

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

Sulla derivabilità, rispetto a valori iniziali ed a parametri, delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 28 (1958), p. 71-106

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__71_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

SULLA DERIVABILITÀ, RISPETTO A VALORI INIZIALI ED A PARAMETRI, DELLE SOLUZIONI DEI SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE DEL PRIMO ORDINE

Memoria () di MARIO VOLPATO (a Ferrara)*

In questa Memoria mi propongo di estendere, nell'indirizzo di Carathéodory, i teoremi di derivazione delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie rispetto a parametri ed a valori iniziali, classici nel caso continuo. In questo ordine di idee mi sembra di dar qui risultati presso che definitivi. Ecco comunque di che si tratta.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(1) \quad \frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \quad (i = 1, \dots, n),$$

dipendenti dal parametro λ e supponiamo soddisfatta la seguente

IPOTESI H:

le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$, ($i = 1, \dots, n$), definite nello strato

$$S: a \leq x \leq b \quad ; \quad -\infty < y_1, \dots, y_n, \quad \lambda < +\infty,$$

sono sommabili¹⁾ rispetto ad x sulle sezioni di S con le paral-

(*) Pervenuta in Redazione il 20 maggio 1958.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Ferrara.

1) Tutte le considerazioni di questa Memoria si svolgono nell'ambito della teoria delle funzioni reali di variabili reali; la misura e la integrazione sono sempre intese nel senso di LEBESGUE.

lele all'asse x , mentre su quasi tutte le sezioni di S coi piani $x = \text{cost.}$ soddisfanno le

$$(2) \quad |f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) - f_i(x, Y_1, \dots, Y_n, \Lambda)| \leq \\ \leq P_i(x) \left\{ \sum_r^n |y_r - Y_r| + |\lambda - \Lambda| \right\}, \quad (i=1, \dots, n),$$

qualunque siano le $(n+1)$ -uple $(y_1, \dots, y_n, \lambda)$; $(Y_1, \dots, Y_n, \Lambda)$, $P_i(x)$, $(i=1, \dots, n)$, essendo funzioni non negative sommabili in $I_x = a \leq x \leq b$ ²⁾.

Allora se $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ è un punto, fissato comunque in S , esiste una ed una sola curva integrale

$$(3) \quad y_1 = \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda); \dots; y_n = \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$$

del sistema (1), soddisfacente le condizioni iniziali

$$(4) \quad y_1(\xi) = \eta_1, \dots, y_n(\xi) = \eta_n,$$

qualora alle funzioni $\varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$, $(i=1, \dots, n)$, si imponga di essere assolutamente continue rispetto ad x in I_x ³⁾.

Inoltre, a norma delle (2), esistono le derivate parziali $\frac{\partial f_i}{\partial y_r}, \frac{\partial f_i}{\partial \lambda}$, $(i, r=1, \dots, n)$ in quasi tutti i punti di S . Noi considereremo le φ_i , $(i=1, \dots, n)$, come funzioni delle $n+3$ variabili $x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$ definite nell'insieme

$$S_* : a \leq x, \xi \leq b : -\infty < \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda < +\infty,$$

e dovremo occuparci dell'esistenza e delle proprietà delle derivate parziali di φ_i , $(i=1, \dots, n)$, rispetto a $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$.

Ebbene, premesso che useremo le notazioni definite dalle

$$f'_{i, y_r} = \frac{\partial f_i}{\partial y_r}; f'_{i, \lambda} = \frac{\partial f_i}{\partial \lambda}; \varphi'_{i, \xi} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}; \varphi'_{i, \eta_r} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta_r}; \varphi'_{i, \lambda} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda};$$

²⁾ È il caso di osservare che, in virtù delle (2), le funzioni f_i risultano sommabili su tutte le sezioni di S con le parallele all'asse x , non appena esse siano sommabili su una e misurabili sulle altre.

³⁾ Per l'esistenza ed unicità della curva integrale (3) si veggia nel n. 2 il lemma 1.

$$V = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \eta_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix}; \quad V_i^\xi = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \gamma_{i1}} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_{i-1}} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_{i+1}} & \dots & \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \gamma_{i1}} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \eta_{i-1}} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \eta_{i+1}} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial \eta_n} \end{vmatrix},$$

(i, r = 1, \dots, n),

noi qui proveremo il seguente

TEOREMA: *Nell'ipotesi H, in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S* con le parallele all'asse x esistono le derivate parziali \varphi'_{i,\xi}, \varphi'_{i,\eta_r}, \varphi'_{i,\lambda}, (i, r = 1, \dots, n); e queste soddisfanno alle*

$$(5) \quad \varphi'_{i,\xi}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = -f_i(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) +$$

$$+ \int_{\xi}^x \sum_r^n f'_{i,y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots,$$

$$\dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi'_{r,\xi}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) dt,$$

(i = 1, \dots, n),

$$(6) \quad \varphi'_{i,n_j}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \varepsilon_{i,j} +$$

$$+ \int_{\xi}^x \sum_r^n f'_{i,y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots,$$

$$\dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi_{r,\eta_j}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) dt$$

(\varepsilon_{i,j} = 0 se i \neq j; \varepsilon_{i,j} = 1 se i = j), (i, j = 1, \dots, n),

$$(7) \quad \varphi_{i,\xi}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \sum_r^n f_r(\xi, \eta_1, \dots,$$

$$\dots, \eta_n, \lambda) \varphi'_{i,\eta_r}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = 0,$$

$$(8) \quad V(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) =$$

$$= e \int_{\xi}^x \sum_r^n f'_{r,y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt,$$

$$(9) \quad V_i^{\xi}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = -f_i(\xi, \eta_1, \dots, \dots, \eta_n, \lambda) e^{\xi} \int_1^x \sum_r^n f_{r, y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt,$$

$$(10) \quad \varphi'_{i, \lambda}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \\ = \int_{\xi}^x \left\{ \sum_1^n f'_{i, y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi'_{r, \lambda}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \right. \\ \left. + f'_{i, \lambda}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \right\} dt$$

in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* con le parallele all'asse x^4).

È ovvio che questo teorema può servire come base per riprendere *ex novo* lo studio, già iniziato da M. Cinquini Cibrario e da S. Cinquini⁵), di alcuni tipi di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine in ipotesi che rispecchino l'ordine di idee sviluppato da Carathéodory per le equazioni differenziali ordinarie. Questa ricerca sarà l'argomento di un prossimo lavoro. Qui mi limito a segnalare il fatto che nel mio teorema è già implicito un criterio per l'esistenza di soluzioni dell'equazione

$$(11) \quad \frac{\partial z}{\partial \xi} + \sum_1^n f_r(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \frac{\partial z}{\partial \eta_r} = 0,$$

⁴) Le (6) e la (8), con $\xi = a$ e $\lambda = \text{cost}$, sono state stabilite da M. TSUJI (*On Lindelöf's theorem in the theory of differential equations*, Jap. Journ. of Math. vol. XVI, (1940), pp. 149-161) nell'ipotesi che le funzioni f_i siano continue e soddisfacciano la condizione di LIPSCHITZ, rispetto alle y_1, \dots, y_n , con coefficienti costanti.

⁵) Cfr. M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$* , Ann. di Mat. pura e applic., vol. XXXII, (1951), pp. 121-155; *Ancora sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione $p = f(x, y, z, q)$* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, vol. VI (1952), pp. 187-243; M. CINQUINI CIBRARIO, *Nuovi teoremi di esistenza e di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali*, Ann. Scuola Norm. sup. Pisa, vol. IX (1955), pp. 65-113.

qualora all'incognita $z(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ si imponga il seguente dato di Cauchy

$$(12) \quad z(x, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \eta_i,$$

($x = \text{cost.}$). Invero la funzione

$$z(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$$

soddisfa l'equazione (11) e la condizione (12), come segue ovviamente dalle (4) e (7).

Nel n. 1 fisso altre notazioni e premetto alcune disuguaglianze e in quelli successivi stabilisco alcuni lemmi essenziali; il teorema è dimostrato nei n. 7, 8 e lievemente generalizzato nel n. 9. Indico poi delle condizioni sufficienti per la continuità (n. 10) e l'ulteriore derivabilità (n. 11). delle φ_i .

1. - Manteniamo il significato di tutti i simboli finora considerati.

Inoltre, siano

$$y_i^*, \dots, y_n^*, \lambda^*,$$

delle costanti qualsiasi fissate una volta per tutte e $\gamma(x)$, $\delta(x)$ le funzioni definite dalle

$$\gamma(x) = \sum_1^n P_i(x),$$

$$\delta(x) = \sum_1^n P_i(x) \left\{ \sum_1^n |\eta_r - y_r^*| + |\lambda - \lambda^*| \right\} + \sum_1^n |f_i^*|$$

con

$$f_i^* = f_i(x, y_1^*, \dots, y_n^*, \lambda^*).$$

Poniamo ancora:

$$(13) \quad \Gamma(x, \xi) = \begin{cases} e^{\int_x^\xi \gamma(t) dt} & , \text{ per } a \leq x \leq \xi, \\ e^{\int_\xi^x \gamma(t) dt} & , \text{ per } \xi \leq x \leq b, \end{cases}$$

$$(14) \quad N(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) =$$

$$= \begin{cases} e^x \int_x^\xi \gamma(t) dt \int_x^\xi \delta(t) e^{-\int_t^\xi \gamma(\tau) d\tau} dt, & \text{per } a \leq x \leq \xi, \\ e^\xi \int_\xi^x \gamma(t) dt \int_\xi^x \delta(t) e^{-\int_\xi^t \gamma(\tau) d\tau} dt, & \text{per } \xi \leq x \leq b, \end{cases}$$

$$(15) \quad M(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) =$$

$$= \begin{cases} \gamma(x) e^x \int_x^\xi \delta(t) e^{-\int_t^\xi \gamma(\tau) d\tau} dt + \delta(x), & \text{per } a \leq x \leq \xi, \\ \gamma(x) e^\xi \int_\xi^x \delta(t) e^{-\int_\xi^t \gamma(\tau) d\tau} dt + \delta(x), & \text{per } \xi \leq x \leq b, \end{cases}$$

e osserviamo che le posizioni fatte implicano, ovviamente, le seguenti proprietà:

la funzione $\Gamma(x, \xi)$ è continua nel quadrato $a \leq x, \xi \leq b$, e soddisfa le

$$(16) \quad 1 \leq \Gamma(x, \xi) = e^{\left| \int_\xi^x \gamma(t) dt \right|} \leq e^a;$$

per ogni fissata $(n+1)$ -upla $(\eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*)$ la funzione $N(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*)$ è continua nel quadrato $a \leq x, \xi \leq b$, e soddisfa le

$$(17) \quad 0 \leq N(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) \leq$$

$$\leq e^a \int_a^b \delta(t) dt;$$

per ogni fissata $(n+1)$ -upla $(\eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*)$ la funzione $M(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*)$, definita nel

quadrato $a \leq x, \xi \leq b$, è sommabile rispetto ad x , continua rispetto a ξ , e soddisfa le

$$(18) \quad 0 \leq M(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) \leq \\ \leq \gamma(x)e^\alpha \int_a^b \gamma(t)dt \int_a^b \delta(t)dt + \delta(x);$$

le funzioni M ed N sono vincolate dalla

$$N(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) = \\ = \begin{cases} \int_a^\xi M(t, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*)dt, & \text{per } a \leq x \leq \xi, \\ \int_\xi^x M(t, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*)dt, & \text{per } \xi \leq x \leq b, \end{cases}$$

ossia, dall'uguaglianza

$$(19) \quad N(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) = \\ = \left| \int_\xi^x M(t, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*)dt \right|.$$

Infine, posto

$$(20) \quad \bar{M}(x, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) = \\ = \gamma(x)e^\alpha \int_a^b \gamma(t)dt \int_a^b \delta(t)dt + \delta(x),$$

rileviamo che se p è un numero reale positivo ed $\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$ soddisfanno le

$$(21) \quad |\eta_1 - y_1^*| \leq p; \dots; |\eta_n - y_n^*| \leq p; |\lambda - \lambda^*| \leq p,$$

allora sussistono le

$$(22) \quad 0 \leq M(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) \leq \bar{M}(x, p, \dots, p, p), \\ \bar{M}(x, p, \dots, p, p) \text{ riuscendo sommabile in } I_x.$$

2. - Ciò premesso passiamo a stabilire il

LEMMA 1. - *Nell'ipotesi H, esiste una ed una sola n-upla di funzioni*

$$\varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda),$$

assolutamente continue rispetto ad x in I_x, soddisfacenti le

$$(23) \quad \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \eta_i + \int_{\xi}^x f_i(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt, \\ (i = 1, \dots, n),$$

e le

$$(24) \quad \sum_1^n |\varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \eta_i| \leq \\ \leq N(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*),$$

$$(25) \quad \sum_1^n |\varphi_i(x', \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \varphi_i(x'', \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)| \leq \\ \leq \left| \int_{x'}^{x''} M(t, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right|,$$

$$(26) \quad \sum_1^n |\varphi_i(x, \xi', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \varphi_i(x, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)| \leq \\ \leq \Gamma(x, \xi') \left| \int_{\xi'}^{\xi''} M(t, \xi'', \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right|,$$

$$(27) \quad \sum_1^n |\varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_j', \dots, \eta_n, \lambda) - \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_j'', \dots, \eta_n, \lambda)| \leq \\ \leq |\eta_j' - \eta_j''| \Gamma(x, \xi), \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$(28) \quad \sum_1^n |\varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda') - \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda'')| \leq \\ \leq (\Gamma(x, \xi) - 1) |\lambda' - \lambda''|.$$

I fatti riportati nel lemma sono praticamente noti⁶⁾. Comunque, per comodità del lettore, accenniamo brevemente la dimostrazione.

L'esistenza delle funzioni φ_i , ($i=1, \dots, n$), soddisfacenti le (23), può essere stabilita con uno qualsiasi dei noti procedimenti esistenziali perchè, come ora vedremo, le φ_i , ($i=1, \dots, n$), in quanto funzioni della sola x , possono essere maggiorate a priori.

Infatti le (23) e l'ipotesi H porgono, quasi ovunque in I_x , la

$$(29) \quad \sum_1^n \left| \frac{d}{dx} (\varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \eta_i) \right| \leq \\ \leq \sum_1^n |f_i(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda)| \leq \\ \leq \gamma(x) \sum_1^n |\varphi_r(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \eta_r| + \delta(x).$$

Di qui, dalla

$$\left| \frac{d}{dx} \sum_1^n |\varphi_r(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \eta_r| \right| = \\ = \sum_1^n \left| \frac{d}{dx} (\varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \eta_i) \right|,$$

soddisfatta quasi ovunque in I_x , e da una nota estensione del lemma di Gronwall⁷⁾, segue

$$(30) \quad \sum_1^n |\varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \eta_i| \leq \\ \leq N(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*),$$

il secondo membro essendo, a norma della (17), limitato. Pertanto, possiamo ritenere stabilita l'esistenza delle funzioni

⁶⁾ Si veggia, per es., nel primo dei lavori citati in (5) il lemma 1 a p. 123 e nell'ultimo la nota ¹⁶⁾ a piè di p. 74, la nota ¹⁷⁾ a piè di p. 76 e la nota ¹⁸⁾ a piè di p. 83.

⁷⁾ Alludiamo qui alla seguente proposizione, che è un caso particolare di un teorema generale di L. GIULIANO (*Generalizzazione di un lemma di Gronwall e di una disuguaglianza di Peano*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Vol. I (1946), pp. 1264-1271, n. 3 e 4),

$\varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$, ($i=1, \dots, n$), soddisfacenti non solo alle (23) ma anche alla (24). Ricordiamo che anche l'unicità delle funzioni $\varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$, ($i=1, \dots, n$), soddisfacenti le (23) può essere stabilita ricorrendo all'estensione del lemma di Gronwall già citata. Facciamo poi osservare che la (29), la (24) e la (15) porgono, per quasi tutti gli x di I_x , la

$$(31) \quad \sum_1^n |f_i(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda)| \leq \\ \leq M(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda).$$

Questa e le (23) portano allora alla (25). Ed ecco come si giustifica la (26). Poniamo

$$(32) \quad U(x) = \sum_1^n |\varphi_i(x, \xi', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \varphi_i(x, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)| = \\ = \sum_1^n \left| \int_{\xi'}^x \{f_i(t, \varphi_1(t, \xi', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) - \right. \\ \left. - f_i(t, \varphi_1(t, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda)\} dt + \right. \\ \left. + \int_{\xi'}^{\xi''} f_i(t, \varphi_1(t, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt \right|,$$

se $z(x)$ è una funzione assolutamente continua in (a, b) , se $\gamma(x)$, $\delta(x)$ sono due funzioni non negative e sommabili in (a, b) e tali che per tutti gli x di (a, b) sia

$$|z'(x)| \leq \gamma(x) |z(x)| + \delta(x),$$

allora risulta per tutti gli x di (a, b)

$$|z(x)| \leq e^a \int_a^x \gamma(t) dt \left[|z(a)| + \int_a^x \delta(t) e^{-\int_a^t \gamma(\tau) d\tau} dt \right], \text{ se } a \leq x \leq b,$$

$$|z(x)| \leq e^x \int_x^a \gamma(t) dt \left[|z(a)| + \int_x^a \delta(t) e^{-\int_t^a \gamma(\tau) d\tau} dt \right], \text{ se } b \leq x \leq a;$$

(cfr. il primo dei lavori citati in (5), nota ¹³) a piè di p. 125).

e osserviamo che per quasi tutti gli x di I_x sussiste la

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dx} U(x) \right| &= \left| \sum_1^n \frac{d}{dx} |\varphi_i(x, \xi', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \varphi_i(x, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)| \right| \leq \\ &\leq \sum_1^n \left| \frac{d}{dx} |\varphi_i(x, \xi', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \varphi_i(x, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)| \right| = \\ &= \sum_1^n \left| \frac{d}{dx} (\varphi_i(x, \xi', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \varphi_i(x, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)) \right| = \\ &= \sum_1^n |f_i(x, \varphi_1(x, \xi', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) - \\ &- f_i(x, \varphi_1(x, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda)| \leq \\ &\leq \gamma(x) U(x), \end{aligned}$$

di guisa che, per l'estensione del lemma di Gronwall già ricordata,

$$U(x) \leq U(\xi') \Gamma(x, \xi').$$

Di qui e dal fatto che la (32) e la (31) porgono la

$$\begin{aligned} U(\xi') &= \sum_1^n \left| \int_{\xi'}^{\xi''} f_i(t, \varphi_1(t, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \sum_1^n |f_i(t, \varphi_1(t, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda)| dt \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\xi'}^{\xi''} M(t, \xi'', \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right|, \end{aligned}$$

segue subito la (26). Con procedimento analogo posto

$$U_j(x) = \sum_1^n |\varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_j', \dots, \eta_n, \lambda) - \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_j'', \dots, \eta_n, \lambda)|,$$

$$U_\lambda(x) = \sum_1^n |\varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda') - \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda'')|,$$

si stabiliscono, per quasi tutti gli x di I_x , le

$$\left| \frac{d}{dx} U_j(x) \right| \leq \gamma(x) U_j(x),$$

$$\left| \frac{d}{dx} U_\lambda(x) \right| \leq \gamma(x) U_\lambda(x) + \gamma(x) |\lambda' - \lambda''|,$$

e si deducono, attese le $U_j(\xi) = |\eta'_j - \eta''_j|$, $U_\lambda(\xi) = 0$, le (27) e (28). Il lemma è così provato.

OSSERVAZIONE 1. - Le disuguaglianze (25), (26), (27), (28) e le (18) e (20) implicano la

$$(33) \quad \left| \varphi_i(x', \xi', \eta'_1, \dots, \eta'_n, \lambda') - \varphi_i(x'', \xi'', \eta''_1, \dots, \eta''_n, \lambda'') \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x'}^{x''} \overline{M}(t, \eta'_1 - y_1^*, \dots, \eta'_n - y_n^*, \lambda' - \lambda^*) dt \right| +$$

$$+ e^\alpha \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \overline{M}(t, \eta'_1 - y_1^*, \dots, \eta'_n - y_n^*, \lambda' - \lambda^*) dt \right| +$$

$$+ e^\alpha \sum_1^n \int_1^b \gamma(t) dt |\eta'_j - \eta''_j| + (e^\alpha - 1) |\lambda' - \lambda''|,$$

che porge la continuità delle funzioni $\varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$, ($i=1, \dots, n$), in S_* .

OSSERVAZIONE 2. - Faccio rilevare che le (23) e l'ipotesi H implicano le

$$(34) \quad \frac{d}{dx} \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) =$$

$$= f_i(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda),$$

$$(i = 1, \dots, n),$$

almeno a prescindere dagli x di una conveniente porzione di I_x che non dipende da $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ e che ha misura (lineare) nulla.

Infatti l'ipotesi H e la continuità delle φ_i implicano che le funzioni

$$(35) \quad f_i(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda)$$

sono misurabili rispetto ad x , continue rispetto a $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ almeno per quasi tutti gli x di I_x , e se p è un numero reale positivo qualsiasi e le $\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$ soddisfano le (21), esse, a norma della (31) e delle (22), sono maggiorate, in modulo, da $\overline{M}(x, p, \dots, p \cdot p)$ che è sommabile in I_x . Attesa l'arbitrarietà di p , per concludere basta ricordare il seguente teorema di G. Scorza Dragoni: *Se la funzione $g(x, y_1, \dots, y_n)$ è misurabile rispetto ad x e continua rispetto ad (y_1, \dots, y_n) nello strato $a \leq x \leq b, -\infty < y_1, \dots, y_n < +\infty$ e vi è maggiorata, in modulo, da una funzione della sola variabile x sommabile in (a, b) , la relazione*

$$\frac{d}{dx} \int_a^x g(t, y_1, \dots, y_n) dt = g(x, y_1, \dots, y_n)$$

è certamente valida se si prescinde in (a, b) da una conveniente porzione che ha misura nulla e che non dipende da (y_1, \dots, y_n) ⁸⁾, che, per la nostra dimostrazione, avrà in seguito un ruolo essenziale.

3. - Nei lemmi che esporremo d'ora in avanti sarà sempre sottointeso che le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$ soddisfano l'ipotesi H . Ciò premesso, dimostriamo il

LEMMA 2. - *La trasformazione T definita dalle relazioni*

$$(36) \quad \left. \begin{array}{l} x = x \\ \xi = \xi \\ \lambda = \lambda \\ y_1 = \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \end{array} \right\} (a \leq x, \xi \leq b; -\infty < \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda < +\infty) = S_*$$

⁸⁾ G. SCORZA DRAGONI, *Una applicazione della quasi continuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto all'altra variabile*, Rend. Accad. Naz. Lincei, s. VIII, vol. XII (1952), pp. 55-61; Cfr. anche, dello stesso Autore, *Sulla derivazione degli integrali definiti*, ibidem, vol. XX (1956), pp. 711-714.

è topologica e bimisurabile ⁹⁾.

La trasformazione T è univoca e continua in tutto S_* in virtù del teorema di esistenza ed unicità per le soluzioni assolutamente continue del sistema (1) soddisfacenti le condizioni iniziali (4), (v. lemma 1), e in virtù della prima osservazione del numero precedente. Le stesse circostanze provano che T è univocamente invertibile e che l'inversa T^{-1} , della T , è anch'essa continua.

Nel fatto T^{-1} è data, ovviamente, dalle

$$(37) \left. \begin{array}{l} x = x \\ \xi = \xi \\ \lambda = \lambda \\ \eta_1 = \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \eta_n = \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) \end{array} \right\}, (a \leq x, \xi \leq b; -\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty) = S'_*$$

dove la n -upla

$$\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$$

di funzioni, assolutamente continue rispetto a ξ nell'intervallo $I_\xi = a \leq \xi \leq b$, è la soluzione del sistema

$$(38) \quad \frac{d\eta_i}{d\xi} = f_i(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \quad (i = 1, \dots, n),$$

soddisfacente alle condizioni iniziali

$$(39) \quad \eta_1(x) = y_1, \dots, \eta_n(x) = y_n.$$

Si tratta ora di provare che T e T^{-1} sono misurabili.

A tale scopo osserviamo che la (33) porge le

$$(40) \quad \frac{|\varphi_i(x', \xi', \eta'_1, \dots, \eta'_n, \lambda') - \varphi_i(x'', \xi'', \eta''_1, \dots, \eta''_n, \lambda'')|}{\sqrt{(x' - x'')^2 + (\xi' - \xi'')^2 + \sum_1^n (\eta'_j - \eta''_j)^2 + (\lambda' - \lambda'')^2}} \leq$$

⁹⁾ Cioè T e la sua inversa T^{-1} mutano insiemi misurabili in insiemi misurabili e quindi (RADEMACHER, *Eineidentige Abbildung und Messbarkeit*, Monatheft. Mat. u. Phys. vol. 27, 1916) insiemi di misura nulla in insiemi di misura nulla.

$$\begin{aligned} &\leq \left| \frac{1}{x' - x''} \int_{x'}^{x''} \overline{M}(t, \eta'_1 - y_1^*, \dots, \eta'_n - y_n^*, \lambda' - \lambda^*) dt \right| + \\ &+ \left| \frac{1}{\xi' - \xi''} \int_{\xi'}^{\xi''} \overline{M}(t, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta'_n - y_n^*, \lambda' - \lambda^*) dt \right| e^{\int_{\xi'}^b \gamma(t) dt} + \\ &\qquad\qquad\qquad + 2e^{\int_{\xi'}^b \gamma(t) dt} - 1 \qquad\qquad\qquad (i = 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Ebbene, se p è un numero reale positivo qualsiasi e se $(x', \xi', \eta'_1, \dots, \eta'_n, \lambda')$; $(x'', \xi'', \eta''_1, \dots, \eta''_n, \lambda'')$ sono punti qualsiasi di

$$S_{*p} : a \leq x, \xi \leq b; -p \leq \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^* \leq p,$$

in virtù della (22) e del fatto che, in quasi tutto l'intervallo (a, b) , esistono finiti i limiti

$$\begin{aligned} &\lim_{|x' - x''| \rightarrow 0} \left| \frac{1}{x' - x''} \int_{x'}^{x''} \overline{M}(t, p, \dots, p, p) dt \right|; \\ &\lim_{|\xi' - \xi''| \rightarrow 0} \left| \frac{1}{\xi' - \xi''} \int_{\xi'}^{\xi''} \overline{M}(t, p, \dots, p, p) dt \right|, \end{aligned}$$

si trae, dalle (40), che in S_{*p} sussistono le

$$(41) \quad \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{|\varphi_i(x', \xi', \eta'_1, \dots, \eta'_n, \lambda') - \varphi_i(x'', \xi'', \eta''_1, \dots, \eta''_n, \lambda'')|}{\delta} < +\infty,$$

$$(i=1, \dots, n); \delta = \sqrt{(x' - x'')^2 + (\xi' - \xi'')^2 + \sum_1^n (\eta'_j - \eta''_j)^2 + (\lambda' - \lambda'')^2},$$

a prescindere da una porzione R^0 che ha nulla la misura $(n + 3)$ -dimensionale e che ha nulla la misura bidimensionale della propria proiezione, $R^0_{x, \xi}$, sul quadrato $I_x \times I_\xi$.

Ciò basta, a norma di un noto risultato¹⁰⁾, per concludere che T è misurabile in $S_{*p} - R^0$.

¹⁰⁾ Cfr. M. TSUJI, *Change of variables in the multiple Lebesgue integrals*, Journ. Math. Soc. of Japan, vol. II (1950), pp. 48-56.

Ma la proiezione di $T(R^0)$ sul quadrato $I_x \times I_\xi$ è l'insieme $R_{x,\xi}^0$. Pertanto $T(R^0)$, al pari di R^0 , ha misura $(n+3)$ -dimensionale nulla. Di qui e dall'arbitrarietà di p , segue la misurabilità di T in S_* .

Le stesse considerazioni provano che è misurabile anche T^{-1} dato che le ultime n delle (37) forniscono la soluzione di (38), (39). Il lemma è provato.

4. - Passiamo a stabilire il

LEMMA 3 - In S_* : ($a \leq x$, $\xi \leq b$; $-\infty < \eta_1, \dots, \eta_n$, $\lambda < +\infty$) esiste un insieme e_* di misura $(n+3)$ dimensionale nulla tale che se $(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \in S_* - e_*$, le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$, ($i=1, \dots, n$), sono differenziabili rispetto alle variabili $(y_1, \dots, y_n, \lambda)$ in tutti i punti

$$(42) \quad (x; \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda); \dots; \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda); \lambda);$$

le funzioni

$$(43) \quad f'_{i,y_r}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda),$$

$$(44) \quad f'_{i,\lambda}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda),$$

($i, r=1, \dots, n$), sono misurabili in S_* e maggiorate, in modulo, da $P_i(x)$.

L'ipotesi H oltre l'esistenza quasi ovunque in S : ($a \leq x \leq b$; $-\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty$), delle f'_{i,y_r} , $f'_{i,\lambda}$, ($i, r=1, \dots, n$), implica la loro misurabilità¹¹⁾ e le

$$(45) \quad |f_{i,y_r}| \leq P_i(x); \quad |f'_{i,\lambda}| \leq P_i(x).$$

La misurabilità delle f'_{i,y_r} , $f'_{i,\lambda}$, ($i, r=1, \dots, n$), insieme

¹¹⁾ Cfr., per es., M. VOLPATO, *Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Nota I, Rend. Accad. Naz. Lincei, s. VIII, Vol. XX (1956), pp. 31-37, p. 32, n. 1.

con quella delle f_i , implica la misurabilità, in S , del limite

$$\lim_{(h_1^2 + \dots + h_n^2 + h_{n+1}^2) \rightarrow 0} \left\{ \frac{f_i(x, y_1 + h_1, \dots, y_n + h_n, \lambda + h_{n+1}) - f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2 + h_{n+1}^2}} - \frac{\sum_r^n f'_{i,r}(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) h_r - f'_{i,\lambda}(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) h_{n+1}}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2 + h_{n+1}^2}} \right\},$$

che, per l'ipotesi H ed un noto risultato di Rademacher¹²⁾, esiste ed è nullo quasi ovunque sulle sezioni di S con quasi tutti i piani $x = \text{cost.}$ L'insieme e' di S ove tale limite può eventualmente mancare od essere diverso da zero è dunque misurabile. E poichè le sezioni di e' con quasi tutti i piani $x = \text{cost.}$ hanno misura nulla, e' ha misura $(n + 2)$ -dimensionale nulla.

Sia ora e'_* l'insieme di quei punti

$$(x, \xi, y_1, \dots, y_n, \lambda)$$

per i quali $(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) \in e'$. L'insieme e'_* ha misura $(n + 3)$ -dimensionale nulla ed è mutato da T^{-1} in un insieme e_* , di S_* , di misura $(n + 3)$ -dimensionale nulla; di guisa che e' ed e'_* , si possono, rispettivamente, pensare descritti dai punti

$$(x; \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda); \dots; \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda); \lambda)$$

$$(x; \xi; \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda); \dots; \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda); \lambda)$$

al variare di $(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ in e_* .

Di qui la conclusione.

5. - Ecco ora il

LEMMA 4. - *Le funzioni*

$$(46) \quad f_i(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda),$$

$$(47) \quad \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \quad (i = 1, \dots, n),$$

¹²⁾ H. RADEMACHER, *Über partielle un totale Differentierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über die Transformation der Doppelintegrale*, Math. Ann. vol. 79 (1919), pp. 340-359.

posseggono derivate parziali rispetto a $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$ in quasi tutto S_* , queste derivate parziali riuscendo misurabili. In quasi tutto S_* sussistono le uguaglianze

$$(48) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} f_i(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) = \\ = \sum_1^n f_{i, y_r}^{\prime}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi_{r, \xi}^{\prime}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \\ (i = 1, \dots, n),$$

$$(49) \quad \frac{\partial}{\partial \eta_j} f_i(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) = \\ = \sum_1^n f_{i, y_r}^{\prime}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi_{r, \eta_j}^{\prime}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \\ (i, j = 1, \dots, n),$$

$$(50) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} f_i(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) = \\ = \sum_1^n f_{i, y_r}^{\prime}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi_{r, \lambda}^{\prime}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \\ f_{i, \lambda}^{\prime}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda), \\ (i = 1, \dots, n),$$

e pertanto le derivate parziali delle funzioni (46), (47), rispetto a $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$ sono anche sommabili in S_* perchè maggiorate, in modulo, rispettivamente, da

$$(51) \quad \gamma(x) \bar{M}(\xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) e^{\alpha \int_{\lambda^*}^{\lambda} \gamma(t) dt},$$

$$(52) \quad \gamma(x) e^{\alpha \int_{\lambda^*}^{\lambda} \gamma(t) dt},$$

$$(53) \quad \gamma(x) e^{\alpha \int_{\lambda^*}^{\lambda} \gamma(t) dt}$$

in quasi tutto S_* .

Osserviamo anzitutto che a norma dell'ipotesi H e del lemma 1, le funzioni (46), (47) sono misurabili rispetto ad x , e, almeno per quasi tutti gli x , assolutamente continue rispetto alle singole variabili $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$.

Pertanto le funzioni (46), (47) posseggono derivate parziali rispetto a $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$ in quasi tutto S_* e queste derivate parziali sono misurabili. Quindi anche i secondi membri delle (48), (49), (50) hanno senso in quasi tutto S_* in virtù del lemma 3 e sono misurabili. Inoltre in virtù dei lemmi 1 e 3 e di un noto teorema di derivazione¹³⁾, su quasi tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* con le parallele all'asse ξ sussistono le (48). Dalle considerazioni precedenti si deduce che le (48) sussistono in quasi tutto S_* .

Analogamente per le (49) e le (50). Quanto all'ultima parte del lemma essa è una conseguenza immediata del lemma 3 e del fatto che le

$$(54) \quad |\varphi'_{i, \xi}| \leq \overline{M}(\xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) e^{\alpha} \int_{\gamma(t)}^b dt, \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$(55) \quad |\varphi'_{i, \eta_j}| \leq e^{\alpha} \int_{\gamma(t)}^b dt, \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

¹³⁾ A. SAMBO, *Sulla derivazione delle funzioni composte*, Rendic. Accad. Sc. Fis. Mat. della Soc. Naz. di Sc. Lett. ed Art. Napoli, s. 4, vol. XIX (1952). Si veggia anche G. SCORZA DRAGONI, *Un'osservazione sulla derivazione delle funzioni composte*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. XX (1951), pp. 462-467.

Del teorema in discorso a noi basta il seguente caso particolare: *Nell'intervallo $a \leq t \leq b$ le funzioni $\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)$ siano continue e quasi dappertutto derivabili. Nello spazio: $-\infty < y_1, \dots, y_n < +\infty$ la funzione $g(y_1, \dots, y_n)$ sia continua e per di più differenziabile in quasi tutti i punti $[\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)]$. Inoltre la funzione composta $g[\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)]$ sia quasi dappertutto derivabile. In queste ipotesi sussiste la classica formula di derivazione*

$$\frac{d}{dt} g[\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)] = \sum_{r=1}^n g'_r[\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)] \alpha'_r(t),$$

almeno per quasi tutti i valori di t in (a, b) .

$$(56) \quad |\varphi'_{i,\lambda}| \leq e^{\alpha} \int_a^b \gamma(t) dt - 1, \quad (i = 1, \dots, n),$$

sono soddisfatte in quasi tutto S_* in virtù del lemma 1.

6. - Dimostriamo finalmente il

LEMMA 5. - *Fissato comunque il punto (x, ξ) nel quadrato $a \leq x, \xi \leq b$, per quasi tutte le $(n+1)$ -uple $(\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ sussistono le*

$$(57) \quad \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \eta_i + \int_a^\xi h_i(x, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) d\tau + \\ + \int_a^\tau f_i(t, \varphi_1(t, a, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, a, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt, \\ (i = 1, \dots, n),$$

con

$$(58) \quad h_i(x, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = -f_i(\tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \\ + \int_\tau^x \sum_{r=1}^n f'_{i,r}(t, \varphi_1(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \\ \dots, \varphi_n(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi'_{r,\xi}(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) dt, \\ (i = 1, \dots, n);$$

fissato comunque il punto (x, η_j) nella striscia $a \leq x \leq b$, $-\infty < \eta_j < +\infty$, per quasi tutte le $(n+1)$ -uple $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_{j-1}, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda)$ sussistono le

$$(59) \quad \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \eta_i + \\ + \int_{y_j^*}^{\eta_j} h_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_{j-1}, \tau, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda) d\tau + \\ + \int_\xi^x f_i(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_{j-1}, y_j^*, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \\ \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_{j-1}, y_j^*, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt, \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

con

$$\begin{aligned}
 (60) \quad k_i(x, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_{j-1}, \tau, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda) = \\
 = \int_{\xi}^x \sum_r^n f'_{i, y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_{j-1}, \tau, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda), \dots \\
 \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_{j-1}, \tau, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \cdot \\
 \cdot \varphi'_{r, \eta_j}(t, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_{j-1}, \tau, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda) dt, \\
 (i, j = 1, \dots, n);
 \end{aligned}$$

fissato comunque il punto (x, λ) nella striscia $a \leq x \leq b$, $-\infty < \lambda < +\infty$, per quasi tutte le $(n+1)$ -uple $(\xi, \eta_{11}, \dots, \eta_n)$ sussistono le

$$\begin{aligned}
 (61) \quad \varphi_i(x, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_n, \lambda) = \eta_i + \int_{\lambda^*}^{\lambda} l_i(x, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_n, \tau) d\tau + \\
 + \int_{\xi}^x f_{i, \lambda}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_n, \lambda^*), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_n, \lambda^*), \lambda^*) dt, \\
 (i = 1, \dots, n),
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 (62) \quad l_i(x, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_n, \tau) = \\
 = \int_{\xi}^x \left\{ \sum_r^n f_{i, y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_n, \tau), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_n, \tau), \tau) \varphi'_{r, \lambda}(t, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_n, \tau) + \right. \\
 \left. + f'_{i, \lambda}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_n, \tau), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_{11}, \dots, \eta_n, \tau), \tau) \right\} dt, \\
 (i = 1, \dots, n).
 \end{aligned}$$

Dimostriamo le (57). Fissato comunque il punto (x, ξ) nel quadrato $a \leq x, \xi \leq b$, dal lemma 3 e dal noto teorema di riduzione di Fubini segue

$$\begin{aligned}
 (63) \quad & \int_a^x dt \int_a^\xi \frac{\partial}{\partial \tau} f_i(t, \varphi_1(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) d\tau = \\
 & = \int_a^\xi d\tau \int_a^x \sum_{r=1}^n f'_{r, y_r}(t, \varphi_1(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \tau, \eta_1, \dots, \\
 & \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi'_{r, \xi}(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (64) \quad & \int_a^\xi dt \int_t^\xi \frac{\partial}{\partial \tau} f_i(t, \varphi_1(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) d\tau = \\
 & = \int_a^\xi d\tau \int_a^\tau \sum_{r=1}^n f'_{r, y_r}(t, \varphi_1(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \tau, \eta_1, \dots, \\
 & \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi'_{r, \xi}(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) dt,
 \end{aligned}$$

per quasi tutte le $(n+1)$ -uple $(\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$.

Di qui, sottraendo membro a membro si ottiene

$$\begin{aligned}
 (65) \quad & \int_a^x f_i(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt - \\
 & - \int_a^x f_i(t, \varphi_1(t, a, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, a, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt - \\
 & - \int_a^\xi f_i(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt + \\
 & + \int_a^\xi f_i(t, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) dt = \\
 & = \int_a^x f_i(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt - \\
 & - \int_a^x f_i(t, \varphi_1(t, a, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, a, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_a^{\xi} f_i(t, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) dt = \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \eta_i - \\
 & - \int_a^x f_i(t, \varphi_1(t, a, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, a, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt + \\
 & + \int_a^{\xi} f_i(t, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) dt = \\
 & = \int_a^{\xi} d\tau \int_{\tau}^x \sum_{r=1}^n f'_i f'_{y_r}(t, \varphi_1(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots \\
 & \dots, \varphi_n(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi'_{r, \xi}(t, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) dt,
 \end{aligned}$$

cioè appunto le (57).

Fissato comunque il punto (x, η_j) nella striscia $a \leq x \leq b$, $-\infty < \eta_j < +\infty$, dal lemma 3 e dal teorema di Fubini seguono le

$$\begin{aligned}
 (66) \quad & \int_{\xi}^x dt \int_{y_j^*}^{\eta_j} \frac{\partial}{\partial \tau} f_i(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_{j-1}, \tau, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda), \dots \\
 & \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_{j-1}, \tau, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) d\tau = \\
 & = \int_{y_j^*}^{\eta_j} d\tau \int_{\xi}^x \sum_{r=1}^n f'_i f'_{y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_{j-1}, \tau, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda), \dots \\
 & \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_{j-1}, \tau, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \cdot \\
 & \cdot \varphi'_{r, \eta_j}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_{j-1}, \tau, \eta_{j+1}, \dots, \eta_n, \lambda) dt,
 \end{aligned}$$

per quasi tutte le $(n + 1)$ -uple $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_{j-1}, \eta_{j+1}, \dots, \lambda)$.
 Da qui si traggono subito le (59).

Passiamo alle (60). Fissato comunque il punto (x, λ) nella striscia $a \leq x \leq b$, $-\infty < \lambda < +\infty$, il lemma 3 ed il teorema di Fubini porgono

$$\begin{aligned}
 (67) \quad & \int_{\xi}^x dt \int_{\lambda^*}^{\lambda} \frac{\partial}{\partial \tau} f_i(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \tau), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \tau), \tau) d\tau = \\
 & = \int_{\lambda^*}^{\lambda} d\tau \int_{\xi}^x \left\{ \sum_1^n f'_{i, y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \tau), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \tau), \tau) \varphi'_{r, \lambda}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \tau) + \right. \\
 & \quad \left. + f'_{i, \lambda}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \tau), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \tau), \tau) \right\} dt,
 \end{aligned}$$

per quasi tutte le $(n+1)$ -uple $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n)$. Di qui seguono le (60).

7. - Siamo ora in grado di dimostrare il teorema enunciato nella introduzione.

In questo numero proveremo che le (5), (6), (10) sussistono per tutti i valori di x in I_x e per quasi tutte le $(n+2)$ -uple $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$, cioè in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* con le parallele all'asse x .

Dimostriamo le (5). I primi e i secondi membri delle (5) sono funzioni misurabili in S_* . Quindi per dimostrare che le (5) sussistono in tutti i punti di quasi tutte le parallele all'asse x , basta provare che, fissata quasi ovunque la $(n+1)$ -upla $(\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$, le (5) sono soddisfatte per ogni valore di x a prescindere da quei valori di ξ contenuti in una conveniente porzione di I_{ξ} indipendente da x e di misura lineare nulla. Ora tutto ciò è conseguenza della prima affermazione del lemma 5 e del teorema di Scorza Dragoni (cfr. osserv. 2 del n. 1), dato che le funzioni $h_i(x, \tau, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ sono misurabili rispetto a τ , continue rispetto ad x , e maggiorate, in modulo, a norma del lemma 4 e dell'ipotesi H , da

$$(68) \quad \int_{\alpha}^b \gamma(t) \bar{M}(\tau, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - \eta_n^*, \lambda - \lambda^*) e^{\int_{\tau}^b \gamma(t) dt} dt + \delta(\tau).$$

In maniera analoga si stabiliscono le (6) e (10).

8. - Per completare la dimostrazione dobbiamo ancora stabilire le (7), (8), (9).

Indichiamo con e_0 l'insieme delle $(n+2)$ -uple $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ per le quali le (5) e (6) possono eventualmente non essere soddisfatte e per le quali le funzioni (43) possono eventualmente non essere sommabili, rispetto ad x , in I_x . A norma dei risultati del numero precedente e del lemma 3, e_0 ha misura $(n+2)$ -dimensionale nulla.

Ebbene, fissata comunque una $(n+2)$ -upla $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ nel complementare di e_0 e posto

$$(69) \quad Z_i(x) = \varphi_{i,\xi}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \\ + \sum_1^n f_j(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \varphi'_{i,\eta_j}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$$

le (5) e (6) porgono

$$(70) \quad Z_i(x) = \int_{\xi}^x \sum_1^n f'_r f_{i,y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots \\ \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) Z_r(t) dt,$$

per tutti gli x di I_x . Di qui e dal teorema di unicità per le soluzioni assolutamente continue dei sistemi lineari a coefficienti sommabili, segue l'identità $Z_i(x) \equiv 0$ che non è altri che la (7).

Infine le (5) e (6) implicano che ogni colonna dei determinanti jacobiani $V(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$; $V_i^\xi(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ è una soluzione in I_x , nel senso di Carathéodory, del sistema di equazioni lineari

$$(71) \quad z'_i(x) = \sum_1^n f'_r f_{i,y_r}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots \\ \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) z_r(x),$$

nelle quali la $(n+2)$ -upla $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ è da considerarsi fissata comunque nel complementare di e_0 ; esse inoltre porgono le

$$(72) \quad V(\xi, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = 1$$

$$(73) \quad V_i^\xi(\xi, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = -f_i(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda).$$

Ne segue che V e V_i^{ξ} sono soluzioni assolutamente continue in I_x dell'equazione

$$(74) \quad z'(x) = \sum_1^n f'_r f'_r(x, \varphi_1(x, \xi, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda), \lambda) z(x)$$

soddisfacenti, rispettivamente, alle condizioni iniziali

$$z(\xi) = 1, \quad z(\xi) = -f_i(\xi, \gamma_1, \dots, \gamma_n, \lambda);$$

altrettanto può dirsi per i secondi membri di (8) e (9); il teorema di unicità porge allora la conclusione.

Il nostro teorema è così completamente dimostrato.

9. - Espongo in questo numero qualche considerazione complementare utile per il seguito.

a) Faccio rilevare che nella dimostrazione dei lemmi 2, 3, 4, 5 e in quella successiva del teorema fondamentale, la lipschitzianità delle funzioni φ_i , ($i=1, \dots, n$), rispetto alle variabili $\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$, lipschitzianità implicita nelle (27) e (28) del lemma 1, non è sfruttata in maniera essenziale. Tutti quei ragionamenti si possono ripetere anche quando nei secondi membri di (27) e (28) figurano, rispettivamente, espressioni del tipo

$$\left| \int_{\eta_i'}^{\eta_i''} \mathcal{H}(t) dt \right|, \quad \left| \int_{\lambda'}^{\lambda''} \mathcal{L}(t) dt \right|,$$

con $\mathcal{H}(t)$ ed $\mathcal{L}(t)$ non negative sommabili su tutto l'asse reale. Questo fatto permette, ovviamente, di ampliare la portata del nostro teorema fondamentale sostituendo l'ipotesi H con altre meno restrittive; per esempio:

si può sostituire la disuguaglianza (2), che figura nell'ipotesi H , con la

$$(75) \quad |f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) - f_i(x, Y_1, \dots, Y_n, \Lambda)| \leq \\ \leq P_i(x) \left\{ \sum_1^n |y_r - Y_r| + \left| \int_{\lambda}^{\Lambda} L(t) dt \right| \right\},$$

dove $L(t)$ è non negativa e sommabile su tutto l'asse reale.

Infatti, la (75) implica la disuguaglianza:

$$(76) \quad |f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)| \leq P_i(x) \sum_1^n |y_r - \eta_r| + \\ + P_i(x) \left\{ \sum_1^n |\eta_r - y_r^*| + \left| \int_{\lambda}^{\lambda^*} L(t) dt \right| \right\} + |f_i(x, y_1^*, \dots, y_n^*, \lambda^*)|,$$

e allora, nelle formule (24), (25), (26) del lemma 1 compare $\left| \int_{\lambda}^{\lambda^*} L(t) dt \right|$ al posto di $|\lambda - \lambda^*|$ e nella (28) compare $\left| \int_{\lambda'}^{\lambda''} L(t) dt \right|$ al posto di $|\lambda' - \lambda''|$. E il teorema fondamentale continua a sussistere anche in questa nuova ipotesi.

b) Supponiamo ora che l'ascissa iniziale ξ figuri, come parametro, nelle funzioni f_i stesse, e che sia soddisfatta la seguente

IPOTESI H_{ξ} :

le funzioni $f_i(x, \xi, y_1, \dots, y_n, \lambda)$, ($i=1, \dots, n$), definite nell'insieme

$$S_* : a \leq x, \xi \leq b; \quad -\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty,$$

sono sommabili rispetto a x sulle sezioni di S_* con le parallele all'asse x , mentre, su quasi tutte le sezioni di S_* coi piani $x = \text{cost.}$, soddisfanno le

$$(77) \quad |f_i(x, \xi, y_1, \dots, y_n, \lambda) - f_i(x, \Xi, Y_1, \dots, Y_n, \Lambda)| \leq \\ \leq P_i(x) \left\{ \left| \int_{\xi}^{\Xi} Z(t) dt \right| + \sum_1^n |y_r - Y_r| + |\lambda - \Lambda| \right\}.$$

qualunque siano le $(n+2)$ -uple $(\xi, y_1, \dots, y_n, \lambda)$, $(\Xi, Y_1, \dots, Y_n, \Lambda)$, con $P_i(x)$, ($i=1, \dots, n$), e $Z(x)$ funzioni non negative sommabili in $\mathcal{I}_x = a \leq x \leq b$.

In questo caso, come ora vedremo, salvo modifiche di forma, le conclusioni del teorema fondamentale, sostanzialmente, rimangono. Infatti, la (77) implica

$$(78) \quad |f_i(x, \xi, y_1, \dots, y_n, \lambda)| \leq P_i(x) \sum_1^n |y_r - \eta_r| + \\ + P_i(x) \left\{ \left| \int_{\xi}^{\xi^*} Z(t) dt \right| + \sum_1^n |\eta_r - y_r^*| + |\lambda - \lambda^*| \right\} + \\ + |f_i(x, \xi^*, y_1^*, \dots, y_n^*, \lambda^*)|,$$

e pertanto, se modifichiamo la definizione di $\delta(x)$, data a p. 75, mediante la posizione

$$(79) \quad \delta(x) = \sum_1^n P_i(x) \left\{ \left| \int_{\xi}^{\xi^*} Z(t) dt \right| + \sum_1^n |\eta_r - y_r^*| + |\lambda - \lambda^*| \right\}, \\ + \sum_1^n |f_i(x, \xi^*, y_1^*, \dots, y_n^*, \lambda^*)|,$$

si vede che le (29) e (31), e di conseguenza le (24) e (25), continuano a sussistere. La (26) viene sostituita dalla

$$(80) \quad \sum_1^n |\varphi_i(x, \xi', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \varphi_i(x, \xi'', \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)| \leq \\ \leq \Gamma(x, \xi') \left| \int_{\xi'}^{\xi''} M(t, \xi'', \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right| + \\ + (\Gamma(x, \xi') - 1) \left| \int_{\xi'}^{\xi''} Z(t) dt \right|,$$

mentre le (27) e (28) rimangono inalterate. In definitiva si conclude che:

nell'ipotesi H_{ξ} , in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_ con le parallele all'asse x , le funzioni*

$$\varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda),$$

soddisfacenti le

$$(81) \quad \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \eta_i + \\ + \int_{\xi}^x f_i(t, \xi, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt, \\ (i = 1, \dots, n),$$

posseggono derivate parziali rispetto a $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$; queste derivate soddisfanno alle

$$(82) \quad \varphi_{i,\xi}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = -f_i(\xi, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \\ + \int_{\xi}^x \left\{ \sum_1^n f_{i,y_r}(t, \xi, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \right.$$

$$\dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi'_{r, \xi}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \\ + f'_{i, \xi}(t, \xi, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \Big\} dt, \\ (i = 1, \dots, n),$$

$$(83) \quad \varphi'_{i, \eta_j}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \varepsilon_{i, j} + \\ + \int_{\xi}^x \sum_1^n f'_{i, y_r}(t, \xi, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \\ \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi'_{r, \eta_j}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) dt, \\ (\varepsilon_{i, j} = 0 \text{ se } i \neq j; \varepsilon_{i, j} = 1 \text{ se } i = j), \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

$$(84) \quad \varphi'_{i, \lambda}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \\ = \int_{\xi}^x \sum_1^n f'_{i, y_r}(t, \xi, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \\ \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi'_{r, \lambda}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \\ + f'_{i, \lambda}(t, \xi, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \Big\} dt, \\ (i = 1, \dots, n),$$

in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_ con le parallele all'asse x .*

10. - Per lo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali, può interessare la conoscenza di condizioni che garantiscano la continuità in S_* delle φ'_{i, η_j} e la validità delle (7) in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* coi piani $\xi = \text{cost}$. Condizioni, di notevole generalità, sono indicate nella proposizione che segue:

se è soddisfatta l'ipotesi H e se inoltre su tutte le sezioni di S coi piani $x = \text{cost}$. le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$, ($i = 1, \dots, n$), sono continue insieme con le loro derivate parziali

$$f'_{i, y_1}(x, y_1, \dots, y_n, \lambda); \dots; f'_{i, y_n}(x, y_1, \dots, y_n, \lambda),$$

allora le funzioni $\varphi'_{i, \eta_j}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$, ($i, j = 1, \dots, n$), sono continue in S_ e le (7) sussistono in tutti i punti di*

quasi tutte le sezioni di S_* coi piani $\xi = \text{cost.}$, in tali sezioni risultando continue anche le $\varphi'_{i,\xi}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$, ($i = 1, \dots, n$).

Rileviamo anzitutto che nelle ipotesi attuali le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$ sono differenziabili, rispetto alle variabili, (y_1, \dots, y_n) , in tutti i punti di S . Pertanto, a norma di un noto teorema di Carathéodory⁽¹⁴⁾, le derivate parziali $\varphi'_{i,\eta_j}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$, ($i, j = 1, \dots, n$), esistono in ogni punto di S_* ed ivi soddisfanno le (6).

Proviamo ora che le φ'_{i,η_j} sono continue in

$$S_{*p}: a \leq x, \xi \leq b; -p \leq \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda \leq p,$$

la loro continuità in S_* essendo allora conseguenza dell'arbitrarietà di p . Ovviamente, basta dimostrare che in S_{*p} le φ'_{i,η_j} sono continue rispetto alle singole variabili con modulo di continuità che non dipende dalle altre variabili. Proviamo la cosa per quanto riguarda la variabile ξ . Osserviamo intanto che, valendo le (6) si stabilisce la seguente disuguaglianza

$$(85) \quad \left| \varphi'_{i,\eta_j}(x, \xi + h, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \varphi'_{i,\eta_j}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \right| \leq \\ \leq e^a \int_a^b \gamma(t) dt \left\{ e^a \int_a^b \gamma(t) dt \left| \int_{\xi+h}^{\xi} \gamma(t) dt \right| + \right. \\ \left. + \int_a^b \sum_r^n |f'_{i,y_r}(t, \varphi_1(t, \xi + h, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi + h, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) - \right. \\ \left. - f'_{i,y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) | dt \right\},$$

ricorrendo alla solita generalizzazione del lemma di Gronwall e a maggiorazioni consentite dal lemma 1.

Pertanto basta provare che, fissato ad arbitrio un numero positivo ε , sussiste la

$$(86) \quad \int_a^b \sum_r^n |f'_{i,y_r}(t, \xi + h, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots \\ \dots, \varphi_n(t, \xi + h, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) - \\ - f'_{i,y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) | dt < \varepsilon,$$

(14) C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über Reelle Funktionen*, Chelsea Publ. Comp., New York, (1948), Cap. XI, n. 587, Satz 7, p. 682.

non appena sia $|h| < \rho$, con $\rho > 0$, conveniente, ma indipendente da $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$. A tale scopo, osservato che l'espressione che figura sotto il segno di integrale in (86) è maggiorata da $2\gamma(t)$, determiniamo un $\sigma > 0$ in guisa che risulti

$$(87) \quad 2 \int_E \gamma(t) dt < \frac{\varepsilon}{2},$$

per ogni porzione E , di I_x , avente misura minore di σ . Osserviamo poi che la funzione

$$(88) \quad f'_{i, y_r}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda),$$

attese le ipotesi assunte, è misurabile rispetto ad x , continua rispetto a $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ e maggiorata, in modulo, in S_{*p} , dalla funzione $P_i(x)$ sommabile in I_x .

Allora, a norma di un teorema di G. Scorza Dragoni¹⁵), in corrispondenza al numero positivo σ , esiste una porzione aperta Δ di S_{*p} , avente proiezione $\Delta(x)$, sull'asse x , di misura minore di σ , tale che nella porzione chiusa $S_{*p} - \Delta$ la funzione (88) è uniformemente continua rispetto a $(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$. Di qui, per ogni $x \in I_x - \Delta(x)$, la disuguaglianza

$$(89) \quad |f'_{i, y_r}(x, \varphi_1(x, \xi + h, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi + h, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) - \\ - f'_{i, y_r}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda)| < \frac{\varepsilon}{2n(b-a)},$$

non appena sia $|h| < \rho$ conveniente ma indipendente da $(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$. Scomponendo allora l'integrale che figura in (86) nella somma di due, uno esteso all'insieme $I_x - \Delta(x)$, l'altro all'insieme $\Delta(x)$, segue senz'altro la conclusione desiderata attese le (87) e (89). In maniera analoga si ragiona per le altre variabili $\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$.

(15) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XVII (1948), pp. 102-106. Per il caso di funzioni di più variabili si veggia G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni di n variabili*, Ricerche di Matematica, vol. I (1952), pp. 27-54, p. 30.

Per completare la dimostrazione dobbiamo provare la validità delle (7) in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* coi piani $\xi = \text{cost}$.

Questo fatto, la continuità delle φ'_{i, η_j} in S_* e delle f_i , ($i=1, \dots, n$), su quelle sezioni porgeranno poi la continuità, sulle sezioni stesse, delle $\varphi'_{i, \xi}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$.

Sappiamo già che le (7) sussistono per tutti gli x di I_x e per quasi tutte le $(n+2)$ -uple $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$. Allora, integrandole rispetto a ξ , sull'intervallo (a, ξ) , esse porgono le

$$(91) \quad \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \varphi_i(x, a, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \\ - \int_a^\xi \sum_{i=1}^n f_r(t, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \varphi'_{i, \eta_r}(x, t, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) dt,$$

per tutte le coppie (x, ξ) del quadrato $a \leq x, \xi \leq b$ e per quasi tutte le $(n+1)$ -uple $(\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$. Ma i due membri delle (91) sono funzioni continue in S_* , pertanto le (91) sussistono su tutto S_* . Di qui, dal fatto che le funzioni che figurano sotto il segno di integrale delle (91) sono misurabili rispetto a t , continue rispetto a $(x, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ e maggiorate, in modulo, in S_{*p} , da una funzione sommabile,

$M(t, p, \dots, p, p) e^{\int_a^t \gamma(t) dt}$, della sola variabile t , segue, a norma del teorema di Scorza Dragoni (cfr. osserv. 2 del n. 1) che le (7) sussistono in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_{*p} coi piani $\xi = \text{cost}$.

Attesa l'arbitrarietà di p , la nostra proposizione è completamente provata.

OSSERVAZIONE. - Faccio rilevare che la proposizione ora stabilita permette di generalizzare alcuni classici risultati sulle soluzioni periodiche dei sistemi differenziali dipendenti da un parametro ¹⁶⁾.

11. - Indichiamo ora delle condizioni sufficienti per l'ulteriore derivabilità delle $\varphi'_{i, \eta_j}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$, ($i, j=1, \dots, n$), rispetto alle variabili $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$.

⁽¹⁶⁾ Si veggia, per es., G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Zanichelli (Bologna), 1941, vol. I, cap. VI, § 6, pp. 339-343.

A tale scopo supponiamo che sia soddisfatta la seguente IPOTESI H_1 :

le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$ sono derivabili rispetto ad y_1, \dots, y_n, λ nello strato

$$S : a \leq x \leq b; \quad -\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty;$$

le funzioni $f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$ e le loro derivate $f'_{i,y_j}(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$ sono sommabili rispetto ad x sulle sezioni di S con le parallele all'asse x , sono continue sulle sezioni di S coi piani $x = \text{cost.}$ e inoltre, su quasi tutte queste sezioni, soddisfanno le

$$(92) \quad |f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) - f_i(x, Y_1, \dots, Y_n, \Lambda)| \leq$$

$$\leq P_{i,x}(x) \left\{ \sum_1^n |y_r - Y_r| + |\lambda - \Lambda| \right\},$$

$$(93) \quad |f'_{i,y_j}(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) - f'_{i,y_j}(x, Y_1, \dots, Y_n, \Lambda)| \leq$$

$$\leq P_{i,j}(x) \left\{ \sum_1^n |y_r - Y_r| + |\lambda - \Lambda| \right\}, \quad (i, j = 1, \dots, n),$$

qualunque siano le $(n + 1)$ -uple $(y_1, \dots, y_n, \lambda), (Y_1, \dots, Y_n, \Lambda), P_i(x), P_{i,j}(x)$ essendo funzioni non negative sommabili in $I_x = a \leq x \leq b$.

È ovvio che questa ipotesi è più restrittiva di quella assunta nel precedente numero. Pertanto nell'ipotesi H_1 , i risultati indicati nel teorema fondamentale e quelli indicati nel n. 10 continuano a sussistere. Inoltre, ora proveremo che:

in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* con le parallele all'asse x , le funzioni

$$\varphi'_{i,\eta_1}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi'_{i,\eta_n}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda),$$

posseggono le derivate parziali rispetto a $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$; queste derivate soddisfanno alle

$$(95) \quad \varphi''_{i,\eta_j,\xi}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = -f'_{i,y_j}(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) +$$

$$+ \int_{\xi}^x \sum_1^n \left\{ \varphi'_{r,\eta_j}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \sum_1^n f''_{i,y_r,y_s}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \cdot \varphi'_{s,\xi}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + f'_{i, y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots \\
& \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi''_{r, \eta_j, \xi}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \Big\} dt, \\
& \hspace{25em} (i, j = 1, \dots, n), \\
(96) \quad & \varphi''_{i, \eta_j, \eta_\nu}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \\
& = \int_{\xi}^{\infty} \sum_r^n \left\{ \varphi'_{r, \eta_j}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \left[\sum_s^n f'_{i, y_r, y_s}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots \right. \right. \\
& \quad \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi'_{s, \eta_\nu}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \\
& \quad \left. \left. + f'_{i, y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi''_{r, \eta_j, \eta_\nu}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \right] \right\} dt, \\
& \hspace{25em} (i, j, \nu = 1, \dots, n),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(97) \quad & \varphi''_{i, \eta_j, \lambda}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \\
& = \int_{\xi}^{\infty} \sum_r^n \left\{ \varphi'_{r, \eta_j}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \left[\sum_s^n f'_{i, y_r, y_s}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots \right. \right. \\
& \quad \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi'_{s, \lambda}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \\
& \quad \left. \left. + f'_{i, y_r, \lambda}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \right] \right\} + \\
& \quad + f'_{i, y_r}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots \\
& \quad \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \varphi''_{r, \eta_j, \lambda}(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \Big\} dt, \\
& \hspace{25em} (i, j = 1, \dots, n),
\end{aligned}$$

in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_ con le parallele all'asse x .*

Infatti, definiamo nell'insieme

$$S_*^1 : a \leq x, \xi \leq b; -\infty < y_1, \dots, y_n, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda < +\infty,$$

le funzioni $g_i(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$, ($i=1, \dots, n$), imponendo loro di essere sommabili rispetto ad x sulle sezioni di S_*^1 con le parallele all'asse x , continue rispetto a $(y_1, \dots, y_n, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ sulle sezioni di S_*^1 coi piani

$x = \text{cost.}$, di identificarsi, rispettivamente, con le funzioni

$$(98) \quad \sum_1^n f'_{i, y_r}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) y_r,$$

nella porzione

$$\bar{S}_*^1 : a \leq x, \xi \leq b; |y_r| \leq e^{\int \gamma(t) dt},$$

$$(r = 1, \dots, n); -\infty < \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda < +\infty,$$

di S_*^1 , di possedere in ogni punto P di S_*^1 derivate parziali rispetto ad y_1, \dots, y_n , queste derivate soddisfacendo alle

$$(99) \quad g_{i, y_j}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \begin{cases} f'_{i, y_j}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda), \\ \text{se } P \in \bar{S}_*^1, \\ 0 \quad \text{se } P \notin \bar{S}_*^1. \end{cases}$$

Osserviamo poi che, a norma dell'ipotesi H_1 , su quasi tutte le sezioni di S_*^1 coi piani $x = \text{cost.}$ le funzioni g_i , ($i = 2, \dots, n$), soddisfanno le

$$(100) \quad |g_i(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - g_i(x, Y_1, \dots, Y_n, \Xi, H_1, \dots, H_n, \Lambda)| \leq \leq P_i^1(x) \left\{ \sum_1^n |y_r - Y_r| + \sum_1^n |\eta_r - H_r| + \right. \\ \left. + \left| \int_{\xi}^{\Xi} \bar{M}(t, \eta_1 - \eta_1^*, \dots, \eta_n - \eta_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right| + |\lambda - \Lambda| \right\},$$

Ove si è posto

$$(101) \quad P_i^1(x) = P_i(x) + \sum_1^n P_{i, r}(x) e^{2 \int \gamma(t) dt}.$$

Ciò premesso, le $\varphi'_{i, \eta_j}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$, considerate come funzioni della sola variabile x , sono soluzioni, assolutamente

continue in I_x , del sistema di equazioni differenziali

$$(102) \quad \frac{dy_i}{dx} = g_i(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \quad (i = 1, \dots, n),$$

dipendente dai parametri $\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda$.

E allora, a norma della generalizzazione del teorema fondamentale indicata nella b) del n. 9, segue immediatamente la conclusione.

Faccio infine rilevare che posto

$$(103) \quad \gamma^1(x) = \sum_1^n P_i^1(x),$$

$$(104) \quad \Gamma^1(x, \xi) = e^{\left| \int_{\xi}^x \gamma^1(t) dt \right|},$$

i risultati stabiliti in questo numero implicano le disuguaglianze

$$(105) \quad \sum_1^n |\varphi_{i, \eta_j, \xi}''(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)| \leq \gamma(\xi) \Gamma^1(x, \xi) + \\ + (\Gamma^1(x, \xi) - 1) M(\xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*),$$

$$106) \quad \sum_1^n |\varphi_{i, \eta_j, \eta_v}''(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)| \leq \Gamma^1(x, \xi) - 1,$$

$$(107) \quad \sum_1^n |\varphi_{i, \eta_j, \lambda}''(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)| \leq 2(\Gamma^1(x, \xi) - 1).$$

È allora chiaro come si possa formulare un teorema analogo a quello ora stabilito per le derivate di ordine superiore delle funzioni φ_i rispetto alle $\eta_1, \dots, \eta_n, \xi, \lambda$.