

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

## **Dipendenza delle condizioni di mutua distributività nei bisistemi di ordine 3**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 28 (1958), p. 50-67

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1958\\_\\_28\\_\\_50\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__50_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# DIPENDENZA DELLE CONDIZIONI DI MUTUA DISTRIBUTIVITÀ NEI BISISTEMI DI ORDINE 3

*Nota (\*) di DOMENICO BOCCIONI (a Padova)*

In base a quanto dimostrato in un precedente lavoro ([2]<sup>1)</sup>), affinché le  $4\nu^3$  condizioni di mutua distributività per i bisistemi di un dato ordine  $\nu$  siano indipendenti (si veda l'introduzione di [2]), è sufficiente che sia  $\nu \geq 4$ .

Nella presente nota viene dimostrato che *questa condizione è anche necessaria*. Precisamente, essendo già noto ([1], teor. 1) che le  $4\nu^3$  condizioni di mutua distributività non sono indipendenti se  $\nu = 2$ , viene dimostrato che esse non lo sono neppure se  $\nu = 3$ .

1. - Conserviamo tutte le definizioni e le notazioni adottate in [1] e in [2]. Dimostreremo, nella presente nota, il seguente

**TEOREMA:** *Non esiste alcun bisistema (2, 3, 4)-distributivo ([2], n.º 2) di sostegno  $\{a, b, c\}$  nel quale la terna  $(a, a, b)$  sia (1)-isolata ([2], n.º 2).*

Da questo teorema, dal teor. 1 di [1] (n.º 1) e dal teor. 1 di [2] (n.º 1) risulterà immediatamente il seguente

**COROLLARIO:** *Se  $B$  è un insieme avente numero cardinale  $\nu$ , le  $4\nu^3$  condizioni di mutua distributività di  $B$  sono indipendenti ([2], n.º 1) se e soltanto se  $\nu \geq 4$ .*

Denoteremo con

$$B^0(s_{11}, \dots, p_{33})$$

---

(\*) Pervenuta in Redazione l'8 novembre 1957.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

<sup>1)</sup> I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

il bisistema  $B^0$  di sostegno  $B = \{a, b, c\}$  definito dalle due seguenti tabelle (risp. di addizione e di moltiplicazione):

|          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|
| $\alpha$ | $a$      | $b$      | $c$      |
| $a$      | $s_{11}$ | $s_{12}$ | $s_{13}$ |
| $b$      | $s_{21}$ | $s_{22}$ | $s_{23}$ |
| $c$      | $s_{31}$ | $s_{32}$ | $s_{33}$ |

|       |          |          |          |
|-------|----------|----------|----------|
| $\mu$ | $a$      | $b$      | $c$      |
| $a$   | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $p_{13}$ |
| $b$   | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $p_{23}$ |
| $c$   | $p_{31}$ | $p_{32}$ | $p_{33}$ |

$(s_{ij}, p_{ij} = a, b, c; i, j = 1, 2, 3)$ .

Nei nove numeri successivi, nei quali considereremo risp. i seguenti nove casi possibili:

(1)  $(s_{11}, p_{11}) = (a, a), (a, b), (a, c), (b, a),$   
 $(b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c),$

supporremo costantemente che  $B^0(s_{11}, \dots, p_{33})$  sia  $(2, 3, 4)$ -distributivo e che in esso la terna  $(a, a, b)$  sia  $(1)$ -isolata. Dimosteremo in ciascun caso (distinguendo eventualmente alcuni sottocasi) l'assurdità di questa ipotesi, pervenendo così alla dimostrazione del teorema enunciato.

2. - Consideriamo il 1° dei casi (1):

1)  $s_{11} = a, p_{11} = a.$

Distinguiamo i tre sottocasi  $p_{12} = a, p_{12} = b, p_{12} = c.$

1<sub>1</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = a.$$

Allora non può essere  $p_{13} = a$ , altrimenti sarebbe  $(a, a, b)$   $(1)$ -distributiva ([1], n.° 4, lemma 5), contro l'ipotesi; dunque  $p_{13} = b, c$  (s'intenda, e così pure nel seguito:  $p_{13} = b$ , oppure  $= c$ ). Occupiamoci separatamente di questi due casi.

1<sub>1,1</sub>) Sia inoltre

$$p_{13} = b.$$

Allora  $a(a + b) = as_{12} = aa, ab, ac$ , cioè  $a(a + b) = a, a, b$ , mentre  $(aa) + (ab) = a + a = a$ , donde (poiché  $(a, a, b)$  non è  $(1)$ -distributiva)

$$s_{12} = c.$$

Ne segue  $a + (ab) = a + a = a$ ,  $(a + a)(a + b) = ac = b$ , il che è assurdo (poiché, per ipotesi,  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$ ).

1<sub>1, 2</sub>) Sia inoltre

$$p_{13} = c.$$

Allora, da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  risulta ancora  $s_{12} = c$ , donde ancora l'assurdo in virtù dell'ipotesi  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$ .

1<sub>2</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = b.$$

Allora, da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue

$$s_{12} = c, \quad p_{13} \neq c.$$

Ne risulta (poiché  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$ )  $p_{13} = c$ , cioè l'assurdo.

1<sub>3</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = c.$$

Distinguiamo allora i tre casi  $p_{13} = a, b, c$ .

1<sub>3, 1</sub>) Sia inoltre

$$p_{13} = a.$$

Allora da  $a + (ac) = (a + a)(a + c)$  segue  $s_{13} = a, c$ . Ora, se  $s_{13} = a$  (risp.  $= c$ ), da  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$  segue  $s_{12} \neq b$  (risp.  $= b$ ), e quindi l'assurdo poiché dev'essere  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$ .

1<sub>3, 2</sub>) Sia inoltre

$$p_{13} = b.$$

Allora se  $s_{13} = a$  (risp.  $= b$ , risp.  $= c$ ), da  $a + (ac) = (a + a)(a + c)$  segue  $s_{12} = a$  (risp.  $= c$ , risp.  $= b$ ), e quindi l'assurdo poiché dev'essere  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$ .

1<sub>3, 3</sub>) Sia inoltre

$$p_{13} = c.$$

Allora da  $a + (ac) = (a + a)(a + c)$  segue  $s_{13} = a, c$ . Ora, se  $s_{13} = a$  (risp.  $= c$ ) da  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$  segue  $s_{12} = a$  (risp.  $\neq a$ ), e quindi l'assurdo poiché dev'essere  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$ .

3. - Consideriamo il 2° dei casi (1):

$$2) \quad s_{11} = a, \quad p_{11} = b.$$

Allora da  $a + (aa) = (a + a)(a + a)$ ,  $(aa) + a = (a + a)(a + a)$ ,  
 $a(a + a) = (aa) + (aa)$  segue risp.

$$s_{12} = b, \quad s_{21} = b, \quad s_{22} = b.$$

Quindi da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$ ,  $a(b + a) = (ab) + (aa)$  ri-  
 sulta risp.  $p_{12} \neq b$ ,  $p_{12} \neq a$ , da cui

$$p_{12} = c,$$

donde, poiché  $a(b + a) = (ab) + (aa)$ ,

$$s_{32} = c.$$

Poiché da  $b + (aa) = (b + a)(b + a)$  segue

$$p_{22} = b,$$

da  $b + (ab) = (b + a)(b + b)$  risulta allora

$$s_{23} = b.$$

Inoltre da  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$  si trae

$$s_{13} = c,$$

e quindi da  $(a + c)a = (aa) + (ca)$  risulta

$$p_{31} = b.$$

Poiché da  $(ab) + a = (a + a)(b + a)$ ,  $(a + a)b = (ab) + (ab)$   
 segue risp.

$$s_{31} = c, \quad s_{33} = c,$$

da  $(a + c)b = (ab) + (cb)$  risulta poi

$$p_{32} = c.$$

Ma allora  $c(a + b) = cb = c$ ,  $(ca) + (cb) = b + c = b$ . il che  
 è assurdo.

4. - Consideriamo il 3° dei casi (1):

$$3) \quad s_{11} = a, \quad p_{11} = c.$$

In tal caso, da  $a + (aa) = (a + a)(a + a)$ ,  $(aa) + a = (a + a)(a + a)$ ,  $a(a + a) = (aa) + (aa)$  segue risp.

$$s_{13} = c, \quad s_{31} = c, \quad s_{33} = c,$$

e quindi da  $(aa) + c = (a + c)(a + c)$  risulta

$$p_{33} = c.$$

Inoltre, da  $a(a + c) = (aa) + (ac)$  segue  $p_{13} \neq a$ , cioè  $p_{13} = b, c$ ; e dev'essere pure  $p_{13} \neq b$ , poiché, se fosse  $p_{13} = b$ , da  $a(c + a) = (ac) + (aa)$ ,  $(ac) + c = (a + c)(c + c)$  seguirebbe risp.  $s_{23} = b$ ,  $s_{23} = c$ ; quindi

$$p_{13} = c.$$

Distinguiamo i tre casi  $s_{12} = a, b, c$ .

3<sub>1</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = a.$$

Allora da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue  $p_{12} = b$ , donde  $a + (ab) = a + b = a$ ,  $(a + a)(a + b) = aa = c$ , il che è assurdo.

3<sub>2</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = b.$$

Allora da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue  $p_{12} \neq c$ , cioè  $p_{12} = a, b$ . Occupiamoci separatamente di questi due casi.

3<sub>2,1</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = a.$$

Allora da  $(ab) + a = (a + a)(b + a)$  segue  $s_{21} = b$ , donde  $a(b + a) = ab = a$ ,  $(ab) + (aa) = a + c = c$ , il che è assurdo.

3<sub>2,2</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = b.$$

Allora da  $(ab) + a = (a + a)(b + a)$  segue  $s_{21} \neq a$ , cioè  $s_{21} = b, c$ . Distinguiamo questi due casi.

3<sub>2, 2, 1</sub>) Sia inoltre

$$s_{21} = b.$$

In tal caso, da  $a(b + a) = (ab) + (aa)$  segue

$$s_{23} = b,$$

e quindi da  $b + (ac) = (b + a)(b + c)$  risulta

$$p_{22} = b.$$

Ma allora da  $(aa) + b = (a + b)(a + b)$ ,  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue risp.  $s_{32} = b$ ,  $s_{32} \neq b$ , il che è assurdo.

3<sub>2, 2, 2</sub>) Sia inoltre

$$s_{21} = c.$$

Allora da  $a(b + a) = (ab) + (aa)$  segue

$$s_{23} = c.$$

Inoltre, poiché da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  si trae  $s_{32} \neq b$ , da  $a(c + b) = (ac) + (ab)$  risulta

$$s_{32} = c.$$

Da  $(c + a)a = (ca) + (aa)$ ,  $c(a + b) = (ca) + (cb)$  segue poi

$$p_{31} = c, \quad p_{32} = c,$$

e quindi da  $b + (ab) = (b + a)(b + b)$  risulta

$$s_{22} = c.$$

Ma allora  $(a + a)b = ab = b$ ,  $(ab) + (ab) = b + b = c$ , il che è assurdo.

3<sub>3</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = c.$$

Allora da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue

$$p_{12} = b$$

e  $s_{32} \neq c$ , cioè  $s_{32} = a, b$ , donde, poiché  $a(c + b) = (ac) + (ab)$ ,

$$s_{32} = b.$$

Ne segue  $(aa) + b = c + b = b$ ,  $(a + b)(a + b) = cc = c$ , il che è assurdo.

**5.** - Consideriamo il 4° dei casi (1):

$$4) \quad s_{11} = b, \quad p_{11} = a.$$

In tal caso, da  $a(a + a) = (aa) + (aa)$ ,  $(a + a)a = (aa) + (aa)$ ,  $a + (aa) = (a + a)(a + a)$  segue risp.

$$p_{12} = b, \quad p_{21} = b, \quad p_{22} = b,$$

e quindi da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  risulta

$$s_{12} = c, \quad p_{13} \neq c.$$

Allora da  $(aa) + b = (a + b)(a + b)$ ,  $a + (ba) = (a + b)(a + a)$  segue risp.

$$p_{33} = c, \quad p_{32} = c.$$

Inoltre da  $(a + a)b = (ab) + (ab)$ ,  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$  si trae risp.

$$s_{22} = b, \quad p_{23} = c,$$

e quindi da  $(b + b)c = (bc) + (bc)$  si ottiene

$$s_{33} = c.$$

Da  $a(c + c) = (ac) + (ac)$ ,  $c(a + a) = (ca) + (ca)$  segue perciò risp.

$$p_{13} = b, \quad p_{31} = c.$$

Ma allora  $(ac) + b = b + b = b$ ,  $(a + b)(c + b) = cs_{32} = c$ , il che è assurdo.

**6.** - Consideriamo il 5° dei casi (1):

$$5) \quad s_{11} = b, \quad p_{11} = b.$$

In tal caso, da  $a(a + a) = (aa) + (aa)$ ,  $(a + a)a = (aa) + (aa)$  segue

$$s_{22} = p_{12} = p_{21},$$



mentre da  $a + (aa) = (a + a)(a + a)$ ,  $(aa) + a = (a + a)(a + a)$  risulta

$$s_{12} = s_{21} = p_{22}.$$

Distinguiamo ora i tre sottocasi  $p_{12} = a, b, c$ .

5<sub>1</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = a.$$

Allora da  $(a + a)b = (ab) + (ab)$  segue

$$p_{22} = b,$$

e quindi risulta  $(aa) + b = b + b = a$ ,  $(a + b)(a + b) = bb = b$ , il che è assurdo.

5<sub>2</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = b.$$

Allora  $(a + a)b = (ab) + (ab)$  implica

$$p_{22} = b,$$

e quindi risulta  $a(a + b) = (aa) + (ab)$ , il che è assurdo.

5<sub>3</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = c.$$

Allora da  $(aa) + b = (a + b)(a + b)$  si trae (ricordando che  $p_{22} = s_{12}$ )

$$s_{12} = c, \quad p_{33} = c.$$

Quindi, poiché da  $(a + a)b = (ab) + (ab)$ ,  $a(b + b) = (ab) + (ab)$  si ottiene

$$p_{22} = p_{13},$$

da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  risulta

$$s_{23} \neq c.$$

Ora, da  $b + (ab) = (b + a)(b + b)$  segue invece  $s_{23} = c$ , e quindi l'assurdo.

7. - Consideriamo il 6° dei casi (1):

$$6) \quad s_{11} = b, \quad p_{11} = c.$$

In tal caso, da  $a + (aa) = (a + a)(a + a)$ ,  $(aa) + a = (a + a)(a + a)$  segue

$$s_{13} = s_{31} = p_{22},$$

mentre da  $a(a + a) = (aa) + (aa)$ ,  $(a + a)a = (aa) + (aa)$  risulta

$$s_{33} = p_{12} = p_{21}.$$

Distinguiamo i tre sottocasi  $p_{12} = a, b, c$ .

6<sub>1</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = a.$$

Allora da  $(a + a)b = (ab) + (ab)$  segue  $p_{22} = b$ , donde  $c + (aa) = c + c = a$ ,  $(c + a)(c + a) = bb = b$ , il che è assurdo.

6<sub>2</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = b.$$

Allora da  $(a + a)b = (ab) + (ab)$  segue

$$s_{22} = p_{22},$$

mentre da  $(aa) + c = (a + c)(a + c)$ ,  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$  si trae risp.

$$s_{13} \neq a, \quad s_{12} \neq a.$$

Distinguiamo i due casi  $s_{13} = b, c$ .

6<sub>2,1</sub>) Sia inoltre

$$s_{13} = b.$$

Distinguiamo i due sottocasi  $s_{12} = b, c$ .

6<sub>2,1,1</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = b.$$

Allora da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue

$$s_{32} \neq b,$$

mentre da  $(a + b)a = (aa) + (ba)$  risulta  $s_{32} = b$ , cioè l'assurdo.

6<sub>2, 1, 2</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = c.$$

Allora da  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$  segue

$$p_{23} = c,$$

donde  $(a + a)c = bc = c$ ,  $(ac) + (ac) = p_{13} + p_{13} = b$ , il che è assurdo.

6<sub>2, 2</sub>) Sia inoltre

$$s_{13} = c.$$

Allora da  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$  risulta

$$s_{12} = c,$$

e quindi da  $a + (bb) = (a + b)(a + b)$  si trae

$$p_{33} = c.$$

Ne segue  $c + (aa) = c + c = b$ ,  $(c + a)(c + a) = cc = c$ , il che è assurdo.

6<sub>3</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = c.$$

Allora  $(a + a)b = (ab) + (ab)$  implica

$$p_{22} = c,$$

mentre da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue

$$s_{12} = c, \quad p_{13} \neq c.$$

Quindi da  $a(a + c) = (aa) + (ac)$  si trae

$$p_{13} = b, \quad s_{32} = b.$$

Inoltre, poiché da  $c + (aa) = (c + a)(c + a)$  si ottiene

$$p_{33} = c,$$

risulta  $(aa) + b = c + b = b$ ,  $(a + b)(a + b) = cc = c$ , il che è assurdo.

8. - Consideriamo il 7° dei casi (1):

$$7) \quad s_{11} = c, \quad p_{11} = a.$$

In tal caso, da  $a(a + a) = (aa) + (aa)$ ,  $(a + a)a = (aa) + (aa)$ ,  
 $a + (aa) = (a + a)(a + a)$  segue risp.

$$p_{13} = c, \quad p_{31} = c, \quad p_{33} = c,$$

e quindi da  $(a + a)c = (ac) + (ac)$ ,  $a + (ac) = (a + a)(a + c)$   
risulta risp.

$$s_{33} = c, \quad s_{13} \neq a.$$

Distinguiamo i tre sottocasi  $p_{12} = a, b, c$ .

7<sub>1</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = a.$$

Allora da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue  $s_{12} \neq c$ , cioè  $s_{12} = a, b$ .  
Occupiamoci separatamente di questi due casi.

7<sub>1,1</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = a.$$

Allora da  $(ab) + b = (a + b)(b + b)$  segue

$$s_{22} \neq c,$$

donde  $a(b + b) = as_{22} = a$ ,  $(ab) + (ab) = a + a = c$ , il che è  
assurdo.

7<sub>1,2</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = b.$$

Allora da  $a(b + b) = (ab) + (ab)$  risulta

$$s_{22} = c,$$

e quindi da  $(ab) + b = (a + b)(b + b)$  si trae

$$p_{23} = b.$$

Risulta dunque  $b(b + b) = bc = b$ ,  $(bb) + (bb) = c$ , il che è assurdo.

7<sub>2</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = b.$$

Allora, qualunque sia  $s_{12}$ , risulta  $a(a + b) = (aa) + (ab)$ , il che è assurdo.

7<sub>3</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = c.$$

Allora da  $(a + a)b = (ab) + (ab)$  si ottiene

$$p_{32} = c,$$

e perciò da  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$  risulta

$$s_{13} = c.$$

Da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue quindi

$$s_{12} = a,$$

e da  $(a + b)a = (aa) + (ba)$  si trae

$$p_{21} = b,$$

donde  $a + (ba) = a + b = a$ ,  $(a + b)(a + a) = ac = c$ , il che è assurdo.

9. - Consideriamo l'8° dei casi (1):

8)  $s_{11} = c$ ,  $p_{11} = b$ .

In tal caso, da  $a(a + a) = (aa) + (aa)$ ,  $(a + a)a = (aa) + (aa)$  segue

$$s_{22} = p_{13} = p_{31},$$

mentre da  $a + (aa) = (a + a)(a + a)$ ,  $(aa) + a = (a + a)(a + a)$  si ottiene

$$s_{12} = s_{21} = p_{33}.$$

Distinguiamo i tre sottocasi  $s_{12} = a$ ,  $b$ ,  $c$ .

8<sub>1</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = a.$$

Allora da  $(aa) + b = (a + b)(a + b)$  segue

$$s_{22} = b,$$

e quindi risulta  $c(a + a) = cc = a$ ,  $(ca) + (ca) = b + b = b$ , il che è assurdo.

8<sub>2</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = b.$$

Allora da  $(aa) + b = (a + b)(a + b)$ ,  $(a + a)c = (ac) + (ac)$  segue risp.

$$s_{22} = p_{22}, \quad p_{13} \neq a.$$

Distinguiamo i tre casi  $p_{12} = a, b, c$ .

8<sub>2,1</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = a.$$

In tal caso, da  $a(b + b) = (ab) + (ab)$  segue

$$s_{22} = c.$$

Quindi, poiché  $c + (aa) = (c + a)(c + a)$  implica  $s_{32} \neq a$ , da  $a(c + b) = (ac) + (ab)$  si trae  $s_{31} \neq b$ . Le stesse due eguaglianze  $c + (aa) = (c + a)(c + a)$ ,  $a(c + b) = (ac) + (ab)$  implicano allora risp.

$$s_{32} = b, \quad s_{31} = a.$$

Ne risulta  $(ca) + a = c + a = a$ ,  $(c + a)(a + a) = ac = c$ , il che è assurdo.

8<sub>2,2</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = b.$$

Allora da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue  $s_{22} \neq b$ , e quindi (poiché  $s_{22} = p_{13} \neq a$ )

$$s_{22} = c,$$

mentre da  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$  risulta

$$p_{32} = b.$$

Ne segue  $(a + a)b = cb = b$ ,  $(ab) + (ab) = b + b = c$ , il che è assurdo.

8<sub>2,3</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = c.$$

Allora da  $a(b + a) = (ab) + (aa)$  segue

$$s_{32} = c,$$

e quindi da  $c + (aa) = (c + a)(c + a)$  risulta

$$s_{31} = b, \quad p_{22} = c.$$

Perciò da  $a + (bb) = (a + b)(a + b)$  si trae

$$s_{13} = c,$$

donde (ricordato che  $p_{13} = s_{22} = p_{22}$ )  $a + (ac) = a + c = c$ ,  
 $(a + a)(a + c) = cc = b$ , il che è assurdo.

8<sub>3</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = c.$$

Allora da  $(aa) + b = (a + b)(a + b)$  si trae

$$s_{22} = c,$$

e perciò da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  risulta

$$p_{12} = c, \quad s_{23} \neq c.$$

Da  $p_{12} = c$  segue che  $b + (ab) = (b + a)(b + b)$  implica invece  
 $s_{23} = c$ , donde l'assurdo.

**10.** - Consideriamo l'ultimo dei casi (1):

$$9) \quad s_{11} = c, \quad p_{11} = c.$$

In tal caso, da  $a(a + a) = (aa) + (aa)$ ,  $(a + a)a = (aa) +$   
 $+ (aa)$  segue

$$s_{33} = p_{13} = p_{31},$$

mentre da  $a + (aa) = (a + a)(a + a)$ ,  $(aa) + a = (a + a)(a + a)$   
 si trae

$$s_{13} = s_{31} = p_{33}.$$

Distinguiamo i tre sottocasi  $s_{13} = a, b, c$ .

9<sub>1</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = a.$$

Allora da  $a(a+c) = (aa) + (ac)$  segue  $p_{13} \neq a$ , mentre da  $a + (ac) = (a+a)(a+c)$  si trae  $p_{13} \neq c$ , dunque

$$p_{13} = b.$$

Ma da  $(aa) + c = (a+c)(a+c)$  risulta  $s_{33} = c$ , donde l'assurdo ( $p_{13} = s_{33}$ ).

9<sub>2</sub>) Sia inoltre

$$s_{13} = b.$$

Allora da  $(aa) + c = (a+c)(a+c)$ ,  $a + (cc) = (a+c)(a+c)$ ,  $(cc) + a = (c+a)(c+a)$  si trae

$$s_{12} = s_{21} = s_{33} = p_{22}.$$

Distinguiamo i tre casi  $s_{12} = a, b, c$ .

9<sub>2,1</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = a.$$

Allora da  $a + (ab) = (a+a)(a+b)$  segue  $p_{12} = b$ , e quindi da  $a(a+b) \neq (aa) + (ab)$  risulta

$$s_{32} \neq c,$$

mentre  $(aa) + b = (a+b)(a+b)$  implica invece  $s_{32} = c$ , donde l'assurdo.

9<sub>2,2</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = b.$$

Allora da  $b + (bb) = (b+b)(b+b)$  segue

$$s_{22} = b,$$

e quindi da  $c(c+c) = (cc) + (cc)$  risulta

$$p_{32} = b.$$

D'altra parte  $(aa) + b = (a+b)(a+b)$  implica

$$s_{32} = b,$$



e perciò da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  si trae  $p_{12} \neq b$ , mentre da  $(a + a)b = (ab) + (ab)$  risulta  $p_{12} \neq a$ ; dunque

$$p_{12} = c.$$

Ne segue  $a(b + a) = ab = c$ ,  $(ab) + (aa) = c + c = b$ , il che è assurdo.

9<sub>2,3</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = c.$$

Allora da  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$  segue

$$p_{12} = c,$$

quindi risulta  $a(a + b) = (aa) + (ab)$ , il che è assurdo.

9<sub>3</sub>) Sia inoltre

$$s_{13} = c.$$

Allora da  $c + (aa) = (c + a)(c + a)$  segue

$$s_{33} = c.$$

Distinguiamo i tre casi  $s_{12} = a, b, c$ .

9<sub>3,1</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = a.$$

Allora da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue

$$p_{12} = b, \quad s_{32} \neq c,$$

mentre da  $(aa) + b = (a + b)(a + b)$  risulta  $s_{32} = c$ , donde l'assurdo.

9<sub>3,2</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = b.$$

Allora da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  si trae

$$p_{12} \neq c.$$

Distinguiamo i due casi  $p_{12} = a, b$ .

9<sub>3,2,1</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = a.$$

Allora da  $a(b + b) = (ab) + (ab)$ ,  $(a + b)b = (ab) + (bb)$  segue risp.

$$s_{22} \neq b, \quad p_{22} \neq a,$$

mentre da  $(bb) + b = (b + b)(b + b)$ ,  $(b + b)b = (bb) + (bb)$  risp. si trae

$$(s_{22}, p_{22}) \neq (a, b), \quad (s_{22}, p_{22}) \neq (a, c).$$

Ne risulta  $s_{22} \neq a$ , quindi

$$s_{22} = c.$$

Da  $(ab) + b = (a + b)(b + b)$  segue allora

$$p_{23} = b,$$

quindi da  $(a + b)c = (ac) + (bc)$  si ottiene  $s_{32} = b$ , donde, poiché  $(aa) + b = (a + b)(a + b)$ , risulta

$$p_{22} = b.$$

Si ha perciò  $b(b + b) = bc = b$ ,  $(bb) + (bb) = b + b = c$ , il che è assurdo.

9<sub>s, 2, 2</sub>) Sia inoltre

$$p_{12} = b.$$

In tal caso, da  $a + (ab) = (a + a)(a + b)$  segue  $p_{32} = b$ , quindi, poiché  $(a + a)b = (ab) + (ab)$ , risulta

$$s_{22} = b.$$

Da  $(ab) + b = (a + b)(b + b)$  si ha allora  $p_{22} = b$ , donde, poiché  $(aa) + b = (a + b)(a + b)$ , si trae

$$s_{32} = b.$$

Ma da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue invece  $s_{32} \neq b$ , quindi l'assurdo.

9<sub>s, 3</sub>) Sia inoltre

$$s_{12} = c.$$

Allora da  $a(a + b) \neq (aa) + (ab)$  segue

$$p_{12} = b, \quad s_{32} \neq c,$$

mentre da  $(aa) + b = (a + b)(a + b)$  risulta  $s_{32} = c$ , quindi l'assurdo.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] BOCCIONI, D.: *Indipendenza delle condizioni di distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 1-30.
- [2] BOCCIONI, D.: *Indipendenza delle condizioni di mutua distributività*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 28 (1958), pp. 40-49.