

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LAMBERTO CATTABRIGA

**Problemi al contorno per equazioni
paraboliche di ordine $2n$**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 28 (1958), p. 376-401

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__376_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROBLEMI AL CONTORNO PER EQUAZIONI PARABOLICHE DI ORDINE $2n$

Nota (*) di LAMBERTO CATTABRIGA (a Bologna)

Sia \mathfrak{D} il dominio $\chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$, $0 \leq y \leq 1$, con $\chi_j(y)$, $j=1, 2$, continue in $0 \leq y \leq 1$ e $\chi_1(y) < \chi_2(y)$, γ_j la curva di equazione $x = \chi_j(y)$, $0 \leq y \leq 1$, $j=1, 2$ e C_0 il segmento $\chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0)$, $y=0$. Consideriamo il problema consistente nel determinare una funzione $u(x, y)$ definita in \mathfrak{D} per la quale si abbia

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{L}_0[u] = D_x^{2n} u + (-1)^n D_y u = 0 \quad (0) & \text{in } \mathfrak{D} - C_0 - \gamma_1 - \gamma_2 \\ u = \varphi_0(x) & \text{su } C_0 \\ D_x^i u = \varphi_{ij}(y) & \text{su } \gamma_j, \quad j=1, 2, \quad i=0, 1, \dots, n-1. \end{array} \right.$$

ove $\varphi_0(x)$ è una assegnata funzione continua in $\chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0)$ e $\varphi_{ij}(y)$, $j=1, 2$, $i=0, 1, \dots, n-1$ sono $2n$ funzioni assegnate, continue in $0 \leq y \leq 1$, con $\varphi_{01}(0) = \varphi_0(\chi_1(0))$ e $\varphi_{02}(0) = \varphi_0(\chi_2(0))$, tali valori al contorno intendendosi assunti in senso ordinario.

Questo problema è qui risolto (n. 2), seguendo la via classica della teoria del potenziale, facendo uso di potenziali di linea analoghi a quelli di semplice e doppio strato noti nella teoria dell'equazione del calore. La ricerca e lo studio di questi poten-

(*) Pervenuta in Redazione il 28 ottobre 1958.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Bologna.

(0) Con $D_x^i u$, $D_y u$ indicheremo la derivata i -esima rispetto ad x e la derivata prima rispetto ad y , rispettivamente della funzione $u(x, y)$.

ziali, che segue le linee di un precedente lavoro di B. Pini¹⁾, occupa il n. 1 del presente lavoro. In particolare vi si stabiliscono relazioni per la discontinuità delle derivate di tali potenziali e formule di maggiorazione per i nuclei di essi, comprendenti le note formule di maggiorazione per la soluzione fondamentale della equazione $\mathcal{L}_0[u] = 0$, provate per diversa via da O. A. Ladyzhenskaia²⁾. Fondandosi sui risultati così ottenuti è allora possibile trattare lo stesso problema (1) per la equazione completa

$$\mathcal{L}[u] = \sum_0^{2n} a_i(x, y) D_x^i u + (-1)^n D_y u = f(x, y)$$

seguendo lo stesso schema presentato da B. Pini a proposito del corrispondente problema per equazioni paraboliche lineari del quarto ordine³⁾. Di questo, come pure di altri risultati riguardanti equazioni paraboliche del quarto ordine lineari e non lineari⁴⁾, la cui estensione alle corrispondenti equazioni paraboliche di ordine $2n$ è consentita da quanto qui provato. È dato un breve resoconto al n. 3⁵⁾.

¹⁾ B. PINI. *Sul problema fondamentale di valori al contorno per una classe di equazioni paraboliche lineari*. Annali di Mat. pura appl., 4, 43 (1957).

²⁾ O. A. LADYZHENSKAIA, *Sulla unicità della soluzione del problema di Cauchy per una equazione lineare parabolica*. Mat. Sbornik, 27 (69) (1950).

³⁾ Cfr. op. cit. in ¹⁾.

⁴⁾ Cfr. B. PINI. *Su una equazione parabolica non lineare del quarto ordine*, Rend. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 27 (1957); L. CATTABRIGA. *Una generalizzazione del problema fondamentale di valori al contorno per equazioni paraboliche lineari*, Annali di Mat. pura appl., 46 (1958); *Su una equazione non lineare del quarto ordine di tipo parabolico*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 8 (1958); *Equazioni paraboliche quasi lineari del quarto ordine*, ibidem.

⁵⁾ Problemi per equazioni del tipo considerato nella presente nota sono stati recentemente studiati da vari Autori, fra i quali F. BROWDER, T. KATO, P. D. LAX e A. N. MILGRAM. V. E. LANZE, J. L. LIONS.

1. Costruzione dei potenziali relativi alla equazione ridotta

$$\mathcal{L}_0[u] = D_x^{2n} u + (-1)^n D_y u = 0.$$

Sia data l'equazione ridotta

$$(2) \quad \mathcal{L}_0[u] = D_x^{2n} u + (-1)^n D_y u = 0$$

e siano α_k , $k=1, 2, \dots, 2n$, le radici della equazione

$$(3) \quad x^{2n} = (-1)^n.$$

Per ogni punto $Q \equiv (\xi, \eta)$, le parti reali e i coefficienti delle parti immaginarie delle $2n$ funzioni

$$\int_0^{+\infty} \exp[\alpha_k \mu(x - \xi) - \mu^{2n}(y - \eta)] d\mu, \quad y > \eta, \quad k = 1, 2, \dots, 2n,$$

saranno allora soluzioni della equazione (2) nel semipiano $y > \eta$.

Posto

$$t = \frac{x - \xi}{(y - \eta)^{1/2n}}, \quad \mu = \frac{\lambda}{(y - \eta)^{1/2n}},$$

tali funzioni si trasformano nelle

$$\frac{1}{(y - \eta)^{1/2n}} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda^{2n} + \alpha_k \lambda t) d\lambda = \frac{1}{(y - \eta)^{1/2n}} g_k(t),$$

$$k = 1, 2, \dots, 2n, \quad -\infty < t < +\infty$$

e per ogni t reale risulterà

$$g_k^{(2n)}(t) - \frac{(-1)^n}{2n} g_k(t) - \frac{(-1)^n}{2n} t g_k'(t) = 0,$$

ossia

$$g_k^{(2n-1)}(t) - \frac{(-1)^n}{2n} t g_k(t) = \text{cost.}$$

Determiniamo il valore di questa costante.

È

$$\begin{aligned}
 t g_k &= t \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda^{2n} + \alpha_k \lambda t) d\lambda = 1/\alpha_k \int_0^{-\infty} \exp(-\lambda^{2n}) \frac{d}{d\lambda} \exp(\alpha_k \lambda t) d\lambda = \\
 &= -1/\alpha_k + 2n/\alpha_k \int_0^{+\infty} \lambda^{2n-1} \exp(-\lambda^{2n} + \alpha_k \lambda t) d\lambda = \\
 &= -1/\alpha_k + (-1)^n 2n g_k^{(2n-1)}.
 \end{aligned}$$

Si avrà dunque per ogni t

$$g_k^{(2n-1)} - \frac{(-1)^n}{2n} t g_k = \frac{(-1)^n}{2n \alpha_k},$$

ossia

$$(\alpha_k g_k)^{(2n-1)} - \frac{(-1)^n}{2n} t \alpha_k g_k = \frac{(-1)^n}{2n}.$$

In corrispondenza alla radice $\alpha_k = i$, la parte reale della funzione g_k , ossia la funzione

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda^{2n}) \cos \lambda t d\lambda$$

soddisferà pertanto alla equazione

$$(4) \quad \varphi^{(2n-1)} - \frac{(-1)^n}{2n} t \varphi = 0,$$

mentre il coefficiente della corrispondente parte immaginaria, ossia la funzione

$$f^*(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda^{2n}) \operatorname{sen} \lambda t d\lambda$$

sarà tale che

$$f^{*(2n-1)} - \frac{(-1)^n}{2n} tf^* = -\frac{(-1)^n}{2n}.$$

Ne segue che alla (4) soddisferanno pure le funzioni

$$(5) \quad \alpha_k g_k + f^*, \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

Fra i valori che può assumere k ve ne sono sempre due k_1 e k_2 in corrispondenza ai quali si ha $\alpha_{k_1} = i$, $\alpha_{k_2} = -i$ e $\alpha_{k_1} g_{k_1} + f^* = -(\alpha_{k_2} g_{k_2} + f^*) = ij$. Se dai valori che può assumere k se ne esclude uno di questi, per es. k_2 , le funzioni (5) forniranno un sistema di $2n - 1$ soluzioni linearmente indipendenti della equazione (4), come segue dal fatto che le g_k sono fra loro linearmente indipendenti e che f^* è combinazione lineare delle g_{k_1} e g_{k_2} . Da tale sistema di soluzioni, tenuto conto che le α_k sono a due a due complesse coniugate e che per $k = k_1$ la (5) fornisce la funzione puramente immaginaria ij , si potranno ottenere, prendendo la parte reale ed il coefficiente della parte immaginaria di ciascuna delle funzioni del sistema, $2n - 1$ soluzioni reali linearmente indipendenti della equazione (4). Inoltre poichè fra le α_k ve ne sono $n - 1$ per cui è $\text{Re } \alpha_k > 0$, $n - 1$ per cui è $\text{Re } \alpha_k < 0$ e 2 con $\text{Re } \alpha_k = 0$, fra le $2n - 1$ soluzioni reali ora ottenute ve ne saranno $n - 1$, che indicheremo con ψ_h , $h = 1, 2, \dots, n - 1$, ottenute dalle (5) in corrispondenza alla prima di queste alternative, $n - 1$, che indicheremo con φ_h , $h = 1, 2, \dots, n - 1$, in corrispondenza alla seconda ed una, che non è altri che la f , in corrispondenza alla terza. Precisamente, posto $\alpha_k = a_k + ib_k$ e supposto $a_k > 0$, $b_k \geq 0$, le funzioni φ_h saranno espresse da

$$(6_1) \quad \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda^{2n}) [(a_k \cos b_k \lambda t + \\ + b_k \sin b_k \lambda t) \exp(-a_k \lambda t) - \sin \lambda t] d\lambda$$

e da

$$(6_2) \quad \int_0^{+\infty} (-a_k \operatorname{sen} b_k \lambda t + b_k \operatorname{cos} b_k \lambda t) \exp(-\lambda^{2n} - a_k \lambda t) d\lambda \quad (6),$$

$t > -\infty,$

mentre le ψ_h si otterranno da queste scambiando t con $-t$. Possiamo pensare le ψ_h ordinate in modo che per ogni $h=1, 2, \dots, n-1$ risulti $\psi_h(t) = \varphi_h(-t)$; riuscirà allora in particolare

$$(7) \quad \psi_h^{(\nu)}(0) = (-1)^\nu \varphi_h^{(\nu)}(0) \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^0 \psi_h dt = \int_0^{+\infty} \varphi_h dt.$$

Con semplici calcoli si può poi provare che è

$$\int_0^{+\infty} f dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^{+\infty} \varphi_h dt = \begin{cases} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} (\operatorname{cos} \lambda - e^{-\alpha_k \lambda} \operatorname{cos} b_k \lambda) d\lambda, & a_k > 0, b_k \geq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{b_k}{a_k} = \operatorname{arg} \alpha_k, & a_k > 0, b_k > 0, \end{cases}$$

queste due alternative verificandosi in corrispondenza alle funzioni (6₁) e (6₂) rispettivamente.

Le 2n - 1 funzioni

$$U(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(y - \eta)^{1/2n}} f\left(\frac{x - \xi}{(y - \eta)^{1/2n}}\right),$$

*) Si verifica subito che le due espressioni scritte danno effettivamente luogo ad $n-1$ funzioni. Infatti se n è pari vi sono $\frac{n-2}{2}$ radici α_k della (3) con $a_k > 0, b_k > 0$ ed una radice con $a_k = 1 (b_k = 0)$: se poi n è dispari, vi sono $\frac{n-1}{2}$ radici α_k con $a_k > 0, b_k > 0$ e nessuna con $b_k = 0$. La funzione f è anche fornita dalla (6₂) quando $a_k = 0, b_k = 1$; essa non varia ponendo $-t$ in luogo di t .

$$V_h(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(y - \eta)^{1/2n}} \varphi_h \left(\frac{x - \xi}{(y - \eta)^{1/2n}} \right),$$

$$W_h(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(y - \eta)^{1/2n}} \psi_h \left(\frac{x - \xi}{(y - \eta)^{1/2n}} \right),$$

$y > \eta$, $h = 1, 2, \dots, n-1$, sono tutte, per ogni (ξ, η) , soluzioni della equazione $\mathcal{L}_0[u] = 0$ nel semipiano $y > \eta$; la prima di queste coincide con la soluzione fondamentale della equazione stessa ⁷⁾.

Esaminiamo ora il comportamento delle funzioni f , φ_h , ψ_h , $h = 1, 2, \dots, n-1$, per $y \rightarrow \eta +$. Se r e p sono due interi positivi potremo scrivere successivamente

$$\begin{aligned} t^r(\alpha_h g_h + f^*) &= t^r \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda^{2n}) [\alpha_h \exp(\alpha_h \lambda t) + \text{sen } \lambda t] d\lambda = \\ &= (-1)^{np} t^{r-2np} \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda^{2n}) \frac{d^{2np}}{d\lambda^{2np}} [\alpha_h \exp(\alpha_h \lambda t) + \text{sen } \lambda t] d\lambda = \\ &= (-1)^{r+np} t^{r-2np} \left\{ \exp(-\lambda^{2n}) \frac{d^{2np-1}}{d\lambda^{2np-1}} [\alpha_h \exp(\alpha_h \lambda t) + \text{sen } \lambda t] \right\}_0^{+\infty} - \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \frac{d}{d\lambda} \exp(-\lambda^{2n}) \frac{d^{2np-1}}{d\lambda^{2np-1}} [\alpha_h \exp(\alpha_h \lambda t) + \text{sen } \lambda t] d\lambda \left\{ , \right. \end{aligned}$$

e procedere poi con nuove iterate integrazioni per parti. In ciascuna di queste tuttavia, il termine finito è costituito sempre dal prodotto di una derivata di $\exp(-\lambda^{2n})$ e di una derivata rispetto a λ di $\alpha_h \exp(\alpha_h \lambda t) + \text{sen } \lambda t$, i cui ordini di derivazione hanno per somma $2np - 1$. Osservando allora che le derivate di $\exp(-\lambda^{2n})$ sono della forma $P(\lambda) \exp(-\lambda^{2n})$, con $P(\lambda)$ polinomio in λ che ammette $\lambda = 0$ come radice almeno

⁷⁾ Cfr. H. BLOCK, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles à caractéristiques multiples*, Arkiv för Mat. Astr. och Fys., Bd. 7 (1912) e Bd. 8 (1913).

semplice, se l'ordine di derivazione non è multiplo di $2n$, mentre è per ogni intero positivo q

$$\begin{aligned} & \frac{d^{2nq-1}}{d\lambda^{2nq-1}} [\alpha_k \exp(\alpha_k \lambda t) + \text{sen } \lambda t] = \\ & = t^{2nq-1} [\alpha_k^{2nq} \exp(\alpha_k \lambda t) + (-1)^{nq+1} \cos \lambda t] = \\ & = t^{2nq-1} [(-1)^{nq} \exp(\alpha_k \lambda t) + (-1)^{nq+1} \cos \lambda t], \end{aligned}$$

che è nullo per $\lambda=0$, con $2np$ integrazioni per parti si otterrà

$$\begin{aligned} & t^r(\alpha_k g_k + f^*) = \\ & = (-1)^{np} t^{r-2np} \int_0^{+\infty} [\alpha_k \exp(\alpha_k \lambda t) + \text{sen } \lambda t] \frac{d^{2np}}{d\lambda^{2np}} \exp(-\lambda^{2n}) d\lambda. \end{aligned}$$

Scelto allora l'intero p in modo che sia $2np > r$, si può concludere che

$t^r(\alpha_k g_k + f^*)$ tende a zero per $t \rightarrow +\infty$, se $\text{Re } \alpha_k \leq 0$,

$t^r(\alpha_k g_k + f^*)$ tende a zero per $t \rightarrow -\infty$, se $\text{Re } \alpha_k \geq 0$,

Ne segue che per ogni r intero positivo risulta

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{|t| \rightarrow +\infty} t^r f(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} t^r \varphi_h(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} t^r \psi_h(t) = 0 \\ h = 1, 2, \dots, n-1. \end{array} \right.$$

Nella equazione (4) eseguiamo ora per $t > 0$ il cambiamento di variabili

$$\varphi = t^{-\frac{n-1}{2n-1}} \eta \quad , \quad \xi = \frac{2n-1}{2n} t^{\frac{2n}{2n-1}} .$$

Si avrà allora

$$\varphi^{(2n-1)} = \sum_0^{2n-1} \binom{2n-1}{h} D^{2n-1-h} t^{-\frac{n-1}{2n-1}} D_t^h \eta ,$$

e ⁸⁾

$$D_t^h \eta = h! \sum_1^h D_\xi^\nu \eta \left[\sum_{a_1, a_2, \dots} \frac{1}{a_1! a_2! \dots} \left(\frac{D\xi}{1!} \right)^{a_1} \left(\frac{D^2\xi}{2!} \right)^{a_2} \dots \right],$$

ove la somma entro parentesi quadre è da estendersi a tutte le scomposizioni di ν in numeri interi non negativi a_1, a_2, \dots , per le quali, oltre

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \nu,$$

sia anche

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots = h.$$

Per $\nu = 2n - 1$, dovrà essere $h = 2n - 1$, $a_1 = 2n - 1$. Il termine contenente $D^{2n-1} \eta$ è dunque

$$t^{-\frac{n-1}{2n-1}} (D\xi)^{2n-1} D_\xi^{2n-1} \eta = t^{1-\frac{n-1}{2n-1}} D_\xi^{2n-1} \eta,$$

mentre in generale i termini contenenti $D_\xi^\nu \eta$ saranno, a meno di un fattore numerico, della forma

$$\begin{aligned} D^{2n-1-h} t^{-\frac{n-1}{2n-1}} \left(\sum_{a_1, a_2, \dots} t^{a_1 \left(\frac{2n}{2n-1} - 1 \right) + a_2 \left(\frac{2n}{2n-1} - 2 \right) + \dots} \right) D_\xi^\nu \eta &= \\ = H_1 t^{1-\frac{n-1}{2n-1}} t^{-\frac{2n}{2n-1} (2n-1-\nu)} D_\xi^\nu \eta &= H_2 t^{1-\frac{n-1}{2n-1}} \xi^{-(2n-1-\nu)} D_\xi^\nu \eta, \end{aligned}$$

con H_1, H_2 costanti. Per $\nu = 2n - 2$, ponendo una prima volta $h = 2n - 2$, $a_1 = 2n - 2$ ed una seconda volta $h = 2n - 1$, $a_1 = 2n - 3$, $a_2 = 1$, si verifica subito che il cambiamento di variabili eseguito, similmente a quello usato da B. Pini nel caso $n = 2$ ⁹⁾, è tale da rendere nullo il coefficiente di $D_\xi^{2n-2} \eta$ nella espressione di $\varphi^{(2n-1)}$. Osservato poi che è $t\varphi = t^{1-\frac{n-1}{2n-1}} \eta$, dalla equazione (4) si trarrà la equa-

⁸⁾ Cfr. per es. HAUPT-AUMANN-PAUC. *Differential- und Integralrechnung*, II. Bd., 2. Aufl. Berlin. 1950: pp. 25-28.

⁹⁾ Cfr. op. cit. in ¹⁾ p. 294.

zione in τ

$$(4') \quad \eta^{(2n-1)}(\xi) + \sum_{\nu=1}^{2n-3} c_{\nu} \xi^{-(2n-1-\nu)} \eta^{(\nu)}(\xi) + [c_0 \xi^{-(2n-1)} - (-1)^n / 2n] \eta(\xi) = 0,$$

ove le c_{ν} , $\nu = 0, 1, \dots, 2n - 3$, sono opportune costanti. Le funzioni $\xi^{-(2n-\nu-1)}$, $\nu = 0, 1, \dots, 2n - 3$, sono poi tutte sommabili in $(1, +\infty)$, mentre la equazione

$$\lambda^{2n-1} - \frac{(-1)^n}{2n} = 0$$

ha tutte le sue $2n - 1$ radici $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}$ semplici. Per noti teoremi¹⁰⁾, la equazione (4') avrà $2n - 1$ integrali $\eta_1, \dots, \eta_{2n-1}$, linearmente indipendenti tali che

$$\eta_i^{(\nu)} = [\lambda_i^{\nu} + \omega_{i\nu}(\xi)] \exp(\lambda_i \xi),$$

$$i = 1, 2, \dots, 2n - 1, \nu = 0, 1, \dots, 2n - 2,$$

essendo $\omega_{i\nu}(\xi) = o(1)$ per $\xi \rightarrow +\infty$. È d'altra parte subito visto che fra le $2n - 1$ radici λ_i ve ne sono n la cui parte reale è negativa ed $n - 1$ con parte reale positiva, mentre nessuna avrà la parte reale nulla. Vi saranno dunque $2n - 1$ integrali reali linearmente indipendenti della (4'), che indicheremo ancora con τ_i per cui è

$$\eta_i^{(\nu)} = O(\exp(\operatorname{Re} \lambda_i \xi)), \quad \nu = 0, 1, \dots, 2n - 2,$$

n dei quali con $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$ ed $n - 1$ con $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$. In corrispondenza a questi vi saranno $2n - 1$ integrali $\tilde{\varphi}_i$ della (4), linearmente indipendenti, tali che

$$\tilde{\varphi}_i^{(\nu)} = O(\exp(\tilde{c} \operatorname{Re} \lambda_i \cdot t^{\frac{2n}{2n-1}})),$$

$$\nu = 0, 1, \dots, 2n - 2,$$

con \tilde{c} costante positiva opportuna.

¹⁰⁾ Cfr. per es. R. BELLMAN, *Stability theory of differential equations*, McGraw-Hill, 1953. Cap. 2.

In accordo con le (8), gli integrali f e φ_n , $h=1, 2, \dots, n-1$, della (4), trovati più sopra saranno allora combinazioni lineari delle sole n $\tilde{\varphi}_i$ cui corrispondono le $\text{Re } \lambda_i < 0$. Esisteranno perciò due costanti positive C e c , tali che per $t > 0$ risulta

$$(9_1) \quad \left. \begin{array}{l} |f^{(\nu)}(t)| \\ |\varphi_h^{(\nu)}(t)| \end{array} \right\} < C \exp \left(-ct^{\frac{2n}{2n-1}} \right),$$

$$h = 1, 2, \dots, n-1, \nu = 0, 1, \dots, 2n-2,$$

anzi, tenendo conto della (4), le stesse maggiorazioni varranno per ogni i non superiore ad un fissato arbitrario numero naturale. Analogamente per $t < 0$ riuscirà

$$(9_2) \quad \left. \begin{array}{l} |f^{(\nu)}(t)| \\ |\varphi_h^{(\nu)}(t)| \end{array} \right\} < C \exp \left(-ct^{\frac{2n}{2n-1}} \right),$$

$$h = 1, 2, \dots, n-1.$$

Abbiamo così provato che

I. Per ogni (ξ, η) è possibile costruire $2n-1$ funzioni $U(x, y; \xi, \eta)$, $V_h(x, y; \xi, \eta)$, $W_h(x, y; \xi, \eta)$, $h=1, 2, \dots, n-1$, definite per $y > \eta$ da

$$U(y, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(y-\eta)^{1/2n}} f \left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/2n}} \right),$$

$$V_h(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(y-\eta)^{1/2n}} \varphi_h \left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/2n}} \right),$$

$$W_h(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{(y-\eta)^{1/2n}} \psi_h \left(\frac{x-\xi}{(y-\eta)^{1/2n}} \right),$$

soluzioni della (2) in tutto il semipiano $y > \eta$ e tali che per esse valgano le maggiorazioni

$$(10) \quad \left. \begin{array}{l} |D_x^i D_y^j U| \\ |D_x^i D_y^j V_h| \\ |D_x^i D_y^j W_h| \end{array} \right\} < \frac{C}{(y-\eta)^{\frac{1+i+2nj}{2n}}} \exp \left(-c \frac{|x-\xi|^{\frac{2n}{2n-1}}}{(y-\eta)^{1/(2n-1)}} \right),$$

ove, se M è un arbitrario numero positivo fissato, è $\frac{x - \xi}{(y - \eta)^{1/2n}} > -M$ per le V_h ed $\frac{x - \xi}{(y - \eta)^{1/2n}} < M$ per le W_h ed i, j sono interi positivi non superiori ad un fissato arbitrario numero naturale, dal quale soltanto, oltre che da M , dipendono le costanti positive C e c .

Per la funzione $U(x, y; \xi, \eta)$, soluzione fondamentale dell'equazione $\mathcal{L}_0[u] = 0$, le maggiorazioni (10) erano già state ottenute, con metodo diverso, da O. A. Ladyzhenskaia¹¹). Si noti che, mentre la U e tutte le sue derivate possono essere prolungate con lo zero per $y \leq \eta$, ciò accade soltanto se è $x > \xi$ per le V_h e sue derivate e soltanto se è $x < \xi$ per la W_h e sue derivate.

Ragionamenti perfettamente analoghi a quelli usati da B. Pini¹²), consentono ora, fondandosi sui risultati ottenuti più sopra, di provare che

II. Se $\omega(y)$, $0 \leq y \leq 1$ è una funzione continua ed $x = \chi(y)$ è hölderiana di ordine $> 1/n$ in $0 \leq y \leq 1$, risulta

$$(11_1) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (\chi(s), s)} \int_0^y D_x^{n-1} D_\xi^n U(x, y; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta = \\ = \pm \frac{\pi}{2} \omega(s) + \int_0^s D_x^{n-1} D_\xi^n U(\chi(z), z; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta$$

ove si prenderà il segno $+$ od il segno $-$ secondochè è $x > \chi(y)$ od $x < \chi(y)$; ed inoltre

$$(11_2) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (\chi(s), s)} \int_0^y D_x^{n-1} D_\xi^n V_h(x, y; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta = \\ = \omega'(s) \int_0^{+\infty} \varphi_h dt + \int_0^s D_x^{n-1} D_\xi^n V_h(\chi(z), z; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta$$

¹¹) Cfr. op. cit in ²). Cfr. pure S. D. EIDELMAN, *Limitazioni per le soluzioni di sistemi parabolici ed alcune loro applicazioni*. Mat. Sbornik, 33 (75) (1953).

¹²) Cfr. op. cit. in ¹), pp. 265-71.

se è $x > \chi(y)$ e

$$(11_3) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (\chi(x), z)} \int_0^y D_x^{n-1} D_\xi^n W_h(x, y; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta = \\ = -\omega(z) \int_0^{+\infty} \varphi_h dt + \int_0^z D_x^{n-1} D_\xi^n W_h(\chi(z), z; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta$$

se è $x < \chi(y)$, $h = 1, 2, \dots, n-1$.

Le funzioni

$$\int_0^y U(x, y; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta, \quad \int_0^y V_h(x, y; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta, \\ \int_0^y W_h(x, y; \chi(\eta), \eta) \omega(\eta) d\eta, \quad h = 1, 2, \dots, n-1,$$

e le loro derivate rispetto a ξ , forniscono dunque dei potenziali di linea analoghi a quelli relativi all'equazione del calore (caso $n=1$).

2. Risoluzione del problema (1).

Qui e nel seguito supporremo che le funzioni $\chi_j(y)$, $j=1, 2$, siano continue con le loro derivate prime in $0 \leq y \leq 1$. Indichiamo con \mathfrak{D}_η la parte di \mathfrak{D} contenuta nel semipiano $y \leq \eta$. Applicando ripetutamente la formula di Green-Gauss alla funzione $u \mathcal{L}_0 |u|$ in un dominio interno a \mathfrak{D}_η e facendo poi tendere tale dominio a \mathfrak{D}_η , si vede facilmente che il problema (1) ammette al più una sola soluzione, continua in \mathfrak{D} con tutte le sue derivate rispetto ad x fino a quella di ordine $2n-1$.

Supposto $\varphi_0(x)$ continua in $\chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0)$, potremo sempre ricondurci al caso in cui sia $\varphi_0(x) \equiv 0$. Pensata infatti la $\varphi_0(x)$ prolungata con la stessa regolarità nell'intervallo $a_1 < \chi_1(0) \leq x \leq \chi_2(0) < a_2$, la funzione

$$u_0(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{a_1}^{a_2} U(x, y; \xi, 0) \varphi_0(\xi) d\xi$$

è continua in \mathfrak{D} , soddisfa all'equazione $\mathcal{L}_0 |u| = 0$ in

$\mathfrak{D} - C_0 - \gamma_1 - \gamma_2$ ed assume su C_0 i valori φ_0 . Supporremo poi che le φ_{ij} , $j=1, 2, i=0, 1, \dots, n-2$ siano continue con le loro derivate prime in $0 \leq y \leq 1$ e siano nulle per $y=0$, e che le $\varphi_{n-1, j}$, $j=1, 2$, siano continue nello stesso intervallo. Cerchiamo di risolvere il problema (1) con una funzione del tipo

$$\begin{aligned}
 (12) \quad u(x, y) = & \sum_1^2 \int_0^y D_{\xi}^n U(x, y; \chi_k(\eta), \eta) \delta_k(\eta) d\eta + \\
 & + \sum_1^{n-1} \left[\int_0^y D_{\xi}^n V_h(x, y; \chi_1(\eta), \eta) \beta_h(\eta) d\eta + \right. \\
 & \left. + \int_0^y D_{\xi}^n W_h(x, y; \chi_2(\eta), \eta) \gamma_h(\eta) d\eta \right].
 \end{aligned}$$

Per le condizioni al contorno imposte dal problema alla u ed alle sue prime $n-2$ derivate rispetto ad x , dovrà essere, in $0 \leq y \leq 1$

$$\begin{aligned}
 & \sum_1^2 \int_0^y \frac{(-1)^n}{(y-\eta)^{2n}} f^{(n+i)} \left(\frac{\chi_j(y) - \chi_k(\eta)}{(y-\eta)^{1/2n}} \right) \delta_k(\eta) d\eta + \\
 & + \sum_1^{n-1} \left[\int_0^y \frac{(-1)^n}{(y-\eta)^{2n}} \varphi_k^{(n+i)} \left(\frac{\chi_j(y) - \chi_1(\eta)}{(y-\eta)^{1/2n}} \right) \beta_h(\eta) d\eta + \right. \\
 & \left. + \int_0^y \frac{(-1)^n}{(y-\eta)^{2n}} \psi_h^{(n+i)} \left(\frac{\chi_j(y) - \chi_2(\eta)}{(y-\eta)^{1/2n}} \right) \gamma_h(\eta) d\eta \right] = \varphi_{ij}(y), \\
 & j = 1, 2, \quad i = 0, 1, \dots, n-2.
 \end{aligned}$$

Moltiplicando queste equazioni per $(z-y)^{-\frac{n-i-1}{2n}}$, indi integrandone ambo i membri rispetto ad y da 0 a z e poi derivandoli rispetto a z , dopo aver eseguito una inversione nell'ordine delle integrazioni, si avrà

$$\sum_1^2 \frac{d}{dz} \int_0^z \delta_k(\eta) d\eta \int_{\eta}^z \frac{(-1)^n}{(z-y)^{\frac{n-i-1}{2n}} (y-\eta)^{\frac{n+i-1}{2n}}} f^{(n+i)} \left(\frac{\chi_j(y) - \chi_k(\eta)}{(y-\eta)^{1/2n}} \right) dy +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_k^{n-1} \left[\frac{d}{dz} \int_0^y \beta_k(\eta) d\eta \int_{\eta}^z \frac{(-1)^n}{(z-y)^{\frac{n-i-1}{2n}} (y-\eta)^{\frac{n+i+1}{2n}}} \varphi_h^{(n+i)} \left(\frac{\chi_j(y) - \chi_1(\eta)}{(y-\eta)^{1/2n}} \right) dy + \right. \\
& \quad + \frac{d}{dz} \int_0^y \gamma_k(\eta) d\eta \int_{\eta}^z \frac{(-1)^n}{(z-y)^{\frac{n-i-1}{2n}} (y-\eta)^{\frac{n+i+1}{2n}}} \cdot \\
& \quad \left. \cdot \psi_h^{(n+i)} \left(\frac{\chi_j(y) - \chi_2(\eta)}{(y-\eta)^{1/2n}} \right) dy \right] = \int_0^z \frac{\varphi'_{ij}(y)}{(z-y)^{\frac{n-i-1}{2n}}} dy, \\
& \qquad \qquad \qquad j = 1, 2; \quad i = 0, 1, \dots, n-2.
\end{aligned}$$

Indicata poi con L_i , $i = 0, 1, \dots, n-2$, la costante

$$\int_{\eta}^z \frac{(-1)^n dy}{(z-y)^{\frac{n-i-1}{2n}} (y-\eta)^{\frac{n+i+1}{2n}}} = \frac{(-1)^n \pi}{\operatorname{sen}(n-i-1) \frac{\pi}{2n}},$$

risulterà, tenuto conto delle (9₁) e (9₂)

$$\lim_{\eta \rightarrow z-} \int_{\eta}^z \frac{(-1)^n}{(z-y)^{\frac{n-i-1}{2n}} (y-\eta)^{\frac{n+i+1}{2n}}} \cdot f^{(n+i)} \left(\frac{\chi_j(y) - \chi_k(\eta)}{(y-\eta)^{1/2n}} \right) dy = \begin{cases} L_i f^{(n+i)}(0) & \text{se } j = k \\ 0 & \text{se } j \neq k, \end{cases}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow z-} \int_{\eta}^z \frac{(-1)^n}{(z-y)^{\frac{n-i-1}{2n}} (y-\eta)^{\frac{n+i+1}{2n}}} \cdot \varphi_h^{(n+i)} \left(\frac{\chi_j(y) - \chi_1(\eta)}{(y-\eta)^{1/2n}} \right) dy = \begin{cases} L_i \varphi_h^{(n+i)}(0) & \text{se } j = 1 \\ 0 & \text{se } j = 2, \end{cases}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow z-} \int_{\eta}^z \frac{(-1)^n}{(z-y)^{\frac{n-i-1}{2n}} (y-\eta)^{\frac{n+i+1}{2n}}} \cdot \psi_h^{(n+i)} \left(\frac{\chi_j(y) - \chi_2(\eta)}{(y-\eta)^{1/2n}} \right) dy = \begin{cases} 0 & \text{se } j = 1 \\ L_i \psi_h^{(n+i)}(0) & \text{se } j = 2, \end{cases}$$

per ogni $i=0, 1, \dots, n-2$. Si giunge così, tenuto conto delle (7), alle $2n-2$ equazioni integrali di seconda specie

$$\begin{aligned}
 & L_i f^{(n+i)}(0) \delta_j(z) + L_i \sum_1^{n-1} \varphi_h^{(n+i)}(0) \left[\frac{1 + (-1)^{j-1}}{2} \beta_h(z) + (-1)^{n+i} \cdot \right. \\
 & \left. \frac{1 + (-1)^j}{2} \gamma_h(z) \right] + \sum_1^2 \int_0^z \delta_h(\eta) d\eta \frac{\partial}{\partial z} \int_\eta^z \frac{(-1)^n}{(z-y)^{\frac{n-i-1}{2n}} (y-\eta)^{\frac{n+i+1}{2n}}} \cdot \\
 (13) \quad & \cdot f^{(n+1)} \left(\frac{\chi_j(y) - \chi_h(\eta)}{(y-\eta)^{1/2n}} \right) dy + \sum_1^{n-1} \left[\int_0^z \beta_h(\eta) d\eta \cdot \right. \\
 & \left. \frac{\partial}{\partial z} \int_\eta^z \frac{(-1)^n}{(z-y)^{\frac{n-i-1}{2n}} (y-\eta)^{\frac{n+i+1}{2n}}} \varphi_h^{(n+i)} \left(\frac{\chi_j(y) - \chi_1(\eta)}{(y-\eta)^{1/2n}} \right) dy + \int_0^z \gamma_h(\eta) d\eta \cdot \right. \\
 & \left. \frac{\partial}{\partial z} \int_\eta^z \frac{(-1)^n}{(z-y)^{\frac{n-i-1}{2n}} (y-\eta)^{\frac{n+i+1}{2n}}} \psi_h^{(n+i)} \left(\frac{\chi_j(y) - \chi_2(\eta)}{(y-\eta)^{1/2n}} \right) dy \right] = \\
 & = \int_0^z \frac{\varphi'_{ij}(y)}{(z-y)^{\frac{n-i-1}{2n}}} dy,
 \end{aligned}$$

$$j = 1, 2, \quad i = 0, 1, \dots, n-2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

La condizione al contorno imposta dal problema alla $D_x^{n-1}u$, conduce poi, per II., alle due equazioni integrali di seconda specie

$$\begin{aligned}
 & \frac{\pi}{2} (-1)^{j-1} \delta_j(z) + \sum_1^{n-1} \left[\frac{1 + (-1)^{j-1}}{2} \beta_h(z) - \frac{1 + (-1)^j}{2} \gamma_h(z) \right] \int_0^{+\infty} \varphi_h dt + \\
 (14) \quad & + \sum_1^2 \int_0^z D_x^{n-1} D_\xi^n U(\chi_j(z), z; \chi_h(\eta), \eta) \delta_h(\eta) d\eta + \\
 & + \sum_1^{n-1} \left[\int_0^z D_x^{n-1} D_\xi^n V_h(\chi_j(z), z; \chi_1(\eta), \eta) \beta_h(\eta) d\eta + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \int_0^z D_x^{n-1} D_{\xi}^n W_h(\chi_j(z), z; \chi_z(\eta), \eta) \gamma_h(\eta) d\eta \Big] = \varphi_{n-1, j}(z),$$

$$j = 1, 2, \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Abbiamo così tradotto il problema considerato nel sistema (13)-(14) di $2n$ equazioni integrali di seconda specie, nelle $2n$ funzioni incognite $\delta_j, j = 1, 2, \beta_h, \gamma_h, h = 1, \dots, n - 1$.

Mostriamo che il determinante dei coefficienti di tali funzioni incognite è diverso da zero. Tenuto conto che $f^{(n+i)}(0) = 0$ se $n + i$ è dispari, esso potrà scriversi, a meno di un fattore non nullo

$$(15) \begin{vmatrix} f^{(n)}(0) & \varphi_1^{(n)}(0) & \dots & \varphi_{n-1}^{(n)}(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f^{(n)}(0) & \varphi_1^{(n)}(0) & \dots & \varphi_{n-1}^{(n)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(n-i)}(0) & \varphi_1^{(n+i)}(0) & \dots & \varphi_{n-1}^{(n+i)}(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f^{(n-i)}(0) & \varphi_1^{(n-i)}(0) & \dots & \varphi_{n-1}^{(n+i)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(2n-2)}(0) & \varphi_1^{(2n-2)}(0) & \dots & \varphi_{n-1}^{(2n-2)}(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & f^{(2n-2)}(0) & \varphi_1^{(2n-2)}(0) & \dots & \varphi_{n-1}^{(2n-2)}(0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^{+\infty} f dt & \int_0^{+\infty} \varphi_1 dt & \dots & \int_0^{+\infty} \varphi_{n-1} dt & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \int_0^{+\infty} f dt & \int_0^{+\infty} \varphi_1 dt & \dots & \int_0^{+\infty} \varphi_{n-1} dt \end{vmatrix}$$

A meno del segno, questo determinante è d'altra parte eguale

al quadrato del determinante

$$\begin{array}{ccc}
 f^{(n)}(0) & \varphi_1^{(n)}(0) & \dots \varphi_{n-1}^{(n)}(0) \\
 \dots & \dots & \dots \\
 f^{(n+i)}(0) & \varphi_1^{(n+i)}(0) & \dots \varphi_{n-1}^{(n+i)}(0) \\
 \dots & \dots & \dots \\
 f^{(2n-2)}(0) & \varphi_1^{(2n-2)}(0) & \dots \varphi_{n-1}^{(2n-2)}(0) \\
 \int_0^{+\infty} f dt & \int_0^{+\infty} \varphi_1 dt & \dots \int_0^{+\infty} \varphi_{n-1} dt
 \end{array}$$

Osserviamo ora che, per le (9₁), con successive integrazioni per parti si ha, qualunque siano i numeri naturali m e ν

$$f^{(\nu)}(0) = \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^{+\infty} t^m f^{(\nu-m+1)}(t) dt,$$

$$\varphi_h^{(\nu)}(0) = \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \int_0^{+\infty} t^m \varphi_h^{(\nu+m+1)}(t) dt,$$

$$h = 1, \dots, n - 1,$$

e quindi, poichè le f e φ_h sono soluzioni della (4), scelto $m = 2n - \nu - 2$, anche

$$f^{(\nu)}(0) = \frac{(-1)^{2n-\nu-1}}{2n(2n-\nu-2)!} \int_0^{+\infty} t^{2n-\nu-1} f(t) dt,$$

$$\varphi_h^{(\nu)}(0) = \frac{(-1)^{2n-\nu-1}}{2n(2n-\nu-2)!} \int_0^{+\infty} t^{2n-\nu-1} \varphi_h(t) dt,$$

$$h = 1, 2, \dots, n - 1.$$

L'ultimo determinante scritto sarà allora eguale, a meno di

un fattore non nullo, al determinante

$$\begin{vmatrix} \int_0^{+\infty} t^{n-1} f(t) dt & \int_0^{+\infty} t^{n-1} \varphi_1(t) dt & \dots & \int_0^{+\infty} t^{n-1} \varphi_{n-1}(t) dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^{+\infty} t^{n-i-1} f(t) dt & \int_0^{+\infty} t^{n-i-1} \varphi_1(t) dt & \dots & \int_0^{+\infty} t^{n-i-1} \varphi_{n-1}(t) dt \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_0^{+\infty} f(t) dt & \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) dt & \dots & \int_0^{+\infty} \varphi_{n-1}(t) dt \end{vmatrix}$$

Se questo allora fosse nullo, una delle sue colonne, per es. la prima, sarebbe combinazione lineare delle altre e si avrebbe

$$\int_0^{+\infty} \left(f - \sum_1^{n-1} c_h \varphi_h \right) t^m dt = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1$$

con c_h costanti. Da queste eguaglianze, con successive integrazioni per parti, tenendo conto che anche $f - \sum_1^{n-1} c_h \varphi_h$ è soluzione della (4), si otterrebbe al modo seguito più sopra, che è pure

$$\int_0^{+\infty} \left(f - \sum_1^{n-1} c_h \varphi_h \right) t^{m+2nk} dt = 0,$$

ossia

$$(16) \quad \int_0^{+\infty} e^t \left(f - \sum_1^{n-1} c_h \varphi_h \right) e^{-t} t^{m+2nk} dt = 0,$$

$$m = 0, 1, \dots, n-1, \quad k = 0, 1, \dots$$

D'altra parte, come mostreremo subito, il sistema $\{e^{-t} t^{m+2nk}\}$, $m = 0, 1, \dots, n-1, k = 0, 1, \dots$, è completo in $L(0, +\infty)$ e

quindi poichè $e^t(f - \sum_1^{n-1} c_h \varphi_h)$ è misurabile e limitata in $(0, +\infty)$ dalle (16) seguirebbe necessariamente $f - \sum_1^{n-1} c_h \varphi_h \equiv 0$ in $(0, +\infty)$, il che è impossibile poichè le f e $\varphi_h, h = 1, \dots, n-1$, sono soluzioni linearmente indipendenti della (4). Neppure il determinante (15) può quindi essere nullo.

La completezza del sistema $\{e^{-t}t^{m+2nk}\}$ ora considerato, segue da un teorema di W. H. J. Fuchs¹³⁾, secondo cui, indicata con $\{\lambda_n\}$ una successione di numeri positivi non necessariamente interi e con $N(t)$ il numero dei λ_n non superiori a t , il sistema $\{e^{-ct}t_n\}, c > 0$, è completo in $L^p(0, +\infty), 1 \leq p \leq +\infty$, se esiste una costante A tale che

$$N(t) \geq t/2 - A.$$

Nel nostro caso risulta infatti, indicando con $[t]$ il massimo intero contenuto in t ,

$$N(t) = \begin{cases} [t] + 1 - kn & \text{in } 2nk \leq t \leq (2k+1)n - 1 \\ n(k+1) & \text{in } (2k+1)n - 1 \leq t < 2n(k+1), k=0, 1, \dots \end{cases}$$

e quindi $N(t) \geq t/2$.

Denotando con $a(z)$ il vettore di componenti $\delta_1(z), \delta_2(z), \beta_h(z), \gamma_h(z), h = 1, \dots, n-1$, il sistema (13)-(14) può allora scriversi nella forma

$$a(z) + \int_0^z K(z, \eta) a(\eta) d\eta = b(z)$$

ove $b(z)$ è un vettore a componenti continue, mentre $K(z, \eta)$ è una matrice nucleare i cui elementi sono al più $O((z - \eta)^{-1/2n})$,

¹³⁾ W. H. J. FUCHS, *A theorem on finite differences with an application to the theory of Hausdorff summability*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 40 (1944); *On the closure of $\{e^{-t}t^n\}$* , Proc. Cambridge Philos. Soc., 42 (1946). Cfr. anche R. P. BOAS, *Density theorems for power series and complete sets*, Trans. Amer. Math. Soc., 61 (1947).

come si prova in modo perfettamente analogo a quanto fatto da B. Pini nel caso $n=2$ ¹⁴). Il problema (1) ha dunque una soluzione del tipo (12).

Se supponiamo che anche $\varphi_{n-1,j}$, $j=1, 2$, sia continua con la sua derivata prima in $0 \leq y \leq 1$ e sia nulla per $y=0$, potremo anche determinare una soluzione del problema considerato del tipo

$$(12') \quad u(x, y) = \sum_1^2 \int_0^y U(x, y; \chi_k(\eta), \eta) \delta_k(\eta) d\eta + \\ + \sum_1^{n-1} \left[\int_0^y V_k(x, y; \chi_1(\eta), \eta) \beta_k(\eta) d\eta + \right. \\ \left. + \int_0^y W_k(x, y; \chi_2(\eta), \eta) \gamma_k(\eta) d\eta \right],$$

utilizzando ragionamenti analoghi ai precedenti. Tale soluzione riuscirà continua in \mathfrak{D} assieme alle sue prime $2n-1$ derivate rispetto ad x . Da ciò discende la possibilità di costruire una funzione di Green per il problema dato relativa al dominio \mathfrak{D} , nonchè di stabilire, con un semplice ragionamento¹⁵), l'unicità della soluzione (12) per il problema (1) sotto le ipotesi inizialmente indicate.

Possiamo dunque concludere, intendendo sempre il problema in senso ordinario, che

III. Il problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathfrak{L}_0[u] = 0 & \text{in } \mathfrak{D} - C_0 - \gamma_1 - \gamma_2, \\ u = 0 & \text{su } C_0 \\ D_{x^i}^i u = \varphi_{ij}(y) & \text{su } \gamma_j, j=1, 2, \quad i=0, 1, \dots, n-1, \end{array} \right.$$

¹⁴) Cfr. op. cit. in ¹) pp. 274-77.

¹⁵) Cfr. B. PINI, op. cit. in ¹), nota ⁸) p. 277.

ha una soluzione del tipo (12), se le $\varphi_{ij}(y)$, $j=1, 2, i=0, 1, \dots, n-2$, nulle per $y=0$ sono continue con le derivate prime in $0 \leq y \leq 1$, le $\varphi_{n-1,j}$, $j=1, 2$, sono continue nello stesso intervallo e le $\chi_j(y)$, $j=1, 2$, sono dotate di derivate prime continue in $0 \leq y \leq 1$. In queste ipotesi tale soluzione è poi anche l'unica soluzione del problema considerato.

Osserviamo inoltre che se il dato dominio \mathfrak{D} è il dominio rettangolare T , $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq h$, con considerazioni simili a quelle usate da B. Pini nel caso $n=2$ ¹⁶⁾ è possibile provare che

III'. Se è $\varphi_0^{(2n)} \in H^{(\lambda)}$ in $0 \leq x \leq 1$, $\varphi'_0 \in H^{(\lambda/2n)}$, $j=1, 2$ e $\varphi_{ij} \in H^{\left(\frac{2n+\lambda-i}{2n}\right)}$, $j=1, 2, i=1, 2, \dots, n-1$, in $0 \leq y \leq h$, con $0 < \lambda < 1$, e sono soddisfatte opportune condizioni di raccordo dei dati nei punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$, si può costruire una soluzione u del problema (1) tale che $D_x^i u \in H^{\left(\frac{2n+\lambda-i}{2n}\right)}_y$, $i=1, 2, \dots, 2n-1$, $D_x^{2n} u, D_y u \in H^{(\lambda/2n)}$ in T ¹⁷⁾.

3. Problemi per l'equazione completa. Equazioni non lineari.

Consideriamo ora il problema (1), ponendo in luogo della equazione ridotta l'equazione completa

$$\mathcal{L}[u] = \sum_0^{2n} a_i(x, y) D_x^i u + (-1)^n D_y u = f(x, y)$$

¹⁶⁾ Cfr. 1ª op. cit. in 4) pp. 152-54.

¹⁷⁾ Se è $0 < \mu < 1$, con la scrittura $\varphi(t) \in H^{(\mu)}$ in $a \leq t \leq b$, intendiamo che $\varphi(t)$ soddisfi nell'intervallo indicato ad una condizione di Hölder di esponente μ : con la scrittura $\varphi(x, y) \in H_1^{(\mu)}_y$ in T , intendiamo che τ sia in T hölderiana rispetto ad y di esponente μ uniformemente rispetto ad x e sia dotata di derivata prima rispetto ad x continua in T ; con $\varphi(x, y) \in H^{(\lambda, \lambda/2n)}$ in T intendiamo infine che la φ sia in T hölderiana rispetto ad x di esponente λ , uniformemente rispetto ad y ed hölderiana rispetto ad y di esponente $\lambda/2n$ uniformemente rispetto ad x . In quest'ultimo caso porremo poi

$$|\varphi|_{\lambda}^T = \text{estr. sup} \frac{|\varphi(x'', y'') - \varphi(x', y')|}{|x'' - x'|^{\lambda} + |y'' - y'|^{\lambda/2n}}, (x'', y''), (x', y') \in T.$$

con $a_{2n} > 0$ in \mathfrak{D} . Se le funzioni $\chi_j(y)$, $j=1, 2$, sono dotate di derivate prime continue in $0 \leq y \leq 1$, il cambiamento di variabili

$$\xi = \frac{x - \chi_1(y)}{\chi_2(y) - \chi_1(y)} \quad \eta = \int_0^y \frac{dt}{[\chi_2(t) - \chi_1(t)]^{2n}},$$

muta la equazione $\mathcal{L}[u] = 0$ in una equazione dello stesso tipo ed il dominio \mathfrak{D} nel dominio rettangolare T . $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq h$ ($h = \int_0^1 [\chi_2(t) - \chi_1(t)]^{-2n} dt$). Gli archi γ_1 e γ_2 si trasformeranno allora nei segmenti $x=0$, $0 \leq y \leq h$ e $x=1$, $0 \leq y \leq h$ rispettivamente ed il segmento C_0 nel segmento $y=0$, $0 \leq x \leq 1$. *Tratteremo pertanto il problema (1) per l'equazione completa relativamente al dominio rettangolare T ; supporremo inoltre che sia $a_i(x, y)$, $i=0, 1, \dots, 2n$. $f(x, y) \in H^{(2, 2)/2n}$ in T .*

Se le funzioni $\varphi_0(x)$, $\varphi_{ij}(y)$ $j=1, 2$, $i=0, 1, \dots, n-1$, soddisfano alle condizioni indicate in III', potremo sempre ricondurci al caso in cui è $\varphi_0 \equiv \varphi_{ij} \equiv 0$, $j=1, 2$, $i=0, 1, \dots, n-1$. Utilizzando i risultati dei nn. precedenti, l'esistenza di una soluzione del problema in questo caso si potrà provare con lo stesso metodo usato da B. Pini¹⁸⁾ per il corrispondente problema con $n=2$. Si potrà infatti anche qui costruire una funzione compensatrice $G(P, Q)$, continua, con tutte le derivate che figurano in \mathcal{L} , in $T - C_0 - \gamma_1 - \gamma_2$, tale che, se con $U(Q; P, Q)$ indichiamo la funzione che si ottiene dalla $U(P, Q) \equiv U(x, y; \xi, \eta)$ ponendo $a_{2n}(\xi, \eta)(y - \eta)$ in luogo di $y - \eta$, la $U(Q; P, Q) - G(P, Q)$ tenda a zero se P dall'interno di T tende ad un punto di $C_0 + \gamma_1 + \gamma_2$ e le sue prime $n-1$ derivate rispetto ad x tendano a zero se P tende ad un punto di $\gamma_1 + \gamma_2$. Per tale funzione compensatrice si possono pro-

¹⁸⁾ Cfr. op. cit. in ¹⁾ pp. 290-97. La esistenza in questione è ivi provata nella ipotesi che i coefficienti a_i di \mathcal{L} siano continui in T con le loro derivate prime, ma la dimostrazione che ne è data si estende facilmente nelle ipotesi qui fatte.

vare le formule di maggiorazione

$$(17) \quad |D_x^i G(P, Q)| < \frac{K}{(y - \eta)^{\frac{1+i}{2m}}} \exp \left[-c \frac{|x - \xi|^{\frac{2m}{2m-1}}}{(y - \eta)^{1/(2m-1)}} \right], \quad 0 \leq i \leq 2n,$$

con K e c costanti positive.

Una soluzione del problema sarà allora data da

$$(18) \quad u(P) = \iint_{T_y} [U(Q; P, Q) - G(P, Q)] \psi(Q) dQ,$$

($T_y \cdot 0 \leq \xi \leq 1. \quad 0 \leq \eta \leq y$)

con $\psi(Q)$ soluzione della equazione integrale

$$\pi \psi(P) + \iint_{T_y} \mathcal{L}[U(Q; P, Q) - G(P, Q)] \psi(Q) dQ = f(P).$$

Si prova poi, fondandosi sulle formule di maggiorazione (10)

e (17), che è $D_x^i u \in H_1^{\left(\frac{2m+\lambda-i}{2m}\right)_y}$, $i=1, 2, \dots, 2n-1$, $D_x^{2m} u$, $D_y u \in H^{(\lambda, \lambda/2m)}$ in T . La soluzione espressa da (18) è poi l'unica soluzione del problema per cui sia $D_x^{2m} u$, $D_y u \in H^{(\lambda, \lambda/2m)}$ in T . Ciò si prova ripetendo, con mutamenti facilmente comprensibili, i ragionamenti di B. Pini¹⁹⁾ e quelli contenuti in un mio recente lavoro²⁰⁾. Si avrà dunque che

IV. *Se le φ_0 e φ_{ij} , $j=1, 2, i=0, 1, \dots, n-1$, soddisfano alle condizioni indicate in III'. ed è $a_i(x, y), f(x, y) \in H^{(\lambda, \lambda/2m)}$ in T , esiste una ed una sola soluzione $u(x, y)$ del problema (1) per l'equazione $\mathcal{L}[u] = f$, tale che $D_x^i u \in H_1^{\left(\frac{2m+\lambda-i}{2m}\right)_y}$, $i=1, 2, \dots, 2n-1$, $D_x^{2m} u$, $D_y u \in H^{(\lambda, \lambda/2m)}$ in T ; tale soluzione è fornita dalla (18).*

Per l'equazione completa $\mathcal{L}[u] = f$ si potrà poi trattare anche un problema del tipo (1) in cui i dati al contorno si

¹⁹⁾ Cfr. op. cit. in 1) pp. 262-63.

²⁰⁾ Cfr. 3^a op. cit. in 4) pp. 48-53, Teorema C.

intendano però assunti in un senso generalizzato analogo a quello usato da G. Cimmino nello studio del problema di Dirichlet per equazioni ellittiche del secondo ordine ²¹⁾, come pure i casi in cui la f si supponga soltanto continua o soltanto di quadrato sommabile in T . Il metodo usato ed i risultati ottenuti per tali problemi nel caso $n=2$ in un mio precedente lavoro ²²⁾, si estendono senz'altro al caso generale con facili modifiche.

Si potranno stabilire anche formule di maggiorazione per le soluzioni del problema

$$(1') \quad \begin{cases} \mathcal{L}[u] = f & \text{in } T - C_0 - \gamma_1 - \gamma_2, \\ u = 0 & \text{su } C_0 + \gamma_1 + \gamma_2, \\ D_x^i u = 0 & \text{su } \gamma_1 + \gamma_2, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

analoghe a quelle che ho recentemente provate per il caso $n=2$ ²³⁾.

Così per esempio, se indichiamo con $|a|_\lambda^T$ la più grande delle quantità $|a_i|_\lambda^T$, e con \mathcal{A} la più grande delle $\mathcal{A}_i = \max_T |a_i|$, $i=0, 1, \dots, 2n$, risulterà che

V. *Esiste una costante positiva L , dipendente da $T, \lambda, \mathcal{A}, 1/\min_T a_{2n}$, limitata al variare di \mathcal{A} e $1/\min_T a_{2n}$ in un arbitrario intervallo limitato, tale che per ogni soluzione $u(x, y)$ del problema (1'), con $a_i, i=0, 1, \dots, 2n, f \in H^{(\lambda, \lambda/2n)}$ in T ed $f(0, 0) = f(1, 0) = 0$, per cui sia $D_x^{2n} u, D_y u \in H^{(\lambda, \lambda/2n)}$ in T , risulta*

$$\begin{aligned} & |D_x^{2n} u|_\lambda^T + |D_y u|_\lambda^T < \\ & < L \{ (|a|_\lambda^T + 1) (\max_T |u| + \max_T |D_x^{2n} u| + \max_T |f|) + |f|_\lambda^T \}. \end{aligned}$$

²¹⁾ G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet*. Rend. Circ. Mat. Palermo, 61 (1937); Cfr. pure, per altri problemi di questo tipo, C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*. Springer, 1955.

²²⁾ Cfr. 2^a op. cit. in ¹⁾.

²³⁾ Cfr. 3^a e 4^a op. cit. in ¹⁾. teoremi B. e D.

In modo analogo si enunciano nel caso generale, anche le altre formule di maggiorazione per le soluzioni del problema (1') valide nel caso $n = 2$.

Questi risultati consentono di ottenere *teoremi di esistenza ed unicità per la soluzione del problema (1), per equazioni non lineari del tipo*

$$F(x, y, u, D_x u, \dots, D_x^{2n} u, D_y u) = 0, \quad \text{in } T - C_0 - \gamma_1 - \gamma_2,$$

con $(-1)^n \frac{\partial F}{\partial D_x^{2n} u} \cdot \frac{\partial F}{\partial (D_y u)} > 0$ in T , come pure per le equazioni quasi lineari

$$\sum_j^{2n} a_j(x, y, u, \dots, D_x^i u) D_x^j u + (-1)^n D_y u = f(x, y, u, \dots, D_x^i u),$$

con $a_{2n} > 0$ in T , $i = 0, 1, \dots, 2n - 1$, con lo stesso metodo da me utilizzato nel caso $n = 2$ ²⁴).

Eguualmente debbono ritenersi estesi alle corrispondenti equazioni non lineari di ordine $2n$, i risultati provati da B. Pini nel caso $n = 2$ ²⁵).

²⁴) Cfr. 3^a e 4^a op. cit. in ⁴). teoremi A., A', A₁.

²⁵) Cfr. 1^a op. cit. in ⁴).