GIOVANNI PRODI

Tracce di funzioni con derivate di ordine *l* a quadrato integrabile su varietà di dimensione arbitraria

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 402-432
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__402_0>

TRACCE DI FUNZIONI CON DERIVATE DI ORDINE l A QUADRATO INTEGRABILE SU VARIETÀ DI DIMENSIONE ARBITRARIA

Memoria (*) *di* GIOVANNI PRODI (*a Trieste*)

In un lavoro del 1956 [8] ho dato una caratterizzazione per le tracce che funzioni ad integrale di Dirichlet finito, in uno spazio ad n dimensioni, hanno su varietà sufficientemente regolari ad $n-1$ dimensioni. La caratterizzazione era basata sulla nozione di derivata di ordine qualunque secondo Riemann-Liouville.

Nel presente lavoro mi propongo di estendere i risultati ottenuti in due direzioni: a) riguardo all'ordine di derivazione: considererò infatti, anzichè solo funzioni aventi integrale di Dirichlet finito, funzioni aventi derivate fino ad un certo ordine l a quadrato integrabile - b) riguardo la dimensione della varietà V su cui considero la traccia, dimensione che potrà essere a priori qualunque.

Del problema indicato in a) è stata già data una soluzione da Babich e Slobodetskij [3]. Le funzioni traccia sono caratterizzate da questi Autori mediante certe limitazioni integrali nei rapporti incrementali. Nel presente lavoro io continuo invece a servirmi di funzioni aventi derivate di ordine arbitrario a quadrato integrabile: mi pare opportuno anzi osservare come la nozione di derivata di ordine arbitrario mi abbia consentito di collegare in modo molto semplice l'ordine di derivazione della funzione traccia con la dimensione della varietà V. Il risultato trovato si può esprimere — grosso modo — in questa forma « se n è la dimensione dello spazio

(*) Pervenuta in Redazione il 5 aprile 1958.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Trieste.

ambiente, m è la dimensione della varietà V, le tracce di funzioni aventi derivate fino all'ordine l a quadrato integrabile sono funzioni aventi su V derivate di ordine $l - \frac{1}{2}(n - m)$ a quadrato integrabile ». L'ordine di derivazione della traccia può così risultare anche *intero*, cosa che non era facilmente prevedibile a priori.

Risultati interessanti, nella direzione a), sono stati ottenuti da Lions [6]. Recentemente Gagliardo [5] ha ottenuto risultati di notevole interesse caratterizzando le tracce di funzioni che hanno derivate a p-esima potenza integrabile [1]).

Nel presente lavoro, a differenza di quanto fatto in [8], ottengo il prolungamento di una funzione definita sulla varietà V con un metodo diretto, senza passare attraverso la soluzione di un problema al contorno; la trattazione qui svolta risulta pertanto indipendente da quella del lavoro [8].

Nei paragrafi 1, 2 e 3 considero funzioni di n variabili, periodiche, e ne prendo la traccia su varietà piane. Nel paragrafo 4 estendo i risultati ottenuti al caso di varietà qualunque purchè sufficientemente regolari.

Aggiungerò infine che quando, nel presente lavoro, si parlerà di derivate di una funzione, esse verranno intese sempre in senso generalizzato (secondo la teoria di Sobolev oppure di Schwartz).

1. - Assegnato un insieme aperto Ω in uno spazio euclideo ad n dimensioni E_n, per ogni intero $l \geq 0$, indicheremo con $\mathcal{H}^l(\Omega)$ lo spazio delle funzioni a quadrato integrabile in Ω con le loro derivate fino all'ordine l-esimo. Per ogni funzione $u \in \mathcal{H}^l(\Omega)$ la norma sarà così definita

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}^l(\Omega)} = \sum_{0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \leq l} \int_\Omega \left| \frac{\partial^l u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right|^2 dx \tag{1}$$

---

1) Il primo lavoro in cui si sia pervenuti ad una caratterizzazione delle tracce, per le funzioni ad integrale di Dirichlet finito, è di Aronszajn [1]. Al momento della pubblicazione del lavoro [8] non ero a conoscenza nè del lavoro [1] nè del lavoro [3], pressochè contemporaneo al mio.

(indicando con x l' n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e con dx l'ordinaria misura). $\mathcal{H}^l(\Omega)$ risulta completo [2]) ed è uno spazio di Hilbert.

Sarà opportuno considerare le funzioni di n variabili periodiche di periodo 1 rispetto a ciascuna delle variabili, di cui ci occuperemo dapprima, come definite su opportune varietà toroidali. A questo scopo, indichiamo con $I_k (1 \leq k \leq n)$ il segmento $-\frac{1}{2} \leq x_k \leq +\frac{1}{2}$ in cui gli estremi vengano identificati e la topologia venga assegnata nel modo consueto. Indicheremo con T_m per $m \leq n$ la varietà $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_m$. Se è $m < n$, potremo identificare T_m con la sottovarietà di T_n per cui è $x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$. Sarà dunque $I_1 = T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n$.

Le funzioni periodiche rispetto a ciascuna delle variabili, di periodo 1, e dotate di derivate fino all'ordine l a quadrato integrabile localmente potranno essere considerate come definite in T_n ed appartenenti ad $\mathcal{H}^l(T_n)$. Prendendo $\Omega = T_n$, la norma potrà ancora essere data dalla (1).

Se $u \in \mathcal{H}^0(T_n)$, vale, in $\mathcal{H}^0(T_n)$, lo sviluppo in serie di Fourier

$$u(x) = \Sigma_\xi\, u_\xi \exp(2\pi i x\xi)$$

dove con ξ indichiamo il vettore di componenti intere ξ_1, $\xi_2, \dots, \xi_n$, con $x\xi$ l'espressione $x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_n\xi_n$ e dove la sommatoria è da estendersi all'insieme di tutti i vettori ξ. La successione $\{u_\xi\}$, dove $u_\xi = \int_{T_n} u(x) \exp(-2\pi i x\xi) dx$ sarà detta *trasformata di Fourier discreta* della u. Dalla ben nota completezza dello spazio $\mathcal{H}^l$ risulta che condizione necessaria e sufficiente perchè $u \in \mathcal{H}^l(T_n)$ è che sia $\sum_{\xi \neq 0} |u_\xi|^2 |\xi|^{2l} < \infty$, dove abbiamo posto $|\xi| = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)^{1/2}$. Si verifica immediatamente che, se prendiamo per $u \in \mathcal{H}^l(T_n)$ una norma $\| u \|'_{\mathcal{H}^l(T_n)}$ così definita

$$\| u \|'^2_{\mathcal{H}^l(T_n)} = |u_0|^2 + \sum_{\xi \neq 0} |u_\xi|^2 |\xi|^{2l} \tag{1'}$$

---

2) Sobolev [8], cap. I.

questa risulta equivalente alla precedente: sarà per noi indifferente assumere l'una piuttosto che l'altra; non sarà necessario, in seguito, indicarle con simboli diversi.

La condizione $\sum\limits_{\xi \neq 0} |u_\xi|^2 |\xi|^{2l} < \infty$ ha senso, evidentemente, anche quando $u \in \mathcal{H}^0(T_n)$ ed l sia un numero reale qualsiasi. In tal caso, per definizione, diremo ancora che $u \in \mathcal{H}^l(T_n)$ ed assumeremo ancora per u la norma data dalla (1'). Lo spazio $\mathcal{H}^l(T_n)$ verrà anche detto « spazio delle funzioni con derivata l-esima a quadrato integrabile in T_n »: queste funzioni coincidono localmente con quelle dotate di derivate di ordine l secondo Riemann-Liouville a quadrato integrabile considerate in [8]. Riportiamo in appendice la dimostrazione di questo fatto.

Sia ora $u \in \mathcal{H}^l(T_n)$ e supponiamo dapprima che u sia dotata di derivate continue di qualsiasi ordine. Indichiamo con γu la restrizione di u alla varietà T_m: evidentemente, si ha $\gamma u \in \mathcal{H}^s(T_m)$, con s qualsiasi. Supponiamo ora che, per un certo valore di s, si abbia una limitazione del tipo

$$\|\gamma u\|_{\mathcal{H}^s(T_m)} \leq K \|u\|_{\mathcal{H}^l(T_n)} \tag{2}$$ [3]

dove K non dipende da u. Allora, essendo l'insieme delle funzioni dotate di derivate continue di qualsiasi ordine denso in $\mathcal{H}^l(T_n)$, l'operazione γ si potrà prolungare per continuità a tutto $\mathcal{H}^l(T_n)$ e soddisferà ancora alla (2).

D'ora in poi, quando diremo che le funzioni $u \in \mathcal{H}^l(T_n)$ « *ammettono su T_m una traccia γu appartenente ad $\mathcal{H}^s(T_m)$* » intenderemo affermare che vale la (2) sotto ipotesi di regolarità per la u, per un conveniente indice s.

Analogamente si può procedere per le derivate di u. Indichiamo con α una n-upla di interi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, con $D^\alpha u$ la derivata parziale $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$: diremo che « *la derivata $D^\alpha u$ ammette traccia su T_n* » se per le funzioni u indefinita-

[3]) Nel corso del presente lavoro, indicheremo sempre col medesimo simbolo K certe costanti imprecisate.

mente differenziabili sussiste una limitazione del tipo

$$\| \gamma D^{\alpha} u \|_{\mathcal{H}^r(T_m)} \leq K \| u \|_{\mathcal{H}^l(T_n)} \tag{3}$$

con un indice r opportuno.

Passiamo ora ad esporre alcune semplici proprietà dell'operazione γ. Indicheremo con γ_{nm}, dove la chiarezza lo richieda, l'operazione traccia: $\gamma_{nm} : \mathcal{H}^l(T_n) \to \mathcal{H}^s(T_m)$ (con s opportuno). Avremo dunque:

a) *Supposto che* $\dfrac{\partial^{\alpha_{m+1}+\dots+\alpha_n} u}{\partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ *ammetta su* T_m *una traccia appartenente ad* $\mathcal{H}^s(T_m)$, *se è* $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \leq s$, *anche* $\dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ *ha traccia su* T_m *appartenente a* $\mathcal{H}^{s-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_m}(T_m)$ *e si ha*

$$\gamma \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}} \gamma \frac{\partial^{\alpha_{m+1}+\dots+\alpha_n} u}{\partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \tag{4}$$

b) *Sia* r *intero, con* $m < r < n$. *Supponiamo che ogni* $u \in \mathcal{H}^l(T_n)$ *ammetta su* T_r *una traccia appartenente ad* $\mathcal{H}^t(T_r)$ *supponiamo ancora che ogni funzione di* $\mathcal{H}^t(T_r)$ *ammetta su* T_m *una traccia appartenente ad* $\mathcal{H}^s(T_m)$. *Allora* u *ammette traccia in* $\mathcal{H}^s(T_m)$ *e si ha*

$$\gamma_{rm} \gamma_{nr} u = \gamma_{nm} u \tag{5}$$

La dimostrazione si effettua osservando dapprima che la (4) e la (5) valgono per le funzioni indefinitamente differenziabili. Si verifica poi immediatamente che sussistono, in entrambi i casi, le limitazioni che assicurano l'esistenza di una traccia negli spazi di cui si tratta.

2. - In quel che segue, dato un numero *reale* α, indicheremo con $[\alpha]^-$ il massimo intero *inferiore* ad α. Sussiste il teorema:

TEOREMA 1. - *Siano* n *ed* m *interi positivi, con* $n > m$, *e sia* l *un numero positivo tale che* $m > n - 2l$. *Allora ogni funzione* $u \in \mathcal{H}^l(T_n)$ *ammette traccia su* T_m *con le sue derivate* *fino all'ordine* $\left[l - \frac{n-m}{2}\right]^-$, *e si ha*

$$\gamma \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \in \mathcal{H}^{l-k-\frac{n-m}{2}}(T_m)$$

$$\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k, \ 0 \leq k \leq \left[l - \frac{n-m}{2}\right]^-\right).$$

Reciprocamente, supponiamo che sulla varietà T_m ***siano assegnate, per ogni intero*** k, ***con*** $0 \leq k \leq \left[l - \frac{n-m}{2}\right]^-$, ***tante funzioni*** $\varphi_{\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n}$ ***quante sono le soluzioni in interi non negativi dell'equazione*** $\alpha_{m+1} + \alpha_{m+2} + \dots + \alpha_n = k$. ***Supponiamo che sia***

$$\varphi_{\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n} \in \mathcal{H}^{l-k-\frac{n-m}{2}}(T_m).$$

Allora esiste almeno una funzione $u \in \mathcal{H}^l(T_n)$ ***tale che si abbia***

$$\gamma \frac{\partial^k u}{\partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \varphi_{\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n}.$$

Si noti che il teorema enunciato considera derivate di ordine l, con l numero reale, non necessariamente intero, purchè sia $l > \frac{n-m}{2}$.

Procuriamoci dapprima una interessante rappresentazione dell'operazione di traccia. Indichiamo ancora con $\{u_\xi\}$ la successione dei coefficienti di Fourier della u. Avremo $u(x) = \sum_\xi u_\xi \exp(2\pi i x\xi)$; supponiamo ora u indefinitamente differenziabile. Teniamo presente che, in questo caso, la serie $\sum_\xi |u_\xi| |\xi|^\alpha$ risulta convergente per qualsiasi valore positivo di α; in particolare, la serie di Fourier che rappresenta $u(x)$ risulta assolutamente convergente. Vediamo allora che forma prende l'operazione di traccia. Avremo, per $x \in T_m$,

$$\gamma u(x) = \sum_\xi u_\xi \exp(2\pi i [x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_m\xi_m]) =$$

$$= \sum_{\xi_1 \xi_2, \dots, \xi_m} \Big(\sum_{\xi_{m+1}, \dots, \xi_n} u_{\xi_1 \xi_2, \dots, \xi_n} \Big) \exp(2\pi i [x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \dots + x_m\xi_m]).$$

Se indichiamo con Γ l'operazione in cui viene mutata γ dalla trasformazione di Fourier discreta, avremo allora

$$\Gamma : u_{\xi} \to \sum_{\xi_{m+1}, \dots, \xi_n} u_{\xi_1 \xi_2, \dots, \xi_m, \dots, \xi_n}.$$

Analogamente, detta Γ_α l'operazione trasformata di $\gamma \frac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k)$ si avrà

$$\Gamma_\alpha : u_{\xi} \to (2\pi i)^k \sum_{\xi_{m+1}, \dots, \xi_n} \xi_1^{\alpha_1} \xi_2^{\alpha_2} \dots \xi_n^{\alpha_n} u_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n} \quad [4].$$

Dimostreremo ora la prima parte del teorema. Supporremo dapprima che sia $m = n - 1$. Premettiamo un semplice lemma.

LEMMA 1. - *Siano l e h numeri positivi, con $h < 2l - 1$ e sia λ un parametro reale. Si ha allora, per $\lambda \to +\infty$,*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \frac{r^h}{(\lambda^2 + r^2)^l} = \alpha_{lh} \lambda^{h+1-2l} + O(\lambda^{h-2l}), \tag{6}$$

dove è

$$\alpha_{lh} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^h}{(1 + x^2)^l} dx.$$

Basterà infatti scivere:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_r \frac{r^h}{(\lambda^2 + r^2)^l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[x]^h}{(\lambda^2 + [x]^2)^l} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^h}{(\lambda^2 + x^2)^l} dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{[x]^h}{(\lambda^2 + [x]^2)^l} - \frac{x^h}{(\lambda^2 + x^2)^l} \right] dx.$$

Maggiorando, nell'ultimo integrale, la funzione integranda mediante il teorema della media, si ottiene facilmente l'asserto.

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema.

Sia dunque $u \in \mathcal{H}^l(T_n)$ e sia ora k un intero tale che $0 \leq k \leq \left[l - \frac{1}{2} \right]^-$ Per la proprietà a) potremo limitarci a consi-

---

[4]) Dove, ovviamente, deve intendersi $\xi_k^0 = 1$ per tutti i valori di ξ_k.

derare la traccia su T_{n-1} delle derivate normali alla varietà T_{n-1} stessa. Indichiamo con ξ' la $(n-1)$-upla $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, con $|\xi'|$ il numero $(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{n-1}^2)^{1/2}$; indichiamo con Γ_k la trasformata dell'operazione $\gamma \dfrac{\partial^k}{\partial x_n^k}$. Avremo:

$$\Gamma_k : u_\xi \to (2\pi i)^k \sum_{\xi_n} \xi_n^k u_\xi .$$

Poniamo, per $\xi \neq 0$, $v_\xi = |\xi|^l u_\xi$: avremo dunque dalla (1'),

$$\text{(7)} \qquad \| u \|^2_{\mathcal{H}^l(T_n)} = |u_0|^2 + \sum_{\xi \neq 0} |v_\xi|^2 .$$

Pertanto, se $\xi' \neq 0$,

$$(2\pi i)^k \sum \xi_n^k u_\xi = (2\pi i)^k \sum_{\xi_n} \frac{\xi_n^k}{|\xi|^l} v_\xi .$$

Applicando la diseguaglianza di Schwarz, avremo, sempre per $\xi' \neq 0$,

$$|(2\pi i)^k \sum_{\xi_n} \xi_n^k u_\xi|^2 \leq (2\pi)^{2k} \sum_{\xi_n} \frac{\xi_n^{2k}}{(|\xi'|^2 + \xi_n^2)^l} \cdot \sum_{\xi_n} |v_\xi|^2 .$$

Applichiamo il lemma 1 ponendo $h = 2k$ e tenendo presente che è per ipotesi $k < l - \frac{1}{2}$. Essendo

$$\sum_{\xi_n} \frac{\xi_n^{2k}}{(|\xi'|^2 + \xi_n^2)^l} = O\,(|\xi'|^{-2l+2k+1})$$

esisterà una costante K tale che, sempre per $\xi' \neq 0$ [5]), sia

$$\sum_{\xi_n} \frac{\xi_n^{2k}}{(|\xi'|^2 + \xi_n^2)^l} \leq K |\xi'|^{-2l+2k+1} .$$

Sommando ora membro a membro rispetto all'indice ξ', per $\xi' \neq 0$, dopo avere moltiplicato per $|\xi'|^{2l-2k-1}$, e tenendo conto di questa limitazione, si ha

$$\text{(8)} \qquad \sum_{\xi' \neq 0} |\xi'|^{2l-2k-1} \, |(2\pi i)^k \sum_{\xi_n} \xi_n^k u_\xi|^2 \leq K \sum_{\xi' \neq 0} \sum_{\xi_n} |v_\xi|^2 .$$

---

[5]) Occorre tener presente che, essendo ξ' un vettore a componenti intere, è $|\xi'| \geq 1$.

Per $\xi' = 0$ si avrà

$$(2\pi i)^k \sum_{\xi_n} \xi_n^k u_{0,0,\dots,0,\xi_n} = (2\pi i)^k \delta_k u_0 + (2\pi i)^k \sum_{\xi_n \neq 0} \frac{\xi_n^k}{|\xi_n|^l} v_{0,0,\dots,0,\xi_n}$$

avendo posto $\delta_k = 1$ per $k = 0$, $\delta_k = 0$ per $k \neq 0$.

Ancora mediante la diseguaglianza di Schwarz, sempre tenendo presente che è $k < l - \frac{1}{2}$, si ha

$$(9) \qquad |(2\pi i)^k \sum_{\xi_n} \xi_n^k u_{0,0,\dots,0,\xi_n}|^2 \leq K \{ |u_0|^2 + \sum_{\xi_n \neq 0} |v_{0,0,\dots,0,\xi_n}|^2 \}$$

dove è $K = (2\pi)^{2k} \{ \delta_k + \sum_{\xi_n \neq 0} |\xi_n|^{2(k-l)} \}$.

Sommando membro a membro la (8) e la (9), si ha

$$\left\| \gamma \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\|_{\mathcal{H}^{l-k-\frac{1}{2}}(T_{n-1})} \leq K \| u \|_{\mathcal{H}^l(T_n)} .$$

La prima parte del teorema è così dimostrata per il caso $m = n - 1$.

Per passare al caso generale, procediamo per induzione rispetto all'intero $n - m$. Supponiamo l'asserto vero per $n - m - 1$ e dimostriamolo per il caso $n - m$. Supporremo $m > n - 2l$ (altrimenti nulla vi sarebbe da dimostrare). Basterà verificare l'asserto per le sole derivate, normali a T_m, $\frac{\partial^k u}{\partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ $\left(\text{dove } 0 \leq k \leq \left[l - \frac{n-m}{2}\right]^-\right)$. Infatti, allora, la proprietà a) unita con la relazione $\gamma \frac{\partial^k u}{\partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \in \mathcal{H}^{l-k-\frac{n-m}{2}}(T_m)$, permette di estendere immediatamente il risultato alle altre derivate.

Consideriamo dunque la derivata $\frac{\partial^{k-\alpha_{m+1}} u}{\partial x_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$; essa, per ipotesi, ammette traccia sulla varietà T_{m+1}, essendo, evidentemente, $k - \alpha_{m+1} \leq \left[l - \frac{n-m-1}{2}\right]^-$. Sarà inoltre

$$\gamma_{n,m+1} \frac{\partial^{k-\alpha_{m+1}} u}{\partial x_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \in \mathcal{H}^{l-k+\alpha_{m+1}-\frac{n-m-1}{2}}(T_{m+1}).$$

Questa funzione, che è definita in T_{m+1}, ammetterà, a sua volta, traccia su T_m assieme alla sua derivata $\dfrac{\partial^{\alpha_{m+1}}}{\partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}}$, in virtù del risultato acquisito. Infatti è

$$\alpha_{m+1} \leq \left| l - k + \alpha_{m+1} - \frac{n-m-1}{2} - \frac{1}{2} \right|^{-}$$

poichè questa equivale alla diseguaglianza $k \leq \left| l - \dfrac{n-m}{2} \right|^{-}$ che è verificata per ipotesi. Applicando la proprietà b) e ancora la a) si avrà dunque

$$\gamma_{n,m} \frac{\partial^k u}{\partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \gamma_{m+1,m}\, \gamma_{n,m+1} \frac{\partial^k u}{\partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} =$$

$$= \gamma_{m+1,m} \frac{\partial^{\alpha_{m+1}}}{\partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}} \gamma_{n,m+1} \frac{\partial^{k-\alpha_{m+1}} u}{\partial x_{m+2}^{\alpha_{m+2}} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \in$$

$$\in \mathcal{H}^{\left(l-k+\alpha_{m+1}-\frac{n-m-1}{2}\right)-\alpha_{m+1}-\frac{1}{2}} \equiv \mathcal{H}^{l-k-\frac{n-m}{2}}.$$

Con ciò resta dimostrata la prima parte del teorema.

OSSERVAZIONE. Poichè la traccia γu sulla varietà T_m appartiene a $\mathcal{H}^{l-\frac{n-m}{2}}(T_m)$ se ne deduce che *le derivate di u lungo la varietà T_m ammettono traccia fino all'ordine* $\left| l - \dfrac{n-m}{2} \right|$; *non* è la stessa cosa per le altre derivate (che sono derivate parzialmente normali alla varietà T_m) per cui l'esistenza della traccia viene garantita soltanto fino all'ordine $\left| l - \dfrac{n-m}{2} \right|^{-}$, il quale risulta inferiore di una unità a $\left| l - \dfrac{n-m}{2} \right|$, nel caso che $l - \dfrac{n-m}{2}$ sia intero. Che effettivamente questa circostanza possa accadere, si può constatare con il seguente esempio.

ESEMPIO. Porremo $n=3$, $m=1$, $l=2$. Definiremo una funzione $u(x, y, z) \in \mathcal{H}^2(T_3)$ attraverso i suoi coefficienti di Fourier $u_{\xi\eta\zeta}$. Dimostreremo che la sua traccia su T_1 (cioè sul segmento $-\dfrac{1}{2} \leq x_1 \leq \dfrac{1}{2}$, in cui gli estremi siano identificati) ha derivata prima a quadrato integrabile, mentre la derivata parziale $\frac{\partial y}{\partial u}$ non ammette traccia. Poniamo

$$u_{\xi\eta\zeta} = \begin{cases} \dfrac{1}{\xi^3\eta^3 \log(1+\eta)} & \text{per} \quad \xi > 0,\ \eta > 0,\ 0 < \zeta \leq \eta \\ 0 \text{ altrove.} \end{cases}$$

Avremo

$$\sum_{\xi\eta\zeta} |u_{\xi\eta\zeta}|^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 = \sum_{\eta>0} \sum_{\xi>0} \frac{1}{\xi^6\eta^6(\log(1+\eta))^2} \sum_{1}^{\eta}{}_{\zeta} (\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{\eta>0} \sum_{\xi>0} \frac{(2\eta^2+\xi^2)^2}{\xi^6\eta^5(\log(1+\eta))^2} < \infty.$$

Quindi

$$u \in \mathcal{H}^2(T_3).$$

Consideriamo ora la successione di polinomi trigonometrici $u^{(k)}(x, y, z)$ ottenuta così: per ogni intero $k > 0$ si ponga $u^{(k)}_{\xi\eta\zeta} = u_{\xi\eta\zeta}$ se $\xi \leq k$, $\eta \leq k$, $\zeta \leq k$, diversamente $u^{(k)}_{\xi\eta\zeta} = 0$. Evidentemente $u^{(k)}$ converge verso u in $\mathcal{H}^2(T_3)$ per k tendente all'infinito. Ora i coefficienti di Fourier della traccia di $\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y}$ su T_1 sono dati da

$$(2\pi i) \sum_{1}^{k}{}_{\eta} \sum_{1}^{k}{}_{\zeta}\, \eta u_{\xi\eta\zeta} = (2\pi i) \sum_{1}^{k}{}_{\eta} \sum_{1}^{\eta}{}_{\zeta} \frac{\eta}{\xi^3\eta^3 \log(1+\eta)} =$$

$$= (2\pi i) \sum_{1}^{k}{}_{\eta} \frac{1}{\xi^3} \frac{1}{\eta \log(1+\eta)} = \frac{2\pi i}{\xi^3} \sum_{1}^{k}{}_{\eta} \frac{1}{\eta \log(1+\eta)}.$$

Dunque per $k \to \infty$, ciascuno dei coefficienti di Fourier di $\frac{\partial u^{(k)}}{\partial y}$ diverge. Questo prova che $\frac{\partial u}{\partial y}$ non ammette traccia su T_1.

3. - Per dimostrare la seconda parte del teorema cominciamo ancora col considerare il caso $m = n - 1$; avremo per ipotesi $l > \frac{1}{2}$. Supporremo assegnate, su T_{n-1}, $\left|l + \frac{1}{2}\right|^-$ funzioni $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\left|l-\frac{1}{2}\right|^-}$ tali che

$$\varphi_k \in \mathcal{H}^{l-k-\frac{1}{2}}(T_{n-1})$$

e dovremo dimostrare che esiste una funzione $u \in \mathcal{H}^l(T_n)$ tale che $\gamma \dfrac{\partial^k u}{\partial x_n^k} = \varphi_k$.

Indicheremo con $\{\varphi_{k, \xi_1, \xi_2, \xi_{n-1}}\}$ la successione dei coefficienti di Fourier della funzione φ_k. Avremo

$$\|\varphi_k\|^2_{\mathcal{H}^{l-k-\frac{1}{2}}(T_{n-1})} = |\varphi_{k,0}|^2 + \sum_{\xi' \neq 0} |\xi'|^{2l-2k-1} |\varphi_{k,\xi'}|^2.$$

Dovremo dimostrare che ammette soluzione il sistema

$$(10) \qquad (2\pi i)^k \sum_{\xi_n} \xi_n^k u_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{n-1} \xi_n} = \varphi_{k, \xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{n-1}} \quad \left(k = 0, 1, \ldots, \left[l - \frac{1}{2}\right]^-\right)$$

dove la soluzione u è cercata in $\mathcal{H}^l(T_n)$. Indicheremo con φ il vettore $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-})$. Poichè $\varphi_k \in \mathcal{H}^{l-k-\frac{1}{2}}(T_{n-1})$, potremo considerare φ come un elemento di uno spazio $H(T_{n-1})$ così definito[6]:

$$H(T_{n-1}) = \prod_{k=0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} \mathcal{H}^{l-k-\frac{1}{2}}(T_{n-1}).$$

Porremo

$$\|\varphi\|^2_{H(T_{n-1})} = \sum_{k=0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} \|\varphi_k\|^2_{\mathcal{H}^{l-k-\frac{1}{2}}(T_{n-1})}.$$

Il sistema (10) può allora essere indicato brevemente così:

$$(10') \qquad \Gamma u = \varphi.$$

Osserviamo ora che lo spazio duale di $\mathcal{H}^l(T_n)$ si può identificare con lo spazio $\mathcal{H}^{-l}(T_n)$.

Infatti $\mathcal{H}^l(T_n)$ è isomorfo (e isometrico) ad $\mathcal{H}^0(T_n)$ secondo l'applicazione biunivoca $u_\xi \to v_\xi$ così definita:

$$v_0 = u_0 \quad , \quad v_\xi = |\xi|^l u_\xi \qquad (\xi \neq 0).$$

Ora poichè, come è noto, l'espressione del più generale funzionale lineare in $\mathcal{H}^0(T_n)$ è data da $\sum_\xi z_\xi v_\xi$, con $z \in \mathcal{H}^0(T_n)$,

---

[6]) Col simbolo Π indichiamo il prodotto topologico di più spazi.

tenendo presente l'isomorfismo posto tra $\mathcal{H}^l(T_n)$ ed $\mathcal{H}^0(T_n)$ si ottiene che il più generale funzionale in $\mathcal{H}^l(T_n)$ ha l'espressione

$$u_0 z_0 + \sum_{\xi \neq 0} z_\xi \, | \xi |^l \, u_\xi \quad \text{dove} \quad z \in \mathcal{H}^0(T_n).$$

Se poniamo ora

$$t_0 = z_0 \quad , \quad t_\xi = | \xi |^l \, z_\xi$$

da queste relazioni deduciamo che l'espressione del più generale funzionale in $\mathcal{H}^l(T_n)$ è anche data da

$$\sum_\xi t_\xi u_\xi \quad \text{dove} \quad t \in \mathcal{H}^{-l}(T_n).$$

Si riconosce poi immediatamente che la norma del funzionale è data da $\| z \|_{\mathcal{H}^0(T_n)} = \| t \|_{\mathcal{H}^{-l}(T_n)}$.

Analogamente lo spazio duale di $H(T_{n-1})$, $H^*(T_{n-1})$ si può identificare con

$$H^*(T_{n-1}) = \prod_{k=0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} \mathcal{H}^{-l+\frac{1}{2}+k}(T_{n-1})$$

dove, per $\psi \equiv (\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-}) \in H^*(T_{n-1})$, porremo

$$\| \psi \|^2_{H^*(T_{n-1})} = \sum_{k=0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} \| \psi_k \|^2_{\mathcal{H}^{-l+\frac{1}{2}+k}(T_{n-1})}$$

L'equazione aggiunta della (10): $\Gamma^* \psi = s$ si potrà rappresentare esplicitamente col sistema

$$\sum_{k=0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} (2\pi i)^k \xi_n^k \psi_{k, \xi_1 \xi_2 \dots \xi_{n-1}} = s_{\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n} \tag{11}$$

dove è $s \in \mathcal{H}^{-l}(T_n)$.

Per poter affermare che la (10) ammette almeno una soluzione basterà dimostrare, in virtù di un noto risultato di Banach [7]), che

---

[7]) Banach [4], Teorema 1 a pag. 146.

I) Per la (11) sussiste l'unicità della soluzione.

II) La soluzione dipende con continuità da s al variare di s nel codominio di Γ^*.

La I) è subito dimostrata. Prendiamo infatti $s=0$; fissati gli indici $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, diamo all'indice ξ_n $\left[l+\frac{1}{2}\right]^-$ valori distinti, ad arbitrio; otterremo un sistema di $\left[l+\frac{1}{2}\right]^-$ equazioni ed $\left[l+\frac{1}{2}\right]^-$ incognite il cui determinante, che è di Vandermonde, è certamente diverso da zero. Questa stessa considerazione prova anche che, per un singolo coefficiente $\psi_{k,\xi_1\xi_2\dots\xi_{n-1}}$, si ha

$$(12) \qquad |\psi_{k,\xi_1\xi_2\dots\xi_{n-1}}| \leq K \| s \|_{\mathcal{H}^{-l}(T_n)},$$

dove la costante K potrà dipendere da k, $\xi_1 \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, ma non da s.

Per dimostrare la II) moltiplichiamo membro a membro la (11) per la sua complessa coniugata. Avremo

$$\sum_{k,k'=0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} (2\pi)^{k+k'} i^{k-k'} \xi_n^{k+k'} \psi_{k,\xi_1\dots\xi_{n-1}} \overline{\psi_{k',\xi_1\dots\xi_{n-1}}} = | s_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n} |^2.$$

Dopo avere moltiplicato membro a membro per $|\xi|^{-2l}$, sommiamo rispetto all'indice ξ_n variabile da $-\infty$ a $+\infty$, e rispetto a $\xi' \equiv (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$ variabile nell'insieme $|\xi'| > M$, essendo M una costante positiva che preciseremo. Avremo

$$\sum_{|\xi'|>M} \sum_{k,k'=0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} \psi_{k,\xi_1\xi_2\dots\xi_{n-1}} \overline{\psi_{k',\xi_1\xi_2\dots\xi_{n-1}}} \sum_{\xi_n} i^{k-k'}(2\pi)^{k+k'} \frac{\xi_n^{k+k'}}{(\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2)^l} =$$

$$= \sum_{|\xi'|>M} \sum_{\xi_n} |\xi|^{-2l} \, |s_{\xi_1\xi_2\dots\xi_n}|^2 \leq \| s \|^2_{\mathcal{H}^{-l}(T_n)}.$$

Applicando allora il lemma 1 potremo scrivere

$$\sum_{|\xi'|>M} \sum_{k,k'=0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} \psi_{k,\xi_1\dots\xi_{n-1}} \overline{\psi_{k',\xi_1\dots\xi_{n-1}}} \, |\xi'|^{-2l+k+k'+1} \, \cdot$$

$$\cdot \left(i^{k-k'}(2\pi)^{k+k'} \alpha_{l,k+k'} + O\left(\frac{1}{|\xi'|}\right)\right) \leq \| s \|^2_{\mathcal{H}^{-l}(T_n)}$$

e anche

$$\sum_{|\xi'|>M} \sum_{k,k'\,0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} (\psi_{k,\xi_1\ldots\xi_n} |\xi'|^{-l+k+\frac{1}{2}})(\overline{\psi}_{k,\xi_1\ldots\xi_n} |\xi'|^{-l+k'+\frac{1}{2}}) \cdot$$

$$\cdot \left((2\pi)^{k+k'} i^{k-k'} \alpha_{l,k+k'} + O\left(\frac{1}{|\xi'|}\right)\right) \leq \| s \|^2_{\mathcal{H}^{-l}(T_n)} .$$

Ma la forma hermitiana $\sum_{k,k'\,0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} (2\pi)^{k+k'} i^{k-k'} \alpha_{l,k+k'} \lambda_k \overline{\lambda}_{k'}$ risulta definita positiva. Infatti, tenendo presente l'espressione del coefficiente $\alpha_{l\,k+k'}$, si trova che essa si può scrivere

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k,k'\,0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} \frac{(2\pi i x)^k \lambda_k \overline{(2\pi i x)^{k'} \lambda_{k'}}}{(1+x^2)^l}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty+} \frac{\left| \sum_{k\,0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} (2\pi i x)^k \lambda_k \right|^2}{(1+x^2)^l}\, dx .$$

Dal porre questo integrale uguale a zero viene $\sum_{k\,0}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} (2\pi i x)^k \lambda_k = 0$ $(-\infty < x < +\infty)$ e risulta pertanto $\lambda_k = 0$. Segue che, pur di prendere M convenientemente grande, si potrà trovare una costante $h > 0$ tale che

$$h \sum_{|\xi'|>M} \sum_{k}^{\left[l-\frac{1}{2}\right]^-} |\xi'|^{-2l+2k+1} |\psi_{k,\xi'}|^2 \leq \| s \|^2_{\mathcal{H}^{-l}(T_n)} .$$

Da questa limitazione e dalla (12) segue che, per le soluzioni della (11), si ha

$$\| \psi \|_{H^*(T_{n-1})} \leq K \| s \|_{\mathcal{H}^{-l}(T_n)} .$$

La seconda parte del teorema risulta così dimostrata nel caso in cui sia $m = n - 1$.

OSSERVAZIONE. Teniamo presente che $\mathcal{H}^l(T_m)$ è uno spazio di Hilbert; consideriamo dunque la varietà $\mathfrak{M}$ delle soluzioni della $\Gamma_n = 0$ e la varietà $\mathcal{W}$ ad essa ortogonale. Fissato $\varphi \in H(T_{n-1})$ la (10') avrà una ed una sola soluzione $u^* \in \mathcal{W}$. L'operazione: $\varphi \rightarrow u^*$ è lineare e limitata.

Per completare la dimostrazione del teorema supporremo ora assegnate tante funzioni $\varphi_{\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n}$ quante sono le soluzioni in interi non negativi dell'equazione $\alpha_{m+1} + \dots + \alpha_n = k$, con $0 \leq k \leq \left[l - \frac{n-m}{2}\right]^-$, e sia $\varphi_{\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_n} \in \mathcal{H}^{l-k-\frac{n-m}{2}}(T_m)$.

Riuniamo assieme quelle funzioni per cui il gruppo di indici $\alpha_{m+2}, \alpha_{m+3}, \dots, \alpha_n$ è il medesimo; l'indice α_{m+1} varierà assumendo tutti i valori compresi tra 0 e $\left[l - \frac{n-m}{2}\right]^- - (\alpha_{m+2} + \alpha_{m+3} + \dots + \alpha_n)$. Potremo applicare il risultato ora dimostrato prendendo $n = m + 1$ e sostituendo al numero l il numero $\lambda = l - (\alpha_{m+2} + \alpha_{m+3} + \dots + \alpha_n) - \frac{n-m}{2} + \frac{1}{2}$. Potremo affermare l'esistenza di almeno una funzione $\varphi_{\alpha_{m+2}, \alpha_{m+3}, \dots, \alpha_n} \in \mathcal{H}^{\lambda}(T_{m+1})$ tale che

$$(13) \qquad \gamma_{m+1, m} \frac{\partial^{\alpha_{m+1}}}{\partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}} \varphi_{\alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n} = \varphi_{\alpha_{m+1}, \alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n}.$$

Infatti la condizione da imporre diventa qui $\lambda > \frac{1}{2}$. Si ha ora

$$\lambda - \frac{1}{2} = l - (\alpha_{m+2} + \dots + \alpha_n) - \frac{n-m}{2} \geq$$

$$\geq l - \frac{n-m}{2} - \left[l - \frac{n-m}{2}\right]^- > 0$$

relazione, quest'ultima, che è evidentemente soddisfatta. Sono poi assegnate le derivate normali fino all'ordine $\left[\lambda - \frac{1}{2}\right]^-$. Infatti è

$$\left[\lambda - \frac{1}{2}\right]^- = \left[l - \frac{n-m}{2}\right]^- - (\alpha_{m+2} + \alpha_{m+3} + \dots + \alpha_n).$$

Supponiamo di avere seguito lo stesso procedimento per tutti i gruppi di indici α_{m+2}, α_{m+3}, ..., α_n. Alla fine avremo tante funzioni definite su T_{m+1}: $\varphi_{\alpha_{m+2}, \alpha_{m+3}, \dots, \alpha_n}$ quante sono le soluzioni in interi non negativi delle equazioni $\alpha_{m+2} + \alpha_{m+3} + \dots + \alpha_n = k'$ con $0 \leq k' \leq \left| l - \frac{n-m}{2} \right|^-$. Si avrà

$$\varphi_{\alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n} \in \mathcal{H}^{l - k' - \frac{n-(m+1)}{2}} (T_{m+1}).$$

Possiamo ora considerare le funzioni $\varphi_{\alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n}$ ora ottenute come dati di un problema analogo, posto relativamente alla varietà T_{m+1}. Si tratterà di trovare certe funzioni $\varphi_{\alpha_{m+3}, \dots, \alpha_n}$ definite su T_{m+2}, appartenenti ad

$$\mathcal{H}^{l-(\alpha_{m+3}+\dots+\alpha_n)-\frac{n-(m+1)}{2}+\frac{1}{2}}(T_{m+2})$$

e tali che

$$\gamma_{m+1} \frac{\partial^{\alpha_{m+2}}}{\partial x_{m+2}^{\alpha_{m+2}}} \varphi_{\alpha_{m+3}, \dots, \alpha_n} = \varphi_{\alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n}. \tag{13'}$$

Essendo $\varphi_{\alpha_{m+2}, \dots, \alpha_n} \in \mathcal{H}^{l-k'-\frac{n-(m+1)}{2}}(T_{m+1})$, le condizioni del nostro teorema di prolungamento sono nuovamente soddisfatte. Vi è però un'osservazione da fare: ora noi conosciamo le tracce delle derivate rispetto ad x_{m+2} delle funzioni $\varphi_{\alpha_{m+3}, \dots, \alpha_n}$ sulla varietà T_{m+1} fino all'ordine $\left[l - \frac{n-m}{2} \right]^- - (\alpha_{m+3} + \dots + \alpha_n)$ e non fino all'ordine $\left| l - \frac{n-(m+1)}{2} \right|^- - (\alpha_{m+3} + \dots + \alpha_n)$ che può essere maggiore. Ma questo non porta nessuna difficoltà: in questo caso infatti potremo fissare ad arbitrio tutte le derivate rispetto ad x_{m+2} di ordine $\left| l - \frac{n-(m+1)}{2} \right|^- - (\alpha_{m+3} + \dots + \alpha_n)$ purchè appartengano, naturalmente, ad $\mathcal{H}^{-\left[-\frac{n-(m+1)}{2}\right]^- - \frac{n-(m+1)}{2}}(T_{m+1})$. Potremo ad esempio supporre nulle tutte queste derivate.

Ripetendo il procedimento, otterremo alla fine una funzione u che in virtù delle proprietà a) e b) dell'operazione

γ, soddisferà alle condizioni

$$u \in \mathcal{H}^l(T_n) \quad , \quad \gamma \frac{\partial^{\alpha_{m+1}+\dots+\alpha_n} u}{\partial x_1^{\alpha_{m+1}} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \varphi_{\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\dots\alpha_n} .$$

Il teorema risulta così completamente dimostrato.

4. - Estenderemo ora i risultati ottenuti al caso in cui si consideri la traccia di una funzione, definita in un insieme aperto Ω di uno spazio euclideo, su una varietà sufficientemente regolare in esso contenuta.

Dato un *intero* $l \geq 1$, diremo l-regolare una funzione Φ (numerica o vettoriale) definita in un insieme aperto Ω di uno spazio euclideo E_n se:

a) È continua e limitata con le sue derivate fino all'ordine $l-1$;

b) Le derivate $(l-1)$-sime soddisfano ad una condizione di Lipschitz in modo uniforme.

Diremo l-regolare un omeomorfismo $\Phi : x \rightarrow x'$ di un insieme aperto Ω contenuto in E_n su di un insieme dello stesso tipo Ω' se i vettori $\Phi(x)$ e $\Phi^{-1}(x')$ sono l-regolari. Un omeomorfismo l-regolare fa corrispondere fra loro gli insiemi misurabili in modo che il rapporto delle misure si mantenga compreso fra due valori positivi.

Si dimostra ora facilmente il seguente lemma:

LEMMA 2. - *La composizione di due omeomorfismi l-regolari è l-regolare.*

Siano Φ e Ψ i due omeomorfismi (eseguiti nell'ordine con cui li abbiamo scritti). Potremo indicarli con $x'_k = \Phi^k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ e $x''_r = \Psi^r(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ $(r = 1, 2, \dots, n)$. Anzitutto è ovvio che il vettore $\Psi\Phi$ soddisfa alla condizione a). Per verificare la b), osserviamo che le derivate di ordine $l-1$ della componente r-sima di $\Psi\Phi$ si esprimono, come è ovvio, mediante una somma di termini ottenuti moltiplicando una derivata di ordine $\leq l-1$ di Ψ^r rispetto agli argomenti $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ per un prodotto di derivate di ordine $\leq l-1$ delle componenti $\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^n$ rispetto alle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$. È allora evidente che le derivate $(l-1)$-

-sime di $\Psi\Phi$ soddisfano ad una condizione di Lipschitz rispetto alle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$, in modo uniforme.

Da noti risultati si deduce anche che le componenti di $\Psi\Phi$ hanno derivate l-esime generalizzate rispetto ad $x_1, x_2, \dots, x_n$ e queste sono date dalle classiche formule.

OSSERVAZIONE. Data una funzione $u(x)$ definita in Ω, diremo trasformata della u secondo l'omeomorfismo Φ, la funzione u' definita in Ω', in questo modo; $u(x) = u'(x')$ dove è $x' = \Phi(x)$. Allora, con gli stessi ragionamenti seguiti per la dimostrazione del lemma 2, si dimostra che la trasformata di una funzione l-regolare secondo un omeomorfismo l-regolare è una funzione l-regolare.

Ricordiamo che con simbolo $\mathcal{H}^l(\Omega)$ indichiamo lo spazio delle funzioni aventi derivate generalizzate fino all'ordine l-simo a quadrato integrabile in Ω, munito della norma (1). Valgono allora i seguenti lemmi:

LEMMA 3. - *Sia $u \in \mathcal{H}^l(\Omega)$, con Ω aperto e limitato e sia v una funzione l-regolare definita in Ω. Allora il prodotto ordinario uv appartiene ad $\mathcal{H}^l(\Omega)$ e si ha $\| uv \|_{\mathcal{H}^l(\Omega)} \leq K \| u \|_{\mathcal{H}^l(\Omega)}$ dove K è indipendente da u.*

Dimostriamo il teorema per $l = 1$. Essendo v limitata, la funzione uv risulta a quadrato integrabile in Ω. La funzione $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, eventualmente modificata in un insieme di misura nulla, risulta assolutamente continua rispetto a ciascuna delle variabili per quasi tutti i valori delle altre. Tale risulterà anche il prodotto $u(x)v(x)$ e la derivata verrà rappresentata dalla classica formula; da questa discende subito la limitazione asserita per la norma. Per induzione si passa facilmente al caso generale.

LEMMA 4. - *Sia $u \in \mathcal{H}^l(\Omega)$, e sia u' la trasformata di u, secondo un omeomorfismo Φ l-regolare che muta Ω in Ω'. Allora si ha $u' \in \mathcal{H}^l(\Omega')$ e $\| u' \|_{\mathcal{H}^l(\Omega')} \leq K \| u \|_{\mathcal{H}^l(\Omega)}$ essendo K una opportuna costante.*

Per $l = 1$ il risultato è noto [8]); del resto è facile dimostrarlo con considerazioni analoghe a quelle fatte per il lemma 2.

[8]) C. B. Morrey [7], Teorema 6,1.

In particolare si trova che, se Ψ indica l'omeomorfismo Φ^{-1} e se Ψ^h indica la componente h sima del vettore Ψ, si ha

$$\frac{\partial u'}{\partial x'_k} = \sum_h \frac{\partial u}{\partial x_h} \frac{\partial \Psi^h}{\partial x'_k} .$$

Questa formula mostra anche che le derivate $\frac{\partial u'}{\partial x'_k}$ sono a quadrato integrabile in Ω'. Nel caso generale, il lemma si può allora dimostrare in modo analogo a quello con cui si dimostrerebbe la classica regola di derivazione puntuale, tenendo presente che il lemma stesso, per $l = 1$, ci fornisce una regola di derivazione di funzioni composte, mentre il lemma 3 fornisce una regola di derivazione per il prodotto. Precisamente, preso un intero $k < l$, supponiamo che le derivate di ordine k esistano, sempre in senso generalizzato, e siano date dalla classica formula. Ciascuna di queste derivate è somma di termini in cui compare una sola derivata (di ordine $\leq k$) di u rispetto alle variabili $x_1, x_2, \dots, x_n$ moltiplicata per il prodotto di più derivate (distinte o no) delle Ψ^h rispetto alle variabili $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$. Essendo ciascuna di queste ultime, a sua volta, derivabile in senso generalizzato con derivata limitata, tale risulta anche il loro prodotto. Applicando il lemma 2 e quindi il lemma 3 per il caso $l = 1$ si deduce che esistono tutte le derivate di ordine $k + 1$ e sono date dalla classica formula: questa mette in evidenza anche che esse sono a quadrato integrabile in Ω'.

Indicheremo in seguito con Λ_m (essendo m intero > 0) lo insieme aperto $-\frac{1}{2} < x_k < \frac{1}{2}$ $(k = 1, 2, \dots, m)$. Indicheremo, in conformità con le notazioni introdotte nel § 1, con T_m la varietà toroidale m dimensionale ottenuta completando Λ_m e compiendo le consuete identificazioni. Enunciamo ora un ultimo lemma:

LEMMA 5. - *Sia $u \in \mathcal{H}^s(T_m)$, con s positivo intero o semintero $\leq l$; sia inoltre η una funzione l-regolare definita in T_m. Allora si ha $\eta u \in \mathcal{H}^s(T_m)$ ed è $\| \eta u \|_{\mathcal{H}^s(T_m)} \leq K \| u \|_{\mathcal{H}^s(T_m)}$.*

Per s intero, l'asserto è contenuto nel lemma 3. Sia dunque s semintero. Consideriamo la varietà T_{m+1}; indicheremo con

$(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})$ le coordinate del punto $x \in T_{m+1}$. Prolungheremo la definizione di η a tutta T_{m+1} in modo che sia indipendente da x_{m+1}. Evidentemente la funzione η^* così ottenuta sarà l-regolare.

D'altra parte, in virtù del teorema 1, la funzione u può essere prolungata a T_{m+1} in una funzione $v \in \mathcal{H}^{s+\frac{1}{2}}(T_{m+1})$. Ora, poichè, $s+\frac{1}{2}$ è intero, avremo $\eta^* v \in \mathcal{H}^{s+\frac{1}{2}}(T_{m+1})$. La traccia di $\eta^* v$ su T_m che, sempre in virtù del teorema 1, apparterrà ad $\mathcal{H}^s(T_m)$, coincide evidentemente con ηu. Ora il prolungamento di u a tutto T_{m+1} può essere ottenuto con limitazione in norma, in virtù di quanto osservato nel § 3. Poichè l'operazione $v \rightarrow \eta^* v$ e l'operazione di traccia sono limitate, ne deriva la limitazione asserita.

Diremo che una varietà V, ad m dimensioni, contenuta in un insieme aperto Ω di E_n, è l-regolare se essa ammette una copertura finita operata da una famiglia $\{\Omega_J\}$ $(J = 1, 2, \ldots, t)$ di insiemi aperti in E_n che godono di questa proprietà

Per ogni Ω_J esiste un omeomorfismo l-regolare $\Phi_J : x \rightarrow x'$ che lo muta nel cubo Λ_n, in modo tale che i punti di $\Omega_J \cap V$ corrispondano ai punti di Λ_m.

Osserviamo che sulla varietà V l-regolare si può introdurre nel modo consueto una misura m-dimensionale espressa mediante il classico integrale. Sarà chiaro allora che cosa dovrà intendersi per funzione definita quasi ovunque su V, per funzione a quadrato integrabile su V ecc..

Introduciamo ora una copertura $\{\Omega_J^*\}$ $(J = 1, 2, \ldots, t)$ di V subordinata alla copertura $\{\Omega_J\}$ (tale cioè che $\overline{\Omega}_J^* \subset \Omega_J$); assumiamo poi un sistema di funzioni l-regolari $\rho_J(x)$, definite su Ω tali che

I) $\rho_J(x) = 1$ per $x \in \overline{\Omega}_J^*$.

II) il supporto [9]) di ρ_J sia contenuto in Ω_J.

---

[9]) Ricordiamo che si suole chiamare supporto di una funzione il complementare dell'insieme costituito dai punti che possiedono un intorno aperto in cui la funzione stessa è nulla quasi ovunque.

Indicheremo con il medesimo simbolo anche la restrizione di ρ_J ad Ω_J, oppure ad $\Omega_J \cap V$. Sia ora assegnata su V una funzione u a quadrato integrabile. Indicheremo con u_J la sua restrizione ad $\Omega_J \cap V$. Segneremo con un apice la trasformata di una qualsiasi funzione definita in Ω_J, secondo l'omeomorfismo Φ_J. Le funzioni definite in Ω_J (oppure in $\Omega_J \cap V$) avranno trasformate, secondo l'omeomorfismo Φ_J, definite in Λ_n (o in Λ_m): noi converremo di estenderne la definizione a tutto T_n (o T_m rispettivamente) con valori nulli. Per non complicare ulteriormente le notazioni indicheremo le funzioni così prolungate con i medesimi simboli.

Ciò posto, *diremo che* $u \in \mathcal{H}^s(V)$ (*con* s *intero o semintero*, $0 < s < l$) *se, per ogni valore di* J, *si ha* $\rho'_J u'_J \in \mathcal{H}^s(T_m)$. Dunque una funzione $u \in \mathcal{H}^s(V)$ coincide localmente, a meno di un conveniente omeomorfismo l-regolare, con una funzione di $\mathcal{H}^s(T_m)$.

Potremo introdurre in $\mathcal{H}^s(V)$ una norma così definita

$$(14) \qquad \| u \|^2_{\mathcal{H}^s(V)} = \sum_{1}^{t} {}_J \| \rho'_J u'_J \|^2_{\mathcal{H}^s(T_m)} \, .$$

Nella nostra definizione interviene la particolare scelta delle coperture $\{ \Omega_J \}$, $\{ \Omega^*_J \}$, degli omeomorfismi Φ_J nonchè delle funzioni ρ_J. Occorrerebbe, anche per giustificare la scrittura abbreviata con cui abbiamo indicato lo spazio $\mathcal{H}^s(V)$, mostrare l'indipendenza delle nozioni introdotte dalle particolari scelte fatte. Non avremo però bisogno di svolgere una dimostrazione a parte perchè la stessa caratterizzazione che daremo, servirà ad ottenere una dimostrazione indiretta, per i casi che ci interessano.

Notiamo intanto che per $s = 0$ lo spazio introdotto coincide con quello delle funzioni a quadrato integrabile su V e che la norma data dalla (14) è allora equivalente a quella di $L^2(V)$, assegnata per mezzo della misura m-dimensionale. Poichè, d'altra parte, come si verifica tenendo presente la (1'), si ha, per $s > 0$,

$$\| u \|^2_{\mathcal{H}^0(V)} \leq \| u \|^2_{\mathcal{H}^s(V)}$$

se ne può concludere che la convergenza secondo $\mathcal{H}^s(V)$ implica la convergenza in media su V, convergenza che ha carattere intrinseco. Da questa osservazione si può anche dedurre facilmente la completezza dello spazio $\mathcal{H}^s(V)$. Sia infatti u_r una successione di Cauchy in $\mathcal{H}^s(V)$; essa è una successione di Cauchy anche in $\mathcal{H}^0(V)$. Esisterà allora una funzione u^* a quadrato integrabile su V verso cui u_r converge in $\mathcal{H}^0(V)$. Per ogni valore dell'indice J, si avrà in $\mathcal{H}^0(T_m)$: $\lim\limits_{r\to\infty} \rho'_J u'_{rJ} = \rho'_J u^{*\prime}_J$.

D'altra parte, la successione $\rho'_J u'_{rJ}$ converge in $\mathcal{H}^s(T_m)$ (che è completo) verso una funzione $v_J \in \mathcal{H}^s(T_m)$. Deve allora essere $v_J = \rho'_J u^{*\prime}_J$ e si avrà $\lim\limits_{r\to\infty} \| \rho'_J u'_{rJ} - \rho'_J u^{*\prime}_J \|_{\mathcal{H}^s(T_m)} = 0$. Quindi $\lim\limits_{r\to\infty} \| u_r - u^* \|_{\mathcal{H}^s(V)} = 0$.

Sia ora u una funzione l-regolare in Ω e sia k un intero positivo nullo, minore di l. Potremo supporre — evidentemente senza limitazione di generalità — che Ω contenga gli insiemi Ω_J costituenti la copertura di V sopra considerata. Indicando sempre con u_J la restrizione di u ad Ω_J e con u'_J la sua trasformata mediante l'omeomorfismo Φ_J, si avrà

$$(15)\qquad \frac{\partial^k u'_J}{\partial x_1'^{\alpha_1} \partial x_2'^{\alpha_2} \dots \partial x_n'^{\alpha_n}} = \sum_{0 \le \beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n \le k} \frac{\partial^h u_J}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}} M^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}$$

dove è $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k$, $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n = h$ e i coefficienti $M^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}$ sono, come si vede facilmente, funzioni $(l-k)$-regolari. Analogamente si esprimerà la relazione inversa

$$(16)\qquad \frac{\partial^h u_J}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}} = \sum_{0 \le \alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n \le h} \frac{\partial^k u'_J}{\partial x_1'^{\alpha_1} \partial x_2'^{\alpha_2} \dots \partial x_n'^{\alpha_n}} L^{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$$

dove i coefficienti sono pure $(l-h)$-regolari. Se indichiamo con $\chi_{J\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}$ la traccia di $\dfrac{\partial^k u'_J}{\partial x_1'^{\alpha_1} \dots \partial x_n'^{\alpha_n}}$ su Λ_m, con $\varphi_{J\beta_1\beta_2\dots\beta_n}$ la traccia di $\dfrac{\partial^h u'_J}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$ su $\Omega_J \cap V$ avremo (ricordando che u è supposta l-regolare)

$$(17)\qquad \chi_{J\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n} = \sum_{0 \le \beta_1+\beta_2+\dots+\beta_n \le k} \varphi_{J\beta_1\beta_2\dots\beta_n} M^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n} .$$

Derivando lungo la varietà Λ_m, otteniamo queste relazioni tra le funzioni $\chi_{J\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$:

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m}}{\partial x_1'^{\alpha_1}\partial x_2'^{\alpha_2}\ldots\partial x_m'^{\alpha_m}}\chi_{J0,0\ldots0\alpha_{m+1}\ldots\alpha_n}=\chi_{J\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\ldots\alpha_n} \tag{18}$$

(sempre se è $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=k<l$). Queste relazioni si traducono in modo ovvio in relazioni fra le $\varphi_{J\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}$. Queste ultime verranno richiamate brevemente, in seguito, come *relazioni di compatibilità*.

La definizione di traccia si può allora dare estendendo quella data nel § 1. Diremo che lo spazio $\mathcal{H}^l(\Omega)$ ammette traccia su V appartenente ad $\mathcal{H}^s(V)$ $(l\geq s\geq 0)$ se, per ogni funzione u l-regolare, si ha

$$\|\gamma u\|_{\mathcal{H}^s(V)}\leq K\|u\|_{\mathcal{H}^l(\Omega)}. \tag{19}$$

Analogamente si procede per le derivate: diremo che la derivata $\dfrac{\partial^h u}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}$ ammette traccia su V, appartenente ad $\mathcal{H}^s(V)$ $(l\geq s\geq 0)$ se, nell'ulteriore ipotesi che u sia l-regolare, si ha

$$\left\|\gamma\frac{\partial^h u}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\ldots\partial x_n^{\beta_n}}\right\|_{\mathcal{H}^s(V)}\leq K\|u\|_{\mathcal{H}^l(\Omega)}.$$

L'operazione di traccia si definisce allora in tutto $\mathcal{H}^l(\Omega)$ mediante prolungamento per continuità, in virtù della completezza di $\mathcal{H}^s(V)$, tenendo conto del fatto che l'insieme delle funzioni l-regolari è ovunque denso in $\mathcal{H}^l(\Omega)$.

Poichè la convergenza nello spazio $\mathcal{H}^s(V)$ implica la convergenza in $\mathcal{H}^0(V)$ e questa equivale alla convergenza in $L^2(V)$, si deduce che, quando esiste, la traccia è determinata indipendentemente dal modo particolare con cui abbiamo definito gli spazi $\mathcal{H}^s(V)$.

È altresì facile constatare che la traccia dipende solo dai valori che u assume in un intorno arbitrario di V.

Possiamo ora dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 2. - *Sia Ω un insieme aperto limitato di uno spazio euclideo ad n dimensioni E_n. Siano m ed l interi positivi tali che $n > m > n - 2l$. Sia V una varietà l-regolare ad m dimensioni contenuta in Ω. Allora ogni funzione $u \in \mathcal{H}^l(\Omega)$ ammette traccia su V con le sue derivate fino all'ordine $\left[l - \frac{n-m}{2}\right]^-$ e si ha $\gamma \frac{\partial^h u}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \in \mathcal{H}^{l-h-\frac{n-m}{2}}(V)$ Reciprocamente supponiamo assegnate su V le funzioni $\varphi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}$ $\left(0 \leq \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n \leq \left[l - \frac{n-m}{2}\right]^-\right)$ soddisfacenti alle relazioni di compatibilità e tali che $\varphi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} \in \mathcal{H}^{l-h-\frac{n-m}{2}}(V)$ (dove è $h = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$). Allora esiste almeno una funzione $u \in \mathcal{H}^l(\Omega)$ tale che*

$$\gamma \frac{\partial^h u}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} = \varphi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}. \tag{20}$$

Esiste inoltre una costante K indipendente dalle $\varphi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}$ tale che, con una conveniente scelta della funzione u, si abbia

$$\| u \|^2_{\mathcal{H}^l(\Omega)} \leq K \sum_{0 \leq h \leq \left[l - \frac{n-m}{2}\right]^-} \| \varphi_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} \|^2_{\mathcal{H}^{l-h-\frac{n-m}{2}}(V)}. \tag{21}$$

Osserviamo che, a differenza di quanto fatto per il teorema 1, il numero l viene ora supposto *intero*.

Per dimostrare la prima parte del teorema basterà dimostrare che, presa una funzione u l-regolare, si ha, per ogni h, con

$$0 \leq h \leq \left[l - \frac{n-m}{2}\right]^-,$$

$$\left\| \gamma \frac{\partial^h u}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right\|_{\mathcal{H}^{l-h-\frac{n-m}{2}}(V)} \leq K \| u \|_{\mathcal{H}^l(\Omega)}$$

ossia che è per ogni J, $1 \leq J \leq t$,

$$\left\| \gamma \rho_J' \left(\frac{\partial^h u}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} \right)' \right\|_{\mathcal{H}^{l-h-\frac{n-m}{2}}(T_m)} \leq K \| u \|_{\mathcal{H}^l(\Omega)}. \tag{22}$$

Sia η_J una funzione l-regolare che assuma valore 1 in un insieme aperto contenente il supporto di ρ_J e si annulli in un intorno della frontiera di Ω_J. Per il modo con cui abbiamo preso η_J, si avrà $\rho_J \dfrac{\partial^h u_J}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} = \rho_J \dfrac{\partial^h u_J \eta_J}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}}$ e, per la (16)

$$\rho'_J \left(\frac{\partial^h u_J}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} \dots \partial x_n^{\beta_n}} \right)' = \tag{23}$$

$$= \sum_{0 \le \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \le h} \frac{\partial^k u'_J \eta'_J}{\partial x_1'^{\alpha_1} \partial x_2'^{\alpha_2} \dots \partial x_n'^{\alpha_n}} \rho'_J L^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} .$$

Si ha ora, per i lemmi 3 e 4,

$$\| u'_J \eta'_J \|_{\mathcal{H}^l(T_n)} = \| u'_J \eta'_J \|_{\mathcal{H}^l(\Lambda_n)} \le K \| u_J \eta_J \|_{\mathcal{H}^l(\Omega_J)} \le$$
$$\le K \| u_J \|_{\mathcal{H}^l(\Omega_J)} \le K \| u \|_{\mathcal{H}^l(\Omega)} .$$

Pertanto, per il teorema 1,

$$\left\| \gamma \frac{\partial^k u'_J \eta'_J}{\partial x_1'^{\alpha_1} \partial x_2'^{\alpha_2} \dots \partial x_n'^{\alpha_n}} \right\|_{\mathcal{H}^{l-k-\frac{n-m}{2}}(T_m)} \le K \| u'_J \eta'_J \|_{\mathcal{H}^l(T_n)} \le K \| u \|_{\mathcal{H}^l(\Omega)} .$$

Consideriamo ora il secondo membro della (23); il prodotto $\rho'_J L^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$ è $(l-h)$-regolare. Applicando il lemma 5 e tenendo presente che è $k \le h$, si ha

$$\left\| \gamma \frac{\partial^k u'_J \eta'_J}{\partial x_1'^{\alpha_1} \partial x_2'^{\alpha_2} \dots \partial x_n'^{\alpha_n}} \rho'_J L^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \right\|_{\mathcal{H}^{l-h-\frac{n-m}{2}}(V)} \le$$
$$\le K \left\| \gamma \frac{\partial^k u'_J \eta'_J}{\partial x_1'^{\alpha_1} \dots \partial x_n'^{\alpha_n}} \right\|_{\mathcal{H}^{l-h-\frac{n-m}{2}}(V)} \le$$
$$\le K \left\| \gamma \frac{\partial^k u'_J \eta'_J}{\partial x_1'^{\alpha_1} \partial x_2'^{\alpha_2} \dots \partial x_n'^{\alpha_n}} \right\|_{\mathcal{H}^{l-k-\frac{n-m}{2}}(T_m)} \le K \| u \|_{\mathcal{H}^l(\Omega)} .$$

Da questa segue subito la (22).

Dimostriamo ora la seconda parte del teorema. Supporremo assegnate su V le funzioni

$$\varphi_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n} \in \mathcal{H}^{l-h-\frac{n-m}{2}}(V) \qquad (\beta_1 + \beta_2 + \dots \beta_n = h),$$

essendo $0 \le h \le \left[l - \dfrac{n-m}{2} \right]^-$. Indicheremo con $\varphi_{J\beta_1\beta_2 \dots \beta_n}$ la restrizione di $\varphi_{\beta_1\beta_2..\beta_n}$ a $V \cap \Omega_J$. Indicheremo con $\chi_{J\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$ le funzioni che si deducono dalle $\varphi_{J\beta_1\beta_2...\beta_n}$ per mezzo della (17). Per ipotesi, si ha $\rho'_J \varphi'_{J\beta_1\beta_2...\beta_n} \in \mathcal{H}^{l-h-\frac{n-m}{2}}(T_m)$. Moltiplicando, nella (17), membro a membro per ρ'_J, ricaviamo

$$\rho'_J \chi_{J\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} = \sum_{0 \leq \beta_1+\beta_2+...+\beta_n \leq k} \varphi_{J\beta_1\beta_2...\beta_n} \rho'_J M^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}_{\beta_1\beta_2...\beta_n}$$

$$(k = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)$$

Tenendo presente che le funzioni $M^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}_{\beta_1\beta_2...\beta_n}$ sono $(l-k)$-regolari in Λ_m e che esse possono essere modificate fuori del supporto di ρ'_J in modo da essere $(l-k)$-regolari in tutto T_m, si ha, applicando il lemma 5,

$$\rho'_J \chi_{J\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} \in \mathcal{H}^{l-k-\frac{n-m}{2}}(T_m).$$

Per il teorema 1, possiamo allora costruire una funzione $u'_J \in \mathcal{H}^l(T_n)$ tale che $\gamma \dfrac{\partial^k u'_J}{\partial x'^{\alpha_{m+1}}_{m+1} ... \partial x'^{\alpha_n}_n} = \rho'_J \chi_{J0,0...0\alpha_{m+1}...\alpha_n}$. Potremo facilmente ottenere che u'_J sia nulla fuori di un insieme chiuso contenuto in Λ_n. Per le relazioni che sussistono tra le $\chi_{J\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$, in virtù delle relazioni di compatibilità che si hanno, per ipotesi, fra le $\varphi_{J\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$ si avrà in generale

$$\gamma \frac{\partial^k u'_J}{\partial x'^{\alpha_1}_1 \partial x'^{\alpha_2}_2 ... \partial x'^{\alpha_n}_n} = \rho'_J \chi_{J\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} = \chi_{J\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}$$

purchè ci si limiti a considerare l'insieme aperto di T_m, trasformato di $V \cap \Omega^*_J$ secondo la Φ_J, in cui la funzione ρ'_J è identicamente uguale a $+1$.

Consideriamo ora la funzione u_J, trasformata della restrizione di u'_J a Λ_n secondo l'omeomorfismo Φ_J^{-1}. È $u_J \in \mathcal{H}^l(\Omega_J)$. Poichè u'_J è nulla in un intorno della frontiera di Ω_J, essa può essere prolungata con valori nulli a tutto Ω, continuando ad appartenere ad $\mathcal{H}^l(\Omega)$ (con la medesima norma); conserveremo il simbolo u_J per indicare la funzione così ottenuta. Evidentemente u_J e le sue derivate fino all'ordine $\left[l - \dfrac{n-m}{2}\right]^-$

ammettono tracce su V e poichè, in virtù della (16), le derivate di u'_J sono univocamente determinate da quelle della trasformata, questo implica che, su $V \cap \Omega_J^*$, si ha

$$\gamma \frac{\partial^h u_J}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} = \varphi_{J\beta_1\beta_2\dots\beta_n}\,.$$

Essendo $\{\Omega_J^*\}$ una copertura di V, basta associare ad essa un conveniente sistema di funzioni che realizzi una partizione dell'unità in un intorno di V per ottenere una funzione $u \in \mathcal{H}^l(\Omega)$ che soddisfi alla (20).

Seguendo i passaggi della dimostrazione e tenendo presente l'osservazione fatta al § 3, si vede facilmente che, con una conveniente scelta della funzione u, è possibile soddisfare alla limitazione (20).

Il teorema risulta così dimostrato.

Siamo ora in grado di vedere che, assegnato un sistema di funzioni $\varphi_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n} \in \mathcal{H}^{l-h-\frac{n-m}{2}}(V)$ soddisfacenti alle condizioni di compatibilità, la condizione $\varphi_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n} \in \mathcal{H}^{l-h-\frac{n-m}{2}}(V)$ non dipende dalle particolari coperture adottate, nè dalla scelta degli omeomorfismi Φ_J l-regolari, nè dalle funzioni ρ_J. Indichiamo infatti con $\mathcal{H}^s(V)$, $\mathcal{H}^{*s}(V)$, provvisoriamente, due spazi che vengono ottenuti con due diverse scelte dei suddetti elementi. Se supponiamo $\varphi_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n} \in \mathcal{H}^{l-h-\frac{n-m}{2}}(V)$ esisterà una funzione $u \in \mathcal{H}^l(\Omega)$ tale che $\gamma \dfrac{\partial^h u}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_n^{\beta_n}} = \varphi_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}$. Ma la u e le sue derivate ammettono tracce (coincidenti con le funzioni $\varphi_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}$) appartenenti anche ai corrispondenti spazi $\mathcal{H}^*$. Dalla (21) si deduce poi che le norme delle funzioni $\varphi_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}$ negli spazi $\mathcal{H}^*$ si possono limitare globalmente in base alle norme negli spazi $\mathcal{H}$.

OSSERVAZIONE. Nel caso $m = n - 1$, la varietà V separa lo spazio E_n. Ha interesse allora considerare il problema della caratterizzazione della traccia nel caso in cui la funzione sia definita da una parte sola di V. È questo il punto di vista adottato nei lavori [1], [3], [5], [6], [8]. Osserviamo che le considerazioni qui svolte si adattano immediatamente al problema così formulato. Infatti, assegnata una funzione u avente derivate fino all'ordine l a quadrato integrabile definita da una parte sola di V, una interessante costruzione dovuta a Babich [3] permette di prolungarla dall'altra parte.

APPENDICE

Dimostriamo ora che le funzioni di $\mathcal{H}^l(T_n)$ (con l reale ≥ 0) coincidono *localmente* con le funzioni dotate di derivate l-sime secondo Riemann-Liouville a quadrato integrabile.

Potremo limitarci a considerare una funzione u a quadrato integrabile, avente il supporto contenuto al cubo aperto $\Lambda_n \equiv \left(-\frac{1}{2} < x_k < \frac{1}{2}\right)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Indicheremo ancora con lo stesso simbolo, per semplicità, la funzione ottenuta mediante prolungamento con valori nulli a tutto lo spazio E_n, oppure alla varietà T_n.

Potremo poi, evidentemente, limitarci a considerare il caso $0 < l < 1$.

Ciò posto seguendo le convenzioni precisate nel lavoro [8] (pag. 53) diremo che $u(x)$ ha derivata di ordine l rispetto ad x_k a quadrato integrabile, se l'integrale

$$\int_{-\infty}^{x_k} (x_k - t)^{-l} u(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, t\ x_{k+1}, \ldots, x_n) dt$$

ha derivata (generalizzata) rispetto ad x_k, a quadrato integrabile in E_n. Per comodità, indichiamo con Ψ la funzione così definita

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad t \geq 0 \\ t^{-l} & \text{per} \quad t < 0 \,. \end{cases}$$

Allora la condizione esposta si può esprimere così

$$\frac{\partial}{\partial x_k} u \underset{k}{*} \Psi(x_k) \in L^2(E_n) \tag{24}$$

dove con $\underset{k}{*}$ indichiamo il prodotto integrale *eseguito solo rispetto alla variabile k-sima.*

Vogliamo ora dimostrare che, indicando, come prima, con u_ξ i coefficienti di Fourier di u considerata come definita su T_n, la condizione (24) è equivalente alla seguente

$$\sum_\xi |u_\xi|^2 |\xi_k|^{2l} < \infty \tag{25}$$

la quale esprime l'appartenenza di u ad $\mathcal{H}^l(T_n)$[10]).

Indichiamo ora con $\omega(t)$ una funzione definita per $-\infty < t < +\infty$, indefinitamente derivabile, nulla fuori di un intervallo $-\delta \leq t \leq +\delta$ (con $\delta > 0$ che ci riserveremo di prendere convenientemente piccolo) e assumente il valore $+1$ in un intorno del punto $t = 0$.

Poniamo $\Psi_1(t) = \Psi(t)\omega(t)$, $\Psi_2(t) = \Psi(t)(1 - \omega(t))$.

Si ha ora

$$\frac{\partial}{\partial x_k} u \underset{k}{*} \Psi_2(x_k) = u \underset{k}{*} \Psi_2'(x_k).$$

Poichè $\Psi_2'(t)$ è integrabile sulla retta $-\infty < t < +\infty$ ed u è a quadrato integrabile su E_n, si constata che $\frac{\partial}{\partial x_k} u \underset{k}{*} \Psi_2(x_k) \in L^2(E_n)$.

La condizione (24) equivale pertanto alla seguente

$$y(x) = \frac{\partial}{\partial x_k} u \underset{k}{*} \Psi_1(x_k) \in L^2(E_n).$$

Supponiamo ora che il parametro δ, da cui dipende la funzione ω, sia preso talmente piccolo che la funzione $u \underset{k}{*} \Psi_1(x_k)$ abbia ancora il suo supporto tutto contenuto in Λ_n. Definiremo questa funzione in tutta la varietà T_n prolungandola con valori nulli.

Calcoliamo ora i coefficienti di Fourier y_ξ della funzione $y(x)$.

---

10) Ricordiamo che, con ξ indichiamo il vettore a componenti intere $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$.

Per ogni vettore a componenti intere ξ, avremo

$$y_\xi = \int_{\Lambda_n} \exp(-2\pi i x\xi) y(x) dx = \int_{E_n} \exp(-2\pi i x\xi) y(x) dx.$$

Indichiamo con χ la trasformata di Fourier di Ψ_1.

Applicando il ben noto risultato intorno alla trasformata di Fourier di un prodotto integrale otteniamo:

$$y_\xi = 2\pi i \xi_k u_\xi \chi(\xi_k).$$

Ma un semplice calcolo mostra che la funzione $\chi(\eta)$ tende all'infinito (per $\eta \to \pm\infty$), in modulo, dell'ordine di $|\eta|^{l-1}$. E poichè $y \in L^2(E_n)$ quando e soltanto quando sia $\sum_\xi |y_\xi|^2 < \infty$, si conclude che la (25) esprime una condizione necessaria e sufficiente perchè sia $y \in L^2(E_n)$, cioè perchè valga la (24).

BIBLIOGRAFIA

[1] N. ARONSZAJN: *Boundary values of functions with finite Dirichlet integral*, Conference on partial differential equations. Studies in eigenvalue problems, n. 14 (Univ. of. Kansas, 1955).

[2] V. M. BABICH: *Sul problema del prolungamento delle funzioni* (in russo), Uspekhi Matematiceskii Nauk, 8, 2 (54), 111-3 (1953).

[3] V. M. BABICH e L. N. SLOBODETSKIJ: *Sulla limitatezza dell'integrale di Dirichlet* (in russo). Doklady Akademii Nauk S.S.S.R., 106, 604-8 (1956).

[4] S. BANACH: *Théorie des opérations linéaries*, Varsavia, 1932.

[5] E. GAGLIARDO: *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*, Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova, vol. XXVII, parte II, 1957.

[6] J. L. LIONS: *Sur les problèmes aux limites du type dérivée oblique*, Annals of Mathematics, vol. 64, n. 2 (1956).

[7] C. B. MORREY: *Functions of several variables and absolute continuity*, Duke Math. J., 6, 187-215 (1940).

[8] G. PRODI: *Tracce sulla frontiera delle funzioni di Beppo Levi*, Rend. Sem. Mat. di Padova, 26, 36-60 (1956).

[9] S. L. SOBOLEV: *Alcune applicazioni dell'analisi funzionale alla fisica matematica*, Leningrado, 1950.