » introdotta da Boggio; in primo luogo il teorema affermante che i moti dinamicamente possibili per un sistema anolonomo $\mathcal{S}_a$, a vincoli bilaterali e lisci sono anche moti di un certo sistema olonomo $\mathcal{S}_0$. Nel caso poi in cui sia presente qualche vincolo anolonomo unilaterale, anch'esso variabile, questo teorema è estendibile ai corrispondenti moti di confine.

Giovandomi di alcune delle considerate generalizzazioni facilmente estendo al caso di sistemi $\mathcal{S}_a^*$ sufficientemente regolari e dotati di vincoli olonomi anche unilaterali e anolonomi bilaterali, il concetto di moto di tipo $\mathfrak{M}_S$ [ossia regolare se tale al confine, soluzione in senso lato delle equazioni dinamiche e dotato di velocità continue], e alcune sue proprietà che ho stabilite in un altro lavoro [2]).

Estendo infine ai considerati sistemi $\mathcal{S}_a^*$ un teorema di unicità nel futuro del generico moto di confine in modo che, in particolare, nel caso statico resti acquisita una regola di

---

(*) Pervenuta in Redazione il 5 novembre 1958.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) C. AGOSTINELLI, *Nuova forma sintetica delle equazioni del moto di un sistema anolonomo etc.*, Bollettino U.M.I., Serie III, A. XI, n. 1, Gruppo IV, marzo 1956, pag. 1.

2) A. BRESSAN, *Questioni di regolarità ed unicità del moto in presenza di vincoli olonomi unilaterali*, Rendiconti del Seminario Matem. dell' Università di Padova, 1959.

equilibrio, concernente, per quanto mi consta, casi più generali di quelli finora considerati.

1. - Considero un sistema S_a, riferito a coordinate lagrangiane $q_1 \dots q_m$ di forza viva

$$(1) \qquad \mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(q \mid t)\dot{q}_i\dot{q}_k + \sum_{i=1}^{m} a_{0i}(q \mid t)\dot{q}_i + \frac{1}{2} a_{00}(q \mid t)$$

su cui agisca una sollecitazione attiva di componenti lagrangiane

$$(2) \qquad Q_h = Q_h(q \mid \dot{q} \mid t) \qquad (h = 1 \dots m).$$

Fra i vincoli, tutti lisci, figurino, oltre ai vincoli olonomi bilaterali, di cui si è tenuto conto nell'espressione (1) della $\mathcal{T}$, quelli anolonomi bilaterali

$$(3) \qquad \sum_{s=1}^{m} b_{rs}(q \mid t)\dot{q}_s + b_{r0}(q \mid t) = 0 \qquad (r = 1 \dots \alpha)$$

e quelli unilaterali

$$(4) \qquad \sum_{s=1}^{m} b_{rs}(q \mid t)\dot{q}_s + b_{r0}(q \mid t) \geq 0 \qquad (r = \alpha + 1 \dots \beta).$$

Seguendo Hertz e Boggio [3]) rappresento il sistema S_a con un punto mobile su una « varietà vincolare » $V_m(t)$ di equazione

$$(5) \qquad Q = Q(q_1 \dots q_m t).$$

Risulta allora

$$(6) \qquad \mathcal{T} = \frac{1}{2}\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2$$

da cui, posto

$$(7) \qquad q_0 = t \qquad (\text{onde} \quad \dot{q}_0 = 1 \quad \text{e} \quad \ddot{q}_0 = 0),$$

si ha

$$(8) \qquad a_{ik}(q \mid t) = \frac{\partial Q}{\partial q_i} \times \frac{\partial Q}{\partial q_k} \qquad (i, k = 0, 1 \dots m).$$

---

[3]) Lincei, Serie VI, Tomo XVIII, A. 1953, pag. 452.

Suppongo i β vincoli (3) e (4) indipendenti nel senso che, punto per punto, tali siano ad ogni istante i β vettori

$$\boldsymbol{b}_r(q \mid t) = \sum_{h=1}^{m} b_{rh}(q \mid t) \frac{\partial Q}{\partial q_h} \qquad (r = 1 \dots \beta). \tag{9}$$

Indico, seguendo Boggio, la proiezione ortogonale di $\frac{d^2Q}{dt^2}$ sulla $V_m(t)$ con $\frac{d^2Q}{dt^2 v}$ ecc. ...; rappresento inoltre la forza attiva col vettore tangenziale

$$\boldsymbol{F} = \sum_{h=1}^{m} Q_h \frac{\partial Q}{\partial q_h} \tag{10}$$

e la reazione effettiva dei vincoli anolonomi (3) e (4) — di componenti lagrangiane Φ_h — col vettore

$$\Phi = \sum_{h=1}^{m} \Phi_h \frac{\partial Q}{\partial q_h}. \tag{11}$$

$\mathfrak{S}_a$ si muove come se fosse liberato dai vincoli (3) e (4), e soggetto alla forza attiva $\boldsymbol{F} + \Phi$, quindi il suo punto rappresentativo sulla $V_m(t)$, in base ad un risultato di Boggio [4]), soddisfa l'equazione

$$\frac{d^2Q}{dt^2 v} = \boldsymbol{F} + \Phi. \tag{12}$$

Da un teorema dimostrato dal Prof. Agostinelli [5]) nel caso di vincoli fissi e bilaterali, risulta che la suddetta Φ è esprimibile mediante una certa funzione delle q $\dot{q}$ t, per cui l'equazione (12) ammette come integrali primi, i primi membri delle equazioni dei vincoli anolonomi eguagliati a costante.

2. - Nell'intenzione di generalizzare in primo luogo i suddetti risultati al caso in cui i vincoli olonomi ed anolonomi dipendono dal tempo, e quelli anolonomi sono almeno in parte unilaterali, a titolo di premessa estendo i simboli di Christoffel al caso di varietà $V_m(t)$ mobili, e stabilisco alcune formule concernenti la derivazione totale rispetto al tempo.

---

[4]) Vedi loco cit. in nota [1]).

[5]) Vedi loc. cit. in nota [1]), pag. 5, formula (15).

Tenuto conto delle (7) pongo

$$\{ ik,\, l \} = \frac{\partial^2 Q}{\partial q_i \partial q_k} \times \frac{\partial Q}{\partial q_l} \qquad (i,\, l,\, k = 0{,}1 \,..\, m) \tag{13}$$

e, detto a^{ik} il reciproco dell'elemento a_{ik} nella matrice $\| a_{ik} \|$ per $i,\, k = 1, \ldots, m$ [e non per $i,\, k = 0, 1, \ldots, m$] pongo pure

$$\left\{ {r \atop ik} \right\} = \{ ik,\, l \} a^{lr} = \sum_{l=1}^{m} \{ ik,\, l \} a^{lr} \tag{14}$$

$$(i,\, k = 0 \ldots m) \qquad (r = 1, \ldots m).$$

Per (13) e (8) valgono allora le

$$\frac{\partial a_{kl}}{\partial q_i} = \{ ik,\, l \} + \{ il,\, k \} \qquad (i,\, k,\, l = 0,\, 1, \ldots m) \tag{15}$$

onde le

$$\{ ik,\, l \} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial a_{il}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{lk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_l} \right] \quad (i,\, k,\, l = 0,\, 1,\, , \ldots m \tag{15'}$$

che esprimono i simboli $\{ ik,\, l \}$ e $\left\{ {r \atop ik} \right\}$ mediante quantità, note appena sia data l'espressione (1) della forza viva [6]).

Verrà utilizzata in seguito la seguente

OSSERVAZIONE 1ª - *Se u_h e u^l sono le componenti covarianti e controvarianti del vettore tangenziale $\boldsymbol{u}$, si ha*

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \times \frac{\partial Q}{\partial q_h} = \frac{du_h}{dt} - \sum_{l=1}^{m} u^l \sum_{k=0}^{m} \{ hk,\, l \} \dot{q}_k = \\ & = \sum_{k=0}^{m} \left[\frac{\partial u_h}{\partial q_k} - \left\{ {l \atop hk} \right\} u_l \right] \dot{q}_k \qquad (h = 0,\, 1, \ldots m) \\ & \boldsymbol{u} \times \frac{d}{dt} \frac{\partial Q}{\partial t} = \sum_{h=1}^{m} \sum_{k=0}^{m} \{ 0k,\, h \} u^h \dot{q}_k = \\ & = \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=1}^{m} \left\{ {l \atop 0k} \right\} u_l \dot{q}_k \dot{q}_0 \,. \end{aligned} \right. \tag{16}$$

---

[6]) Le (14), (15), (15') formalmente coincidono con formule ben note concernenti i simboli di Christoffell su varietà a $m + 1$ dimensioni. I simboli $\{ ik.\, l \}$ e $\left\{ {h \atop ik} \right\}$ qui introdotti saranno usati per la derivazione, rispetto al tempo di vettori a m componenti.

Infatti è

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\times\frac{\partial Q}{\partial q_h}=\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{u}\times\frac{\partial Q}{\partial q_h}\right)-\boldsymbol{u}\times\frac{d}{dt}\frac{\partial Q}{\partial q_h}=$$

$$=\frac{d}{dt}u_h-\sum_{l=1}^{m}\sum_{k=0}^{m}u^l\frac{\partial Q}{\partial q_l}\times\frac{\partial^2 Q}{\partial q_h\partial q_k}\dot{q}_k$$

$$\boldsymbol{u}\times\frac{d}{dt}\frac{\partial Q}{\partial t}=\sum_{l=1}^{m}\sum_{h=0}^{m}u^l\frac{\partial Q}{\partial q_l}\times\frac{\partial^2 Q}{\partial q_0\partial q_h}\dot{q}_h \qquad (h=0,1,\ldots m),$$

da cui per (13) e (14) seguono le (16).

OSSERVAZIONE 2ª - *Mediante i simboli di Christoffel generalizzati, espressi dalle* (15) *si posson dare ai binomi lagrangiani le seguenti uniformi espressioni*

$$(17)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial\dot{q}_h}-\frac{\partial\mathfrak{T}}{\partial q_h}=\frac{\partial Q}{\partial q_h}\times\frac{d^2Q}{dt^2}=\sum_{k=1}^{m}a_{hk}\ddot{q}_k+\sum_{kl=0}^{m}\{kl,h\}\dot{q}_h\dot{q}_l$$

$$(h=1,\ldots m).$$

Infatti, stanti le (7), è

$$\frac{\partial Q}{\partial q_h}\times\frac{d^2Q}{dt^2}=\frac{\partial Q}{\partial q_h}\times\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{m}\frac{\partial Q}{\partial q_k}\dot{q}_k=\frac{\partial Q}{\partial q_h}\times\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial Q}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k+$$

$$+\frac{\partial Q}{\partial q_h}\times\sum_{jk=0}^{m}\frac{\partial^2 Q}{\partial q_j\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k \qquad (h=1,\ldots m).$$

Le (17) seguono allora per (8) e (15).

3. - Posso ora compiere le enunciate generalizzazioni. Intanto si può senz'altro affermare che il moto

$$q_h=q_h(t) \qquad h=1\ \ldots\ m$$

colle $\dot{q}_h$ e $\ddot{q}_h$ continue è dinamicamente possibile per $\mathfrak{S}_a$ e di confine per tutti in vincoli anolonomi unilaterali (4) se, posto

$$(18)\qquad \boldsymbol{w}=\sum_{h=1}^{m}\frac{\partial Q}{\partial q_h}\dot{q}_h=\frac{dQ}{dt}-\frac{\partial Q}{\partial t},$$

per tale moto sussistono identicamene le eguaglianze

$$(19)\qquad \boldsymbol{b}_{r}\times\boldsymbol{w}+b_{r0}(q\,|\,t)=0 \qquad (r=1,\ldots\beta)$$

e vale pure

$$\frac{d^2Q}{dt^2 v} = \boldsymbol{F} + \Phi \tag{20}$$

in corrispondenza a un vettore Φ tangente alla $V_m(t)$ nel punto $Q[q(t) \mid t]$ e soddisfacente alla diseguaglianza

$$\Phi \times \delta Q \geq 0 \tag{21}$$

in corrispondenza ad ogni δQ verificante le

$$\begin{aligned} \delta\eta_r &= \boldsymbol{b}_r \times \delta Q = 0 && r = 1, \dots, \alpha \\ \delta\eta_r &= \boldsymbol{b}_r \times \delta Q \geq 0 && r = \alpha + 1, \dots, \beta, \end{aligned} \tag{22}$$

Il detto vettore Φ, appartenendo al β-spazio S_β, tangente alla $V_m(t)$ in $Q[q(t) \mid t]$ e contenente $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_\beta$, ha la forma

$$\Phi = \sum_{r=1}^{\beta} \Phi^r \boldsymbol{b}_r . \tag{23}$$

Si può osservare che, posto

$$\Phi_r = \Phi \times \boldsymbol{b}_r \qquad (r = 1, \dots, \beta), \tag{24}$$

$$B_{rs} = \boldsymbol{b}_r \times \boldsymbol{b}_s \qquad (rs = 1, \dots, \beta), \tag{25}$$

e detto B^{rs} il reciproco dell'elemento B_{rs} nella matrice $\| B_{rs} \|$ $(r, s = 1 \dots \beta)$, è allora

$$\Phi^r = \sum_{s=1}^{\beta} B^{rs} \Phi_s \qquad (r = 1, \dots, \beta). \tag{24'}$$

Per (23) e il significato dato alle $\delta\eta_r$ dalle (22), segue

$$\Phi \times \delta Q = \sum_{r=1}^{\beta} \Phi^r \delta\eta_r .$$

onde la condizione che la (21) segua dalle (22), equivale alle disuguaglianze

$$\Phi^r \geq 0 \qquad r = \alpha + 1, \dots, \beta. \tag{26}$$

Allo scopo di determinare le $\Phi_1 \dots \Phi_\beta$ si osservi che da (20) segue

$$(27)\qquad \Phi_r + \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{b}_r = \frac{d^2Q}{dt^2 v} \times \boldsymbol{b}_r = \frac{d^2Q}{dt^2} \times \boldsymbol{b}_r \qquad r=1,\dots,\beta.$$

Per le identità (19) derivate totalmente rispetto al tempo e per la posizione (18) si ha

$$(28)\qquad \boldsymbol{b}_r \times \frac{d^2Q}{dt^2} = \boldsymbol{b}_r \times \frac{d}{dt}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{b}_r \times \frac{d}{dt}\frac{\partial Q}{\partial t} = \gamma_r[q \,|\, \dot{q} \,|\, t] \qquad r = 1, \dots, \beta,$$

avendo posto

$$(29)\qquad \gamma_r(q \,|\, \dot{q} \,|\, t) = -\frac{d\boldsymbol{b}_r}{dt} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{b}_r \times \frac{d}{dt}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{db_{r0}}{dt} \qquad r=1,\dots,\beta.$$

L'equazione (20) per (23) (24'), (27) (28) può scriversi

$$(30)\qquad \frac{d^2Q}{dt^2 v} = \boldsymbol{F}^*$$

ove

$$(31)\qquad \boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F} + \sum_{r,s=1}^{\beta} B^{rs}[\gamma_r - \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{b}_r]\boldsymbol{b}_s$$

è una ben determinata funzione delle $q\ \dot{q}\ t$.

L'equazione (30) generalizza una equazione vettoriale sintetica ottenuta da Agostinelli [7]) e mostra che il moto $\{q_h(t)\}$ è dinamicamente possibile pel sistema olonomo $\mathfrak{S}_0$ ottenuto da $\mathfrak{S}_a$ privandolo dei vincoli anolonomi (3) e (4) e sostituendo la sollecitazione $\boldsymbol{F}$ con la $\boldsymbol{F}^*$ data da (31).

* * *

Le funzioni γ_r, introdotte con le posizioni (29) hanno le espressioni esplicite

$$(32)\qquad \gamma_r = \gamma_r(q \,|\, \dot{q} \,|\, t) = -\sum_{h,k=0}^{m} \left[\frac{\partial b_{rh}}{\partial q_k} - \sum_{l=1}^{m} \left\{ {l \atop hk} \right\} b_{rl}\right] \dot{q}_h \dot{q}_k \qquad (r = 1, \dots, \beta),$$

---

[7]) Vedi loc. cit. in nota [1]), pag. 5, formule (16) e (17).

costruire quando siano note l'espressione (1) dell'energia cinetica e le equazioni (3) e (4) dei vincoli anolonomi.

Infatti essendo $\boldsymbol{b}_r$ tangenziale, per $(16)_1$, (18) e (17), è

$$\frac{d\boldsymbol{b}_r}{dt}\times\boldsymbol{w}+\frac{d\boldsymbol{b}_{r0}}{dt}=\sum_{h=1}^{m}\frac{d\boldsymbol{b}_r}{dt}\times\frac{\partial Q}{\partial q_h}\dot{q}_h+\frac{db_{r0}}{dt}\dot{q}_0=$$

$$=\sum_{h=1}^{m}\dot{q}_h\sum_{k=0}^{m}\left[\frac{\partial b_{rh}}{\partial q_k}-\sum_{l=1}^{m}\left\{\begin{matrix}l\\hk\end{matrix}\right\}b_{rl}\right]\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial b_{r0}}{\partial q_k}\dot{q}_0\dot{q}_k=$$

$$=\sum_{h,k=0}^{m}\frac{\partial b_{rh}}{\partial q_h}\dot{q}_h\dot{q}_k-\sum_{hl=1}^{m}\left\{\begin{matrix}l\\hk\end{matrix}\right\}b_{rl}\dot{q}_h\dot{q}_k \qquad (r=1,\dots,\beta)$$

e per $(16)_2$ è

$$\boldsymbol{b}_r\times\frac{d}{dt}\frac{\partial Q}{\partial t}=\sum_{k=0}^{m}\sum_{h=1}^{m}\left\{\begin{matrix}l\\0k\end{matrix}\right\}b_{rl}\dot{q}_0\dot{q}_h \qquad (r=1,\dots,\beta);$$

da (29) segue dunque (32)

Le (27), (28) permettono poi di dare alle Φ_r definite dalle (24) le espressioni in funzione di q, $\dot{q}$, t

$$(33)\qquad \Phi_r=\Phi_r(q\mid\dot{q}\mid t)=-\sum_{ik=1}^{m}a^{ik}b_{ri}Q_k+\gamma_r(q\dot{q}t) \qquad (r=1,\dots,\beta)$$

e le Φ^r definite dalle (24') sono espresse da

$$(34)\qquad \Phi^r=\Phi^r(q\dot{q}t)=\sum_{s=1}^{\beta}B^{rs}[\gamma_s(q\mid\dot{q}\mid t)-\sum_{ik=1}^{m}a^{ik}b_{si}Q_k] \qquad (r=1,\dots,\beta).$$

Se il moto $\{q_h(t)\}$ è dinamicamente possibile per $\mathcal{S}_a$ e verifica le disequazioni (4) come uguaglianze, esso per (26) e (20) deve inoltre verificare le diseguaglianze:

$$(35)\qquad \Phi^r[q(t)\mid\dot{q}(t)\mid t]\geq 0 \qquad (r=\alpha+1,\dots,\beta)$$

e le equazioni di Lagrange

$$(36)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial\dot{q}_h}-\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial q_h}=Q_h(q\dot{q}t)+\sum_{r=1}^{\beta}b_{rh}\Phi^r(q\mid\dot{q}\mid t) \qquad (h=1,\dots,m).$$

Per (17) le equazioni (36) possono scriversi

$$(36') \quad \sum_{k=1}^{m} a_{hk}\ddot{q}_k + \sum_{kl=0}^{m} \{kl, h\}\dot{q}_k\dot{q}_l = Q_h(q\,|\,\dot{q}\,|\,t) + \sum_{r=1}^{\beta} b_{rh}\Phi^r(q\,|\,\dot{q}\,|\,t)$$
$$(h = 1, \dots, m),$$

o porsi, tenendo conto delle (15), nella forma normale

$$(36'') \quad \ddot{q}_i = -\sum_{kl=0}^{m} \left\{ {i \atop hl} \right\} \dot{q}_h\dot{q}_k + \sum_{h=1}^{m} a^{ih}(Q_h + \sum_{r=}^{\beta} b_{rh}\Phi^r) \quad (i=1 \dots m).$$

Le equazioni (36') e (36''), nel caso di vincoli fissi si identificano con le equazioni stabilite da Agostinelli [8]).

Le disequazioni (35) svaniscono nel caso che i vincoli anolonomi unilaterali manchino ($\alpha = \beta$).

Suppongo ora che il moto $\{q_h(t)\}$ soddisfi le equazioni (36') o (36''), ossia l'equazione vettoriale (30). Essendo

$$\sum_{s=1}^{\beta} B_{rs}\boldsymbol{b}_s \times \boldsymbol{b}_i = \begin{cases} 1 & r = i \\ 0 & r \neq i \end{cases} \qquad (i, r = 1 \dots \beta),$$

ne segue

$$\boldsymbol{b}_i \times \frac{d^2Q}{dt^2} = \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{b}_i + \sum_{rs=1}^{\beta} B^{rs}[\gamma_r - \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{b}_r]\boldsymbol{b}_s \times \boldsymbol{b}_i = \gamma_i$$
$$(i = 1 \dots \beta).$$

Per (29) è allora

$$\boldsymbol{b}_i \times \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{w} + \frac{\partial Q}{\partial t}\right) = -\frac{d\boldsymbol{b}_i}{dt} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{b}_i \times \frac{d}{dt}\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{db_{i0}}{dt}$$
$$(i = 1 \dots \beta)$$

ossia

$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{b}_i \times \boldsymbol{w} + b_{0i}] = 0 \qquad (i = 1 \dots \beta).$$

Vale dunque il

TEOREMA I - *Le equazioni* (36') *o le* (36'') *o ancora la* (30) *ammettono i* β *integrali primi*

$$(37) \qquad \sum_{h=1}^{m} b_{ih}(q\,|\,t)\dot{q}_h + b_{i0}(q\,|\,t) = k_i \qquad (i = 1 \dots \beta)$$

---

8) Vedi loc. cit. in nota 3).

che per valori nulli delle costanti esprimono la condizione che il moto $\{q_h(t)\}$ *rispetti tutti i vincoli anolonomi presenti e sia di confine per tutti quelli unilaterali.*

Detto $\mathcal{S}_0$ il sistema olonomo ottenuto liberando $\mathcal{S}_a$ dai vincoli anolonomi (3) e (4) e sostituendo la sollecitazione attiva $\boldsymbol{F}$ con la $\boldsymbol{F}^*$ espressa da (31), per (30), (35) e per il Teorema I°, vale il seguente.

TEOREMA II - *Il moto* $\{q_h(t)\}$ *è dinamicamente possibile pel considerato sistema* $\mathcal{S}_a$, *soggetto oltre agli olonomi ai vincoli anolonomi bilaterali* (3) *e unilaterali* (4), *e tale moto è di confine per tutti i considerati vincoli se e solo se esso è dinamicamente possibile per il considerato sistema olonomo* $\mathcal{S}_0$, *soddisfa le disuguaglianze* (35) *e l'atto di moto iniziale è consentito dai vincoli ad* $\mathcal{S}_a$ [onde in corrispondenza ad esso sono nulle le costanti degli integrali primi (37)].

* * *

Riguardo alla possibilità che sussistano alcuni integrali dei momenti generalizzati pel sistema $\mathcal{S}_a$ supposto a vincoli tutti bilaterali, cioè che si abbia

$$\alpha = \beta, \tag{38}$$

vale il seguente

TEOREMA III - *L'energia cinetica* $\mathcal{T}(q \mid \dot{q} \mid t)$ *del considerato sistema anolonomo* $\mathcal{S}_a$ *non dipenda dalla coordinata* q_i, *e la corrispondente velocità* $\dot{q}_i$ *non figuri nelle equazioni* (3) *dei vincoli anolonomi i quali siano tutti bilaterali* [ossia valga la (38)].

Allora sussiste l'integrale dei momenti

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} = \text{cost}$$

appena sia nulla $Q_i(q \mid \dot{q} \mid t)$ *come accade nel caso che la forza derivi da un potenziale* $U(q \mid t)$ *indipendente da* q_i.

L'asserto segue dalla validità delle (36) in cui, in base all'indipendenza da $\dot{q}_i$ delle equazioni (3), si ponga

$$b_{ri} = 0 \qquad (r = 1 \dots \alpha) \quad (\alpha = \beta).$$

I Teoremi I - II e III sono stati dimostrati dal Prof. Agostinelli nel caso di vincoli fissi e bilaterali (9).

4. - Denoto con S_a^* il sistema ottenuto da S_a supponendo tutti bilaterali i vincoli anolonomi [ossia valga la (38)] e aggiungendo i vincoli olonomi unilaterali

$$(39) \qquad q_{\mu+1} \geq 0, \dots, q_m \geq 0 \qquad (1 \leq \mu < m).$$

In un precedente lavoro [10]) ho studiato talune questioni di regolarità ed unicità del moto per sistemi olonomi dotati di certe proprietà di regolarità. Il contenuto dei precedenti numeri permette di estendere i risultati ottenuti al caso di sistemi S_a^*.

Suppongo che sollecitazione e vincoli soddisfino alle condizioni di Lipschitz nel senso che siano continue rispetto alle q, $\dot{q}$, t e uniformemente lipschitziane rispetto alle q, $\dot{q}$ le $Q_h[q \mid \dot{q} \mid t]$ e le funzioni

$$a_{hk}(q \mid t), \quad \frac{\partial a_{hk}}{\partial q_l}, \quad b_{rh}(q \mid t), \quad \frac{\partial b_{rh}}{\partial q_l}$$
$$(r = 1 \dots \beta) \quad (h, k, l = 0 \dots m).$$

Pongo le seguenti definizioni

DEFINIZIONE 1ª - *Dico che il moto $\{q_h(t)\}$ è regolare se tale al confine, se tutte le velocità e le accelerazioni del sistema sono continue in ogni intervallo $\overline{t_1\, t_2}$ in cui lo siano le derivate prime e seconde di quelle delle $q_{\mu+1}(t) \dots q_m(t)$ che si annullano almeno una volta in $\overline{t_1\, t_2}$* [le quali hanno il signi-

---

9) Il teorema III è già stato esposto per vincoli variabili, da A. CONSIGLIO nella nota *Sopra la dinamica di un sistema di punti vincolati anolonomi*, Atti del IV Congresso U.M.I.

10) Vedi loc. cit. in nota 2).

ficato di coordinate lagrangiane $q_h(t)$ responsabili delle prese o perdite di contatto del sistema con qualche vincolo olonomo unilaterale].

DEFINIZIONE 2ª - *Dico moto dinamico in senso lato per* $\mathcal{S}_a^*$ *ogni moto* $\{q_h(t)\}$ *per cui in ogni intervallo* $\overline{t_1 t_2}$ *in cui il sistema non prenda o perda contatto con qualcuno dei vincoli olonomi unilaterali* (39), *le* $\ddot{q}$ *esistono continue e le equazioni di Appel son soddisfatte in corrispondenza a reazioni che i vincoli siano effettivamente capaci di esplicare.*

DEFINIZIONE 3ª - *Dico di tipo* $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_a^*}$ *ogni m-pla* $\{q_h(t)\}$ *colle* q_h *continue, rappresentanti un moto regolare se tale al confine e dinamico in senso lato per* $\mathcal{S}_a^*$ [11]).

Sia $\mathcal{S}_0^*$ il sistema olonomo ottenuto liberando $\mathcal{S}_a^*$ dai vincoli anolonomi [che per (38)) sono espressi dalle equazioni (3)] e sostituendone la sollecitazione attiva con la $\boldsymbol{F}^*$ [12]) di componenti lagrangiane

$$Q_h^*(q\,|\,\dot{q}\,|\,t) = Q_h(q\,|\,\dot{q}\,|\,t) + \sum_{r=1}^{a} b_{rh}(q\,|\,t)\Phi^r(q\,|\,\dot{q}\,|\,t) \qquad (h = 1 \dots m) \tag{41}$$

con le $\Phi^r(q\ \dot{q}\ t)$ espresse da (34).

OSSERVAZIONE - *Le m-ple di tipo* $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_a^*}$ *sono quelle di tipo* $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_\sigma^*}$ *secondo la def. n. 6 del lavoro citato in nota* [2]).

La tesi seconda del Teorema VIII del detto lavoro permette di affermare il seguente

TEOREMA IV - *Per ogni moto* $\{q_h(t)\}$ *di tipo* $\mathfrak{M}_{\mathcal{S}_a^*}$, *le* $\ddot{q}_h(t)$ *esistono ovunque e sono continue.*

5. - Per generalizzare al caso del considerato sistema $\mathcal{S}_a^*$ anche il teorema di unicità XII del mio citato lavoro, costituente lo scopo principale della 2ª parte di esso, premetto le

---

11) Dirò di tipo $M_{\mathcal{S}_a^*}$ anche il moto rappresentato dalla detta *m*-pla.

12) Data da (31).

seguenti posizioni. Le

$$\alpha_i(q \mid \dot{q} \mid t) \qquad (i = 1 \dots \mu)$$

risolvano le μ equazioni

$$\text{(42)} \qquad \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_h}\right]_{\substack{\ddot{q}_{\mu+1}=0 \\ \ddot{q}_m=0}} = Q_h^*(q \mid \dot{q} \mid t) \qquad (h = 1 \dots \mu)$$

lineari nelle μ incognite $\ddot{q}_1 \dots \ddot{q}_\mu$, e sia

$$\text{(43)} \qquad \Psi_j(q \mid \dot{q} \mid t) = -Q_j^*(q \mid \dot{q} \mid t) + \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_j}\right]_{\substack{\ddot{q}_i=\alpha_i(q\dot{q}t) \\ \ddot{q}_k=0}}$$

$$(i=1 \dots \mu) \quad (k=\mu+1 \dots m) \quad (j=\mu+1 \dots m).$$

Sussiste allora il seguente

TEOREMA V - *Il moto* $\{q_h^*(t)\}$, *di tipo* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}_a^*}$ *nell'intervallo aperto* $\overline{t_1\, t_2}$ *sia di confine per tutti i vincoli* (39), *ossia valgano le identità*

$$\text{(44)} \qquad q_j^*(t) \equiv 0 \qquad (j=\mu+1 \dots m).$$

Inoltre per $j = \mu + 1 \dots m$ *la* $\Psi_j[q^*(t) \mid \dot{q}^*(t) \mid t]$ *oltre ad essere* ≥ 0, *non passi mai dal valore zero a valori non nulli. Allora il moto* $\{q_h^*(t)\}$ *gode della proprietà di unicità nel futuro in* $\overline{t_1\, t_2}$ *come moto di tipo* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}_a^*}$, *nel senso che per ogni* t_0 *in* $\overline{t_1\, t_2}$ *coincide con esso in* $\overline{t_0\, t_2}$ *ogni moto* $\{q_h(t)\}$ *di tipo* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}_a^*}$ *verificante le*

$$\text{(45)} \qquad q_h(t_0) = q_h^*(t_0), \quad \dot{q}_h(t_0) = \dot{q}_h^*(t_0) \qquad (h=1 \dots m).$$

Tale teorema è una conseguenza immediata del citato Teorema XII quando in primo luogo si ricordi che per l'osservazione fatta dopo la definizione 3ª il moto $\{q_h(t)\}$ di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}_a^*}$ è pure di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}_0^*}$, in secondo luogo si riconosca che le $\Psi_j(q \mid \dot{q} \mid t)$ definite dalle (43) non sono altro che il 2° gruppo delle $\overset{(\mu+1 \dots m)}{\Psi_j}(q \mid \dot{q} \mid t)$ definite mediante le $(36)_2$ del citato lavoro, ed infine si tenga presente il Teorema II di questa nota.

Da questo teorema discende la seguente « regola d'equilibrio »

Detta P^* la posizione $q_1 = ... = q_m = 0$, in un intervallo aperto $\overline{t_1\ t_2}$ di tempo, eventualmente infinito, P^* risulti invariabile, e si abbia

$$\frac{\partial b_{r0}(0 \mid t)}{\partial t} = 0 \qquad (r=1 \dots \alpha)\ (\alpha=\beta). \tag{46}$$

Per le quantità

$$Q_h^{**}(t) = \left[Q_h - \sum_{rs=1}^{\alpha} B^{rs} \sum_{ik=1}^{m} a^{ik} Q_i b_{rk} b_{sh} \right]_{\substack{q=0 \\ \dot{q}=0}} \tag{47}$$

$$(h = 1 \dots m),$$

riesca

$$Q_h^{**}(t) = \begin{cases} 0 & h = 1 \dots \mu \\ \leq 0 & h = \mu + 1 \dots m \end{cases} \tag{48}$$ [13].

Infine, per $h = \mu + 1 \dots m$ la $Q_h^{**}(t)$ non passi mai dal valore zero a valori non nulli.

Ne segue: se il sistema $\mathfrak{S}_\alpha^*$ ad un istante t_0 di $\overline{t_1\ t_2}$ si trova in P^* con atto di moto nullo, e si può stabilire [14]) *che il moto in $\overline{t_1\ t_2}$ è di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}_\alpha^*}$, il sistema $\mathfrak{S}_\alpha^*$ permane in quiete in P^* nell'intervallo di tempo $\overline{t_0\ t_1}$.*

Osservato che le condizioni (46) non sono restrittive in quanto necessarie affinché la quiete in P^* e in $\overline{t_1\ t_2}$ ossia il moto $\{q_h^*(t)\}$ con

$$q_h^*(t) \equiv 0 \qquad (h = 1 \dots m) \tag{49}$$

sia permesso dai vincoli anolonomi (3), passo alla dimostrazione della « regola di equilibrio ».

Essendo per la supposta fissità di

$$\left[\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}\right]_{q\equiv 0} = 0,$$

---

13) Geometricamente ciò significa che il componente di F ortogonale a $b_1, \dots, b_\alpha$ deve esser diretto verso la banda dei vincoli 39) consentita al sistema in P^*.

14) La cosa potrebbe stabilirsi, per es., applicando un criterio di scarto del tipo di quelli che considererò in un lavoro di prossima pubblicazione sui Teoremi di esistenza e di unicità del moto, per sistemi molto comuni e regolari.

per (13) è pure

$$\{00, h\}_{q=0} = 0 \qquad (h = 1 \dots m), \tag{50}$$

Da (32) segue

$$\gamma_r[q^*(t) \mid \dot{q}^*(t) \mid t] \equiv 0 \qquad (r = 1 \dots \alpha) \tag{51}$$

onde per (34) e (41) è

$$Q_h^*(0 \mid 0 \mid t) = Q_h^{**}(t) \qquad (h = 1 \dots m) \tag{52}$$

Per (52) e $(48)_1$ e (41) è

$$Q_h(0 \mid 0 \mid t) + \sum_{r=1}^{\alpha} b_{rh}(0 \mid 0 \mid t)\Phi^r(0 \mid 0 \mid t) \equiv 0 \qquad (h = 1 \dots \mu). \tag{53}$$

Per (50) è poi

$$\Big[\sum_{k=1}^{m} a_{hk}\ddot{q}_k + \sum_{=0}^{m} \{kl, h\}\, \dot{q}_k \dot{q}_l\Big]_{q=0} = \{00, h\}_{q=0} = 0 \qquad (h = 1 \dots \mu)$$

onde, per (53), le equazioni (36′) relative ad $\mathfrak{S}_\alpha^*$, per $h = 1 \dots \mu$, son soddisfatte dal moto $\{q_h^*(t)\}$ dato dalle (49).

Le componenti lagrangiane secondo le coordinate $q_{\mu+1} \dots q_m$ della reazione vincolare competente al moto $\{q_h^*(t)\}$, per le posizioni (43), per le (50) e (52), sono le

$$\Psi_j[q^*(t) \mid \dot{q}^*(t) \mid t] = -Q_j^*[0 \mid 0 \mid t] \geq 0 \qquad (j = \mu+1 \dots m).$$

Poiché il moto $\{q_h^*(t)\}$ è evidentemente di tipo $\mathfrak{M}_{\mathfrak{S}_\alpha^*}$, in base al teorema precedente, segue la enunciata regola d'equilibrio.