RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FABIO MANARESI

Su alcuni problemi relativi ad equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolo-parabolico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 348-375

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__348_0>

SU ALCUNI PROBLEMI RELATIVI AD EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI DI TIPO IPERBOLO-PARABOLICO

Nota (*) *di* FABIO MANARESI (*a Bologna*)

INTRODUZIONE

1. - Nella prima parte del presente lavoro vengono risolti alcuni problemi ben posti per l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{1}$$

dei quali i primi due costituiscono naturali estensioni alla (1) di classici problemi relativi all'equazione iperbolica $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$.

Precisamente si dimostra che in un dominio rettangolare R esiste un'unica soluzione della (1) che soddisfa a condizioni di tipo analitico o quasi analitico e ad una delle seguenti:

A) si riduce ad assegnate funzioni su una faccia di R parallela al piano xt e su una superficie cilindrica contenuta in R, con generatrici parallele all'asse t e incontrata in un sol punto dalle rette, parallele all'asse x, aventi un segmento in comune con R (n. 2);

B) si riduce, insieme con le derivate parziali prime rispetto a x e a y, a date funzioni su una superficie cilin-

---

(*) Pervenuta in redazione il 16 ottobre 1958.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico. Università, Bologna.

drica contenuta in R, con generatrici parallele all'asse t, passante per due spigoli opposti di R e incontrata in un sol punto dalle rette, parallele a ciascuno degli assi x e y, aventi un segmento in comune con R (n. 3);

C) si riduce ad una assegnata funzione su una delle facce di R parallele al piano xy (n. 4).

Questi risultati valgono qualunque siano le dimensioni di R, oppure se almeno una di esse è abbastanza piccola, secondochè per la soluzione cercata si richiedono condizioni di analiticità, o di quasi analiticità, più o meno ristrette.

L'asserto A), nel caso in cui la superficie cilindrica si riduce ad una faccia di R parallela al piano yt, trovasi anche in una nota di Piscounov[1]: ma le più forti maggiorazioni colà adottate portano a dover supporre abbastanza piccole le prime due dimensioni del dominio, onde, con eguale restrizione, deve intendersi un teorema di sola unicità di un integrale regolare in R dimostrato dal suddetto Autore mediante un algoritmo che fa uso del risultato particolare testè richiamato.

Anche nel caso C) l'unicità viene a mancare se non si richiedono integrali soggetti a condizioni di analiticità abbastanza ristrette.

Nella seconda parte vengono esaminati alcuni problemi ben posti per l'equazione

$$\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2}$$

e i risultati ottenuti si possono così riassumere.

In un dominio rettangolare R esiste un'unica soluzione della (2) che verifica condizioni di tipo analitico o quasi analitico e una delle seguenti:

A) si riduce ad assegnate funzioni sulle quattro facce di R parallele all'asse t (n. 5);

---

[1]) N. PISCOUNOV, *Le problème aux limites pour l'équation aux dérivées partielles du type hyperbolo-parabolique*, « Rec. math. Moscou », N. s. 3 (1938), pp. 259-267.

B) si riduce, insieme con la derivata parziale seconda mista rispetto a x e a y, ad assegnate funzioni su due facce consecutive di R parallele all'asse t (n. 7);

C) si riduce ad una assegnata funzione su una delle facce di R parallele al piano xy (n. 9).

I risultati A), B), C) sono validi qualunque siano le dimensioni di R, oppure se una almeno di esse è abbastanza piccola, a seconda delle più o meno forti condizioni di analiticità o di quasi analiticità richieste per l'integrale. Se queste, nel caso A), non sono sufficientemente ristrette, viene a mancare l'unicità, ma essa risulta di nuovo assicurata, qualunque siano le dimensioni del dominio, imponendo all'integrale di essere anche soltanto regolare in R e, come ulteriore condizione, di assumere assegnati valori sulla faccia superiore (con riferimento all'asse t verticale) di R parallela al piano xy (n. 6). Nel n. 6 si indica pure il modo di costruire integrali della (2) che assumono sulla predetta faccia valori sufficientemente regolari e che sulla superficie laterale di R si riducono a funzioni identicamente nulle o, più in generale, esprimibili mediante certi integrali doppi contenenti un'arbitraria funzione di due variabili.

Anche nel caso C) l'unicità cade in difetto se non si richiedono integrali soggetti a condizioni sufficientemente forti di analiticità.

Nel n. 8 si accenna alla possibilità di estendere i risultati A), B) e quelli del n. 6 ad equazioni di tipo più generale.

PARTE PRIMA

2. - PROBLEMA A). - Si consideri, per semplicità di esposizione, il dominio rettangolare $R \equiv (0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq t \leq c)$ e sia $g(y)$ una funzione continua nell'intervallo $0 \leq y \leq b$. Inoltre nei dominî $(0 \leq x \leq a,\ 0 \leq t \leq c)$ del piano xt e $(0 \leq y \leq b,\ 0 \leq t \leq c)$ del piano yt siano date rispettivamente le funzioni $\varphi(x, t)$, $\psi(y, t)$ continue, verificanti la condizione $\varphi[g(0), t] = \psi(0, t)$ in $0 \leq t \leq c$ e di clase 2 rispetto a t[2], cioè dotate delle derivate parziali rispetto a t di ogni ordine continue e soggette alle limitazioni

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{\partial^k \varphi}{\partial t^k}\right| \\ \left|\dfrac{\partial^k \psi}{\partial t^k}\right|\end{array}\right\} \leq M\frac{(2k)!}{r^k} \qquad (k = 1, 2, 3, ..,), \tag{3}$$

con M e r costanti positive.

In tali ipotesi si proverà che:

I. *Se una almeno delle dimensioni a e b di R è abbastanza piccola, esiste un unico integrale $u(x, y, t)$ della* (1) *continuo in R insieme con la* $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$[3], *di classe* 2 *rispetto a t e verificante le condizioni*

$$\begin{aligned} &u(x, 0, t) = \varphi(x, t), \\ &u[g(y), y, t] = \psi(y, t). \end{aligned} \tag{4}$$

Esistenza dell'integrale. Anzitutto si verifica agevolmente che le soluzioni continue in R insieme con le $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ della (1) congiunta con le (4) sono tutte e sole le soluzioni continue in R insieme con la $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ dell'equazione integro-differenziale

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = \varphi(x, t) + \psi(y, t) - \varphi[g(y), t] + \\ + \int_{g(y)}^{x} \int_{0}^{y} \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta. \end{aligned} \tag{5}$$

Ciò premesso, si mostrerà che la funzione

$$u(x, y, t) = \sum_{0}^{\infty}{}_n\, u_n(x, y, t), \tag{6}$$

---

[2]) Cfr. E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathematique*, Gauthier-Villars, Paris (1910), 2ª ed., tomo III, p. 305.

[3]) Si considera qui la $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ definita direttamente come il

$$\lim_{\substack{\Delta x \\ \Delta y} \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y, t) - u(x+\Delta x, y, t) - u(x, y+\Delta y, t) + u(x, y, t)}{\Delta x \Delta y}.$$

ove

$$u_0(x, y, t) = \varphi(x, t) + \psi(y, t) - \varphi[g(y), t]$$

$$u_n(x, y, t) = \int_{g(y)}^{x} \int_{0}^{y} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t}(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \tag{7}$$

soddisfa, se il prodotto ab è abbastanza piccolo, alla (5) in R.

Invero si osservi che in R sussistono le limitazioni

$$|u_0| \leq H \quad , \quad \left|\frac{\partial^k u_0}{\partial t^k}\right| \leq H \frac{(2k)!}{r^k}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{8}$$

$$|u_n| \leq \begin{cases} H \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\dfrac{xy}{r}\right)^n & \text{se} \quad x \geq g(y) \\ H \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \left[\dfrac{(a-x)y}{r}\right]^n & \text{se} \quad x \leq g(y) \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{9}$$

$$\left|\frac{\partial^k u_n}{\partial t^k}\right| \leq \begin{cases} \dfrac{H}{r^k} \dfrac{(2n+2k)!}{(n!)^2} \left(\dfrac{xy}{r}\right)^n & \text{se} \quad x \geq g(x) \\ \dfrac{H}{r^k} \dfrac{(2n+2k)!}{(n!)^2} \left[\dfrac{(a-x)y}{r}\right]^n & \text{se} \quad x \leq g(y) \end{cases} \tag{10}$$

$$(n, k = 1, 2, 3, \ldots)$$

ove H denota la più grande delle due quantità $3M$. $2 \max |\varphi| + \max |\psi|$. In base alla continuità di u_0 e alle (3) si riconosce immediatamente la validità delle (8) e quindi, giusta la (7), delle (10) con $n = 1$, indi si procede per induzione tenendo presente che dalla (7) consegue

$$\left|\frac{\partial^k u_n}{\partial t^k}\right| \leq \begin{cases} \displaystyle\int_{g(y)}^{x} \int_{0}^{y} \left|\frac{\partial^{k+1} u_{n-1}}{\partial t^{k+1}}\right| d\xi d\eta & \text{se} \quad x \geq g(x) \\ \displaystyle\int_{x}^{g(y)} \int_{0}^{y} \left|\frac{\partial^{k+1} u_{n-1}}{\partial t^{k+1}}\right| d\xi d\eta & \text{se} \quad x \leq g(y) \end{cases}$$

e che le successive maggiorazioni risultano rafforzate ove si ponga o in luogo di $g(y)$ nel primo caso e a in luogo di $g(y)$ nel secondo caso. Le (9) discendono poi subito dalle (7) e (10), talchè si conclude intanto che in R riesce:

$$
(11) \qquad \begin{aligned} |u_n| &\leq H\frac{(2n)!}{(n!)^2}\left(\frac{ab}{r}\right)^n \\ \left|\frac{\partial^k u_n}{\partial t^k}\right| &\leq \frac{H}{r^k}\frac{(2n+2k)!}{(n!)^2}\left(\frac{ab}{r}\right)^n \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} n=0,\ 1,\ 2,\dots \\ k=1,\ 2,\ 3,\dots \end{pmatrix}
$$

Pertanto, se $ab < \frac{r}{4}$, la serie al secondo membro della (6) e tutte quelle che da essa si ottengono derivando termine a termine rispetto a t un numero arbitrario di volte sono totalmente convergenti in R, onde, passando al limite, per n tendente all'infinito, nella

$$
\sum_0^n{}_k\, u_k = u_0 + \int_{g(y)}^{x}\int_0^{y}\left[\frac{\partial}{\partial t}\sum_0^{n-1}{}_k\, u_k\right]d\xi d\eta,
$$

resta provato che la (6) in R soddisfa alla (5).

Inoltre si ha, per le (8) e (10),

$$
(12) \qquad \left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right| \leq \frac{H}{r^k}\sum_0^\infty{}_n \frac{(2n+2k)!}{(n!)^2}\left(\frac{ab}{r}\right)^n =
$$

$$
= H\sum_0^\infty{}_n (2n+2k)\dots(2n+1)\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{(\sqrt{ab})^{2n}}{r^{n+k}} \leq
$$

$$
\leq H\sum_0^\infty{}_n (2n+2k)\dots(2n+1)\frac{(2\sqrt{ab})^{2n}}{r^{n+k}} =
$$

$$
= H\left[\frac{d^{2k}}{dz^{2k}}\sum_0^\infty{}_n \frac{z^{2n}}{r^n}\right]_{z=2\sqrt{ab}} \leq HN\frac{(2k)!}{\rho^k},
$$

laddove N indica il massimo del modulo della funzione $\sum_n \frac{z^{2n}}{r^n}$, olomorfa in $|z| < \sqrt{r}$, su una circonferenza di centro $2\sqrt{ab}$ e di raggio $\sqrt{\rho} = \sigma - 2\sqrt{ab}$, con $2\sqrt{ab} < \sigma < \sqrt{r}$ e ciò prova che in R la (6) è funzione di classe 2.

Non sarà inutile osservare che, contrariamente a quanto si potrebbe pensare a prima vista, il metodo usato non assicura la possibilità di prolungare la soluzione trovata oltre il dominio R, con $ab < \frac{r}{4}$. Infatti, prefissati arbitrariamente R e, se non è $b < \frac{r}{4a}$, un numero positivo $\delta < \frac{r}{4a}$, il ragionamento precedente porta a concludere che la (6) è soluzione della (5) in $(0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq \delta,\ 0 \leq t \leq c)$, sicchè nel dominio $(0 \leq x \leq a,\ \delta \leq y \leq b,\ 0 \leq t \leq c)$ vi ha luogo a considerare per la (1) ancora il problema iniziale, con $u(x, \delta, t) = \sum_0^\infty {}_n u_n(x, \delta, t)$ in luogo della prima delle (4) e, giusta la (12), con ρ in luogo di r. Ma la convergenza della maggiorante della nuova serie (6) che si viene in tal caso ad ottenere sussiste solo quando $a(b - \delta) < \frac{\rho}{4}$, talchè riuscirà

$$b = \delta + b - \delta < \delta + \frac{(\sigma - 2\sqrt{a\delta})^2}{4a} < \delta + \frac{(\sqrt{r} - 2\sqrt{a\delta})^2}{4a}$$

e l'ultimo membro è, insieme con δ, sempre inferiore a $\frac{r}{4a}$.

Unicità dell'integrale. Fissato $ab < \frac{r}{4}$, si supponga che $\bar{u}(x, y, t)$ sia un altro integrale di classe 2 della (5) in R e quivi si abbia

$$\left|\frac{\partial^k \bar{u}}{\partial t^k}\right| \leq \bar{H} \frac{(2k)!}{\bar{\rho}^k} \qquad (k = 1,\ 2\ \ 3, \ldots).$$

Posto $z_n = \bar{u} - \sum_0^n {}_k u_k$ $(n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$, le (7) valgono manifestamente con z_n in luogo di u_n, sicchè, tenendo presente che riesce

$$\left|\frac{\partial^k z_0}{\partial t^k}\right| \leq L \frac{(2k)!}{\tau^k}, \quad \text{con} \quad L \geq \begin{cases} \bar{H} \\ HN \end{cases}, \quad \tau \leq \begin{cases} \bar{\rho} \\ \rho \end{cases}$$

e ragionando come per le u_n, si riconosce che in un dominio $R_1 \equiv (0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq y_1,\ 0 \leq t \leq c)$ $(y_1 \leq b)$ si ha

$$|z_n| \leq L \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{a y_1}{\tau}\right)^n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots).$$

Dunque, prendendo $y_1 < \frac{\tau}{4a}$, in R_1 risulta $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$: scomposto allora l'intervallo $0 \leq y \leq b$ in ν intervalli $y_{h-1} \leq y \leq y_h$ $(h = 1, 2, \dots, \nu)$, $(y_0 = 0,\ y_\nu = b)$, tutti di lunghezza minore di $\frac{\tau}{4a}$, in ciascuno dei dominî $R_h \equiv (0 \leq x \leq a,\ y_{h-1} \leq y \leq y_h,\ 0 \leq t \leq c)$ si può ripetere il ragionamento precedente e ciò prova che la (6) è l'unica soluzione di classe 2 della (5) in R.

Si noti che, se le funzioni $\varphi(x, t)$, $\psi(y, t)$ hanno nei rispettivi dominî le derivate parziali $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}$ continue e se la $g(y)$ ha la derivata continua in $0 \leq y \leq b$, allora dalla (5) si trae che la (6) è dotata anche delle derivate parziali prime rispetto a x e a y continue in R.

In ogni caso poi dalla continuità delle $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ consegue che sono pure continue le $\frac{\partial^k}{\partial t^k} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ e quindi i due operatori $\frac{\partial^k}{\partial t^k}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$ si possono scambiare tra loro, onde si conclude che la (5) ha tutte le derivate $\frac{\partial^{2k} u}{\partial x \partial y \dots \partial x \partial y}$ continue in R.

Si osservi inoltre che, supponendo le funzioni $\varphi(x, t)$, $\psi(y, t)$ analitiche rispetto a t nei rispettivi dominî, le (11) valgono con $n!$ e $(n + k)!$ in luogo di $(2n)!$ e $(2n + 2k)!$ ed in tal caso la (6) e le serie da essa ottenute derivando termine a termine rispetto a t un numero arbitrario di volte sono totalmente convergenti in R qualunque siano a e b. Inoltre la (12) si muta nella

$$\left| \frac{\partial^k u}{\partial t^k} \right| \leq \frac{H}{r^k} \sum_0^\infty{}_n (n + k) \dots (n + 1) \frac{1}{n!} \left(\frac{ab}{r} \right)^n =$$

$$= \frac{H}{r^k} \left[\frac{d^k}{dz^k} z^k \sum_0^\infty{}_n \frac{z^n}{n!\, r^n} \right]_{z=ab} \leq H e^{\frac{ab}{r}} \frac{k!}{\rho^k},$$

ove $\rho = \frac{r^2}{r + ab}$. In queste ipotesi più restrittive si può dunque affermare che:

II. *Qualunque siano le dimensioni di R, ivi esiste un unico integrale $u(x, y, t)$ della (1), congiunta con le (4), continuo insieme con la $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ e analitico rispetto a t.*

3. - PROBLEMA B). Si consideri ancora il dominio rettangolare $R \equiv (0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ 0 \leq t \leq c)$ e sia $x = g(y)$ una funzione sempre crescente nell'intervallo $0 \leq y \leq b$, ivi continua e tale che $g(0) = 0$, $g(b) = a$. Nei dominî $(0 \leq x \leq a,\ 0 \leq t \leq c)$ del piano xt e $(0 \leq y \leq b,\ 0 \leq t \leq c)$ del piano yt siano date rispettivamente le funzioni $\varphi(x, t)$, $\psi(y, t)$ continue e di classe 2 rispetto a t (cfr. n. 2); infine sia $f(t)$ una funzione pure di classe 2 in $0 \leq t \leq c$.

In tali ipotesi si ha:

III. *Se una almeno delle dimensioni a e b di R è abbastanza piccola, esiste un unico integrale $u(x, y, t)$ della (1) continuo in R insieme con la $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ [Cfr. nota [3]], di classe 2 rispetto a t e verificante le condizioni*

$$
\begin{aligned}
& u(0,\ 0,\ t) = f(t), \\
(13) \qquad & \frac{\partial u}{\partial x}[x,\ \gamma(x),\ t] = \varphi(x,\ t), \\
& \frac{\partial u}{\partial y}[g(y),\ y,\ t] = \psi(y,\ t),
\end{aligned}
$$

ove $y = \gamma(x)$ denota la funzione inversa della $x = g(y)$ [4].

Invero è di facile verifica che le soluzioni continue in R insieme con le $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ della (1) congiunta con le (13) sono tutte e sole le soluzioni continue in R insieme con la $\frac{\partial u}{\partial t}$ del-

[4]) Si noti che dalle (13) si deduce

$$u[g(y),\ y,\ t] = f(t) + \int_0^y \psi(\eta,\ t)d\eta + \int_0^{g(y)} \varphi(\xi,\ t)d\xi.$$

l'equazione integro-differenziale

$$(14)\qquad u(x, y, t) = u_0(x, x, t) + \int_{g(y)}^{x}\int_{\gamma(\xi)}^{y} \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, \eta, t)d\xi d\eta,$$

ove

$$u_0(x, y, t) = f(t) + \int_0^x \varphi(\xi, t)d\xi + \int_0^y \psi(\eta, t)d\eta.$$

Con un ragionamento analogo a quello adottato nel n. 2 si prova che, se il prodotto ab è abbastanza piccolo, la (6) con

$$u_n(x, y, t) = \int_{g(y)}^{x}\int_{\gamma(\xi)}^{y} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t}(\xi, \eta, t)d\xi d\eta,$$

è in R soluzione della (14).

Invero, procedendo per induzione, si ricava:

$$|u_n| \leq \begin{cases} H\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\left[\dfrac{x(b-y)}{r}\right]^n & \text{se } x \geq g(y) \\ H\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}\left[\dfrac{(a-x)y}{r}\right]^n & \text{se } x \leq g(y). \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\left|\frac{\partial^k u_n}{\partial t^k}\right| \leq \begin{cases} \dfrac{H}{r^k}\dfrac{(2n+2k)!}{(n!)^2}\left[\dfrac{x(b-y)}{r}\right]^n & \text{se } x \geq g(y) \\ \dfrac{H}{r^k}\dfrac{(2n+2k)!}{(n!)^2}\left[\dfrac{(a-x)y}{r}\right]^n & \text{se } x \leq g(y) \end{cases} \qquad (n, k = 1, 2, 3, \ldots),$$

ove H è il più grande dei due numeri $M(1 + a + b)$, $\max|f| + a \max|\varphi| + b \max|\psi|$, sicchè, in ogni caso, valgono ancora le (11). Ne consegue l'esistenza dell'integrale se $ab < \dfrac{r}{4}$.

Come nel n. 2 si trae inoltre che la (6) è in R funzione di classe 2 rispetto a t, che il procedimento adottato non ne assicura la prolungabilità e che essa è l'unica soluzione di classe 2 rispetto a t della (14) in R.

Valgono anche ora considerazioni del tutto simili a quelle poste in fine del n. 2 e si ha pure un teorema di esistenza e unicità « in grande » analogo a II.

I due problemi A) e B) si possono estendere senza difficoltà al caso dell'equazione più generale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial t} + \beta(x, y)u + \omega(x, y, t),$$

laddove $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ sono funzioni continue nel dominio $(0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b)$ e $\omega(x, y, t)$ è in R funzione continua e di classe 2, oppure analitica, rispetto a t secondochè si voglia determinare « in piccolo », oppure « in grande », l'unico integrale di classe 2, o corrispondentemente analitico, rispetto a t in R della suindicata equazione congiunta con le (4) [o con le (13)].

4. - PROBLEMA C). Sia $f(x, y)$ una funzione continua nel dominio $(0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b)$ e ivi dotata delle derivate parziali $\frac{\partial^{2k} f}{\partial x^k \partial y^k}$ [5]) $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ continue e soggette alle limitazioni

$$\left|\frac{\partial^{2k} f}{\partial x^k \partial y^k}\right| \leq M \frac{k!}{r^k}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{15}$$

con M e r costanti positive.

In queste ipotesi si ha:

IV. *Se la dimensione c di R è abbastanza piccola, esiste uno, e uno solo, integrale $u(x, y, t)$ della* (1) *continuo in R insieme con le* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^k \partial y^k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, *verificante una*

---

[5]) In questo numero col simbolo $\frac{\partial^{2k} f}{\partial x^k \partial y^k}$, per $k > 1$, si può intendere la derivata seconda mista, definita direttamente come limite di un rapporto incrementale (cfr. nota [3])), della $\frac{\partial^{2k-2} f}{\partial x^{k-1} \partial y^{k-1}}$.

condizione del tipo (15) *e la*

$$u(x, y, 0) = f(x, y). \tag{16}$$

Invero tutte le soluzioni continue in R insieme con le $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ della (1) congiunta con la (16) sono tutte e sole le soluzioni continue in R insieme con la $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ dell'equazione integro-differenziale

$$u(x, y, t) = f(x, y) + \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y, \tau) d\tau. \tag{17}$$

Ciò premesso, la (6), con

$$u_0(x, y, t) = f(x, y), \quad u_n(x \ \ y, t) = \int_0^t \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x \partial y}(x, y, \tau) d\tau,$$

è soluzione della (17) in R se $c < r$, come si riconosce osservando che sussistono le

$$|u_n| \leq H \left(\frac{c}{r}\right)^n \quad , \quad H \geq \begin{cases} M \\ \max |f| \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial^{2k} u_n}{\partial x^k \partial y^k} \right| \leq \frac{H}{r^k} \frac{(n+k)!}{n!} \left(\frac{c}{r}\right)^n \quad \begin{pmatrix} n = 0, 1, 2, \ldots \\ k = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

e usando un algoritmo analogo a quello dei numeri precedenti. Inoltre si ha:

$$\left| \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^k \partial y^k} \right| \leq \frac{H}{r^k} \sum_0^\infty{}_n \frac{(n+k)!}{n!} \left(\frac{c}{r}\right)^n = \tag{18}$$

$$= H \left[\frac{d^k}{dz^k} \sum_0^\infty{}_n \left(\frac{z}{r}\right)^n \right]_{z=c} = \frac{Hr}{r-c} \frac{k!}{\rho^k},$$

con $\rho = r - c$, e da ciò segue che la (6) verifica in R una condizione del tipo (15) e che il metodo usato non assicura la possibilità di prolungare la soluzione trovata oltre il dominio R, con $c < r$.

Mediante un ragionamento simile a quello del n. 2 si prova l'unicità della soluzione.

Se poi, in luogo delle (15), si considerano, ad esempio, le

$$\left| \frac{\partial^{2k} f}{\partial x^k \partial y^k} \right| \leq M \frac{k}{r^k}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{19}$$

si ottiene il risultato seguente:

V. *Qualunque siano le dimensioni di R, ivi esiste un unico integrale della* (1), *congiunta con la* (16), *continuo insieme con le* $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^k \partial y^k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *e verificante una condizione del tipo* (19).

Infatti, giuste le (19), si ha che la (6) e tutte le serie da essa ottenute mediante derivazione termine a termine rispetto alla coppia x, y un numero arbitrario di volte sono totalmente convergenti in R, qualunque siano le dimensioni di questo, e inoltre, in luogo delle (18), sussistono le

$$\left| \frac{\partial^{2k} u}{\partial x^k \partial y^k} \right| \leq \frac{H}{r^k} \sum_0^\infty {}_n \frac{n + k}{n!} \left(\frac{c}{r}\right)^n = \frac{H}{r^k}\left(1 + \frac{c}{r} e^{\frac{c}{r}} + k e^{\frac{c}{r}}\right) \leq$$

$$\leq H\left(1 + \frac{c}{r} e^{\frac{c}{r}} + e^{\frac{c}{r}}\right) \frac{k}{r^k} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si osservi che la (1), congiunta con la (16), ammette più integrali che non verificano limitazioni del tipo (15) o (19). Tale è ad esempio la funzione

$$u(x, y, t) = \begin{cases} f(x, y) + \displaystyle\int\!\!\int_D q(\xi, \eta) \frac{e}{t}^{-\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{t}} d\xi d\eta & \text{per} \quad 0 < t \leq c \\ f(x, y) & \text{per} \quad t = 0, \end{cases}$$

ove D è un qualsivoglia dominio regolare limitato del piano xy contenuto nell'angolo $x > a$, $y > b$, $q(x, y)$ è una arbitraria funzione continua in D ed $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, con $f_1(x)$ ed $f_2(y)$ arbitrarie funzioni continue rispettivamente in $0 \leq x \leq a$ e in $0 \leq y \leq b$.

Si noti infine che gli argomenti di questo numero si possono svolgere, con lievi modificazioni, anche nel caso in cui la (16) venga sostituita con la $u(x, y, c) = f(x, y)$.

PARTE SECONDA

5. - Problema A). Siano $\varphi_1(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$ funzioni continue insieme con le derivate parziali prima e seconda rispetto a x nel dominio $(0 \leq x \leq a,\ 0 \leq t \leq c)$ e $\psi_1(y, t)$, $\psi_2(y, t)$ funzioni continue insieme con le derivate parziali prima e seconda rispetto a y nel dominio $(0 \leq y \leq b,\ 0 \leq t \leq c)$. Tali funzioni verifichino inoltre le condizioni di raccordo:

$$\begin{array}{lll} \varphi_1(0, t) = \psi_1(0, t) \quad , & \varphi_2(0, t) = \psi_1(b, t), & \\ & & (0 \leq t \leq c) \\ \varphi_1(a, t) = \psi_2(0, t) \quad , & \varphi_2(a, t) = \psi_2(b, t). & \end{array}$$

e siano dotate delle derivate parziali rispetto a t di ogni ordine continue e soggette alle limitazioni

$$(20) \qquad \left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial^k \varphi_1}{\partial t^k}\right| \\ \left|\dfrac{\partial^k \varphi_2}{\partial t^k}\right| \end{array}\right\} \leq Mk \quad , \quad \left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{\partial^k \psi_1}{\partial t^k}\right| \\ \left|\dfrac{\partial^k \psi_2}{\partial t^k}\right| \end{array}\right\} \leq Mk, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

con M costante positiva.

In queste ipotesi si ha:

VI. *Se una almeno delle dimensioni a e b di R è abbastanza piccola, esiste un unico integrale $u(x, y, t)$ della* (2) *continuo in R insieme con le* $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \dfrac{\partial^k u}{\partial t^k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, *verificante limitazioni del tipo* (20) *e le condizioni*

$$(21) \qquad \begin{array}{ll} u(x, 0, t) = \varphi_1(x, t) \quad , & u(0, y, t) = \psi_1(y, t), \\ u(x, b, t) = \varphi_2(x, t) \quad , & u(a, y, t) = \psi_2(y, t). \end{array}$$

Si osservi anzitutto che le soluzioni continue in R insieme con le $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ della (2) congiunta con le (21) sono tutte e sole le soluzioni continue in R insieme con la $\frac{\partial u}{\partial t}$ della equazione integro-differenziale [6])

$$(22) \qquad u(x, y, t) =$$

$$= \frac{(a-x)(b-y)}{ab}\left[\varphi_1(x, t)+\psi_1(y, t)-\varphi_1(0, t)+\int_0^x\int_0^y \xi\eta \frac{\partial u}{\partial t}(\xi, \eta, t)d\xi d\eta\right]+$$

$$+\frac{(a-x)y}{ab}\left[\varphi_2(x, t)+\psi_1(y, t)-\varphi_2(0, t)+\int_0^x\int_y^b \xi(b-\eta)\frac{\partial u}{\partial t}(\xi, \eta, t)d\xi d\eta\right]+$$

$$+\frac{x(b-y)}{ab}\left[\varphi_1(x, t)+\psi_2(y, t)-\varphi_1(a, t)+\int_x^a\int_0^y (a-\xi)\eta\frac{\partial u}{\partial t}(\xi, \eta, t)d\xi d\eta\right]+$$

$$+\frac{xy}{ab}\left[\varphi_2(x, t)+\psi_2(y, t)-\varphi_2(a, t)+\int_x^a\int_y^b (a-\xi)(b-\eta)\frac{\partial u}{\partial t}(\xi, \eta, t)d\xi d\eta\right].$$

In secondo luogo si ha che la (6), con

$$u_0(x, y, t) = \frac{(a-x)(b-y)}{ab}[\varphi_1(x, t)+\psi_1(y, t)-\varphi_1(0, t)]+$$
$$+\frac{(a-x)y}{ab}[\varphi_2(x, t)+\psi_2(y, t)-\varphi_2(0, t)]+$$
$$+\frac{x(b-y)}{ab}[\varphi_1(x, t)+\psi_2(y, t)-\varphi_1(a, t)]+$$
$$+\frac{xy}{ab}[\varphi_2(x, t)+\psi_2(y, t)-\varphi_2(a, t)],$$

6) Cfr. F. MANARESI, *Applicazione di un procedimento variazionale allo studio di una equazione differenziale alle derivate parziali con caratteristiche reali doppie*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », 23 (1954), pp. 163-213, in particolare pp. 166-171.

$$u_n(x,\ y,\ t)=\frac{(a-x)(b-y)}{ab}\int_0^x\int_0^y \xi\eta\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t}(\xi,\ \eta,\ t)d\xi d\eta+$$

$$+\frac{(a-x)y}{ab}\int_0^x\int_y^b \xi(b-\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t}(\xi,\ \eta,\ t)d\xi d\eta+$$

$$+\frac{x(b-y)}{ab}\int_x^a\int_0^y (a-\xi)\eta\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t}(\xi,\ \eta,\ t)d\xi d\eta+$$

$$+\frac{xy}{ab}\int_x^a\int_y^b (a-\xi)(b-\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t}(\xi,\ \eta,\ t)d\xi d\eta,$$

$$(n=1,\ 2,\ 3,\ldots)$$

soddisfa in R alla (22) se il prodotto ab è abbastanza piccolo.

Invero, dalla definizione di u_n, si trae

$$\left|\frac{\partial^k u_n}{\partial t^k}\right|\leq ab\int_0^a\int_0^b\left|\frac{\partial^{k+1}u_{n-1}}{\partial t^{k+1}}\right|d\xi d\eta,$$

da cui, tenendo conto delle (20) e ragionando per induzione, si deducono le limitazioni

$$(23)\qquad |u_n|\leq H(ab)^{2n}n,\quad \left|\frac{\partial^k u_n}{\partial t^k}\right|\leq H(ab)^{2n}(n+k),\quad \begin{pmatrix} n=0,\ 1,\ 2,\ldots \\ k=1,\ 2,\ 3,\ldots \end{pmatrix}$$

ove H è il più grande dei numeri $12M$, $4\max|\varphi_1|+4\max|\varphi_2|+$ $+2\max|\psi_1|+2\max|\psi_2|$.

Pertanto, se $ab<1$, la serie (6) e tutte quelle che da essa si ottengono derivando termine a termine rispetto a t un numero arbitrario di volte sono totalmente convergenti in R, talchè, passando al limite, per $n\rightarrow\infty$, sotto al segno di integrale nella (22), con $\sum_0^n{}_k u_k$ e $\frac{\partial}{\partial t}\sum_0^{n-1}{}_k u_k$ in luogo di u e $\frac{\partial u}{\partial t}$ rispettivamente, si riconosce che la (6) è soluzione della (22).

Inoltre, giusta la seconda delle (23), si ha:

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right| \leq H \sum_0^\infty{}_n (n+k)(a^2b^2)^n = H\left[\sum_0^\infty{}_n n(a^2b^2)^n + \frac{k}{1-a^2b^2}\right] \leq$$

$$\leq H\left[\sum_0^\infty{}_n n(a^2b^2)^n + \frac{1}{1-a^2b^2}\right] k, \qquad (k=1,\,2,\,3,\,\ldots)$$

da cui si vede che la (6) verifica una limitazione del tipo (20).

L'unicità si deduce poi con un ragionamento simile a quello adottato nel n. 2.

Si osservi che dalla (2) e dalla continuità delle $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$, $(k=1,\,2,\,3,\,\ldots)$ segue che anche le $\frac{\partial^k}{\partial t^k}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ sono continue, onde tali risultano pure le $\frac{\partial^{4k} u}{\partial x^2 \partial y^2 \ldots \partial x^2 \partial y^2}$.

Se poi i secondi membri delle (20) si sostituiscono, ad esempio, con $\frac{M}{k!\,r^k}$, essendo r, al pari di M, una costante positiva, allora le (23) si mutano nelle

$$|u_n| \leq \frac{H}{n!}\left(\frac{a^2b^2}{r}\right)^n, \quad \left|\frac{\partial^k u_n}{\partial t^k}\right| \leq \frac{H}{r^k}\frac{1}{(n+k)!}\left(\frac{a^2b^2}{r}\right)^n \quad \begin{pmatrix} n=0,\,1,\,2,\ldots \\ k=1,\,2,\,3,\ldots\end{pmatrix}$$

e per conseguenza risulta

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right| \leq \frac{H}{r^k}\sum_0^\infty{}_n \frac{1}{(n+k)!}\left(\frac{a^2b^2}{r}\right)^n \leq \frac{H}{r^k k!}\sum_0^\infty{}_n \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2b^3}{r}\right)^n = \frac{He^{\frac{a^2b^2}{r}}}{r^k k!},$$

onde si può concludere che:

VII. *Qualunque siano le dimensioni di R, ivi esiste un unico integrale $u(x, y, t)$ della (2), congiunta con le (21), continuo insieme con le $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}, \frac{\partial^k u}{\partial t^k}$ $(n=1,\,2,\,3\,\ldots)$ e verificante una limitazione dello stesso tipo di quella imposta ai dati.*

Nel problema trattato in questo numero le condizioni imposte alle funzioni note e all'integrale cercato sono più restrittive di quelle riferentisi al problema A) della prima parte.

Si noti invero che, se i secondi membri delle (20) si sostituiscono con $\frac{M}{r^k}$ $(r < 1)$, (e tale condizione è ben più forte dell'analiticità) viene a mancare l'unicità dell'integrale, giacchè ogni funzione del tipo

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + \alpha \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} e^{-\frac{\pi^4}{a^2b^2} m^2n^2(c-t)},$$

ove u_0 è definito, ad esempio, come in precedenza, ma con le funzioni φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2 indipendenti da t, α è una costante arbitraria ed m, n denotano interi non nulli qualsivogliano, soddisfa alla (2), congiunta con le (21), nel dominio R e quivi, se $ab < r < 1$, valgono le limitazioni $\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right| \leq \frac{M}{\rho^k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, con $\rho = \frac{a^2b^2}{\pi^4 m^2 n^2} < 1$.

6. - Alcune Osservazioni. Alla fine del n. precedente si è rilevato che nel problema A), se le condizioni di analiticità richieste per l'integrale non sono sufficientemente ristrette, viene a mancare l'unicità: tuttavia questa è di nuovo assicurata ove si imponga all'integrale una ulteriore condizione.

Invero, supposto che le funzioni $\varphi_1(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$, $\psi_1(y, t)$, $\psi_2(y, t)$ siano, nei rispettivi dominî, continue insieme con le derivate parziali prime rispetto a entrambe le variabili e seconde rispetto alla prima variabile e verifichino le condizioni di raccordo indicate in principio del n. 5 e che $f(x, y)$ sia una funzione continua in $R_0 \equiv (0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b)$ insieme con le derivate parziali prime, seconde, terze miste $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ e quarta $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$, si può dimostrare che:

VIII. *Se l'equazione* (2), *congiunta con le* (21) *e con la ulteriore condizione*

$$u(x, y, c) = f(x, y) \tag{24}$$

ammette un integrale $u(x, y, t)$ *continuo in* R *insieme con le*

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, *esso è necessariamente unico.*

Basterà far vedere che è identicamente nulla in R ogni soluzione della (2) che verifica le condizioni suddette, con

$$\varphi_1(x, t) = \varphi_2(x, t) = \psi_1(y, t) = \psi_2(y, t) = f(x, y) \equiv 0.$$

Moltiplicando infatti la (2) per u e integrando nel dominio $(0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b,\ t \leq \tau \leq c)$, si trae, con semplici calcoli,

$$\int_0^a \int_0^b \int_t^c \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 dx dy d\tau + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b u^2(x, y, t) dx dy = 0,$$

da cui segue $u(x, y, t) = 0$ in ogni punto di R.

In secondo luogo si mostrerà che, con opportune scelte dei dati, esistono effettivamente degli integrali della (2) congiunta con le (21) e (24). A questo scopo si consideri il sistema di infinite autosoluzioni

$$\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

dell'equazione

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \lambda u$$

congiunta con la condizione $u = 0$ su FR_0. Sia poi $f(x, y)$ una funzione nulla su FR_0 e sviluppabile in serie di Fourier procedente secondo il sistema di autosoluzioni, cioè in R_0 risulti:

$$f(x, y) = \sum_{1}^{\infty}{}_m \sum_{1}^{\infty}{}_n \alpha_{m,n} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b};$$

inoltre sia convergente la serie

$$\sum_{1}^{\infty}{}_m \sum_{1}^{\infty}{}_n m^2 n^2 \,|\, \alpha_{m,n} \,|$$ [7],

[7]) Questa condizione, poichè si tratta di serie trigonometriche, può essere sostituita con altre meno restrittive.

talchè la $f(x, y)$ riesce continua in R_0 insieme con le $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}$.

È allora di immediata verifica che la funzione

$$(25) \qquad u(x, y, t) = \sum_{1}^{\infty}{}_m \sum_{1}^{\infty}{}_n \alpha_{m,n} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} e^{-\frac{\pi^4}{a^2 b^2} m^2 n^2 (c-t)}$$

soddisfa in R alle (2), (24) e (21), con le $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ identicamente nulle.

Un esempio più generale si può costruire nella maniera seguente. Siano D un qualsivoglia dominio regolare limitato del piano xy e contenuto nel semipiano $y > b$ e $q(x, y)$ una arbitraria funzione continua in D. Posto:

$$u_0(x, y, t) =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\iint_D q(\xi, \eta) \operatorname{senh}(x - \xi) \frac{e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4(c-t)}}}{\sqrt{c-t}} d\xi d\eta & \text{per} \quad 0 \leq t < c \\ 0 & \text{p r} \quad t = c, \end{cases}$$

$$\varphi_1(x, t) = u_0(x, 0, t) \quad , \quad \varphi_2(x, t) = u_0(x, b, t),$$

$$\psi_1(y, t) = u_0(0, y, t) \quad , \quad \psi_2(y, t) = u_0(a, y, t),$$

la funzione

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + \sum_{1}^{\infty}{}_m \sum_{1}^{\infty}{}_n \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} e^{-\frac{\pi^4}{a^2 b^2} m^2 n^2 (c-t)}$$

rappresenta evidentemente in R un integrale della (2), congiunta con le (21) e (24), che verifica tutte le condizioni menzionate in VIII.

Si osservi che relativamente all'equazione (1) non vi ha luogo a fare considerazioni simili alle precedenti, giacchè la $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \lambda u$, congiunta con le condizioni $u(0, y, t) = 0$, $u(x, 0, t) = 0$, non ammette in R autosoluzioni.

Da quanto precede risulta pure che, almeno limitatamente a dominî rettangolari, la (2) presenta un comportamento analogo a quello dell'equazione ellittico-parabolica $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$. Scoprire se tale analogia si mantenga o meno anche riguardo all'esistenza di una soluzione fondamentale può costituire un ulteriore argomento di ricerca.

7. - PROBLEMA B). Nei dominî $(0 \leq x \leq a, 0 \leq t \leq c)$ e $(0 \leq y \leq b, 0 \leq t \leq c)$ siano assegnate rispettivamente le due coppie di funzioni $\varphi_1(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$ e $\psi_1(y, t)$, $\psi_2(y, t)$ continue insieme con le derivate parziali $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$, $\frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}, \frac{\partial \psi_2}{\partial y}$ e di classe 4 rispetto a t, cioè dotate delle derivate parziali rispetto a t di ogni ordine continue e soggette alle limitazioni

$$\left.\begin{array}{l} \left|\frac{\partial^k \varphi_1}{\partial t^k}\right| \\ \left|\frac{\partial^k \varphi_2}{\partial t^k}\right| \end{array}\right\} \leq M \frac{(4k)!}{r^k} \quad , \quad \left.\begin{array}{l} \left|\frac{\partial^k \psi_1}{\partial t^k}\right| \\ \left|\frac{\partial^k \psi_2}{\partial t^k}\right| \end{array}\right\} \leq M \frac{(4k)!}{r^k}, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

con M e r costanti positive; infine risulti

$$\varphi_1(0, t) = \psi_1(0, t) \quad , \quad \varphi_2(0, t) = \psi_2(0, t) \quad \text{per} \quad 0 \leq t \leq c.$$

Si può allora dimostrare che:

IX. *Se una almeno delle dimensioni a e b di R è abbastanza piccola, esiste un unico integrale $u(x, y, t)$ della (2) continuo in R insieme con le* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, *di classe 4 rispetto a t e verificante le condizioni*

$$\begin{array}{lll} & u(x, 0, t) = \varphi_1(x, t) \quad , & u(0, y, t) = \psi_1(y, t), \\ (26) & & \\ & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, 0, t) = \varphi_2(x, t) \quad , & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(0, y, t) = \psi_2(y, t). \end{array}$$

Infatti la (6), con

$$u_0(x, y, t) = \varphi_1(x, t) + \psi_1(y, t) - \varphi_1(0, t) + y\int_0^x \varphi_2(\xi, t)d\xi +$$

$$+ x\int_0^y \psi_2(\eta, t)d\eta - xy\varphi_2(0, t),$$

$$u_n(x, y, t) = \int_0^x\int_0^y \left[\int_0^\xi\int_0^\eta \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t}(\xi', \eta', t)d\xi' d\eta'\right] d\xi d\eta, \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

soddisfa in R, se il prodotto ab è abbastanza piccolo, alla equazione integro-differenziale

$$(27) \quad u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + \int_0^x\int_0^y \left[\int_0^\xi\int_0^\eta \frac{\partial u}{\partial t}(\xi', \eta', t)d\xi' d\eta'\right] d\xi d\eta,$$

la quale, come agevolmente si verifica, è equivalente alla (2) congiunta con le (26). Basta osservare che in R valgono in tal caso le (11), con $2n$ e a^2b^2 in luogo di n e ab e con

$$H \geq \begin{cases} 2\max|\varphi_1| + \max|\psi_1| + 2ab\max|\varphi_2| + ab\max|\psi_2| \\ 3M(1+ab), \end{cases}$$

donde segue

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right| \leq \frac{H}{r^k}\sum_0^\infty{}_n (4n+4k)\ldots(4n+1)\frac{(4n)!}{[(2n)!]^2}\left(\frac{a^2b^2}{r}\right)^n \leq$$

$$\leq H\sum_0^\infty{}_n (4n+4k)\ldots(4n+1)\frac{(2\sqrt{ab})^{4n}}{r^{n+k}} =$$

$$= H\left[\frac{d^{4k}}{dz^{4k}}\sum_0^\infty{}_n \frac{z^{4n}}{r^n}\right]_{z=2\sqrt{ab}}.$$

Dopodichè la dimostrazione si completa ragionando come nel n. 2: in particolare si riconosce che il procedimento adottato non assicura la possibilità di prolungare la soluzione trovata oltre il dominio R, con $ab < \frac{\sqrt{r}}{4}$.

Se poi le funzioni $\varphi_1(x, t)$, $\varphi_2(x, t)$, $\psi_1(y, t)$, $\psi_2(y, t)$ si suppongono nei rispettivi dominî di classe 2 rispetto a t, si deduce l'esistenza e l'unicità dell'integrale della (2), congiunta con le (26), continuo in R insieme con le derivate menzionate in IX e di classe 2 rispetto a t, qualunque siano le dimensioni di R. Basta osservare che in tal caso le (11) valgono con $[(2n)!]^2$ e a^2b^2 in luogo di $(n!)^2$ e ab, da cui risulta pure:

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial t^k}\right| \leq \frac{H}{r^k}\sum_0^\infty{}_n (2n+2k)\ldots(2n+1)\frac{1}{(2n)!}\left(\frac{a^2b^2}{r}\right)^n \leq$$

$$\leq \frac{H}{r^k}\left|\frac{d^{2k}}{dz^{2k}}z^{2k}e^{\frac{z^2}{r}}\right|_{z=ab} \leq He^{\frac{(ab+\nu)^2}{r}}\frac{(2k)!}{\rho^k},$$

con $\rho = \dfrac{r\nu^2}{(ab+\nu)^2}$ e ν numero positivo arbitrario, come si riconosce tenendo presente una nota proprietà delle funzioni olomorfe in tutto il piano.

Il problema ora trattato costituisce l'analogo per la (2) del problema A), relativo alla (1), nel caso particolare considerato da Piscounov: tuttavia, come si è visto, l'esistenza e l'unicità «in piccolo» o «in grande» dell'integrale sono assicurate con ipotesi più ampie di quelle usate nel n. 2.

8. - ALCUNE ESTENSIONI DEI RISULTATI PRECEDENTI. Se le dimensioni a e b di R sono entrambe abbastanza piccole, il teorema VI sussiste anche per l'equazione più generale

$$(28)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\theta(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right] = \alpha(x, y)\frac{\partial u}{\partial t} + \beta(x, y)u + \omega(x, y, t),$$

ove $\vartheta(x, y)$ è una funzione sempre positiva e continua in $R_0 \equiv (0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b)$ insieme con le derivate parziali prime e seconda mista, $\alpha(x, y)$ e $\beta(x, y)$ sono funzioni continue nel predetto dominio e $\omega(x, y, t)$ è una funzione continua in R insieme con le derivate parziali rispetto a t di ogni ordine e soggetta a limitazioni del tipo (20).

Invero la (22), posto $a_1 = 0$, $a_2 = a$, $b_1 = 0$, $b_2 = b$, si muta nella

$$(29) \qquad u(x, y, t) = u_0(x, y, t) +$$

$$+ \frac{1}{\theta(x, y)} \sum_{1}^{2}{}_h \sum_{1}^{2}{}_k (-1)^{h+k} \frac{(x - a_{3-h})(y - b_{3-k})}{ab} \left\{ \int_{a_h}^{x} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\xi, y) u(\xi, y, t) d\xi + \right.$$

$$+ \int_{b_k}^{y} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(x, \eta) u(x, \eta, t) d\eta + \int_{a_h}^{x}\int_{b_k}^{y} \left[(\xi - a_h)(\eta - b_k)\left(\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u\right) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial \eta} u \right] d\xi d\eta \right\} \text{ [8]},$$

con

$$(30) \qquad u_0(x, y, t) =$$

$$= \frac{1}{\theta(x, y)} \sum_{1}^{2}{}_h \sum_{1}^{2}{}_k (-1)^{h+k} \frac{(x - a_{3-h})(y - b_{3-k})}{ab} \left\{ \theta(a_h, y) \psi_h(y, t) + \right.$$

$$+ \theta(x, b_k) \varphi_k(x, t) - \theta(a_h, b_k) \varphi_k(a_h, t) + \int_{x}^{a_h} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}(\xi, b_k) \varphi_k(\xi, t) d\xi +$$

$$\left. + \int_{y}^{b_k} \frac{\partial \theta}{\partial \eta}(a_h, \eta) \psi_h(\eta, t) d\eta + \int_{x}^{a_h}\int_{y}^{b_k} (\xi - a_h)(\eta - b_k) \omega \, d\xi d\eta \right\},$$

mentre $u_n(x, y, t)$, per $n \geq 1$, si pone uguale al secondo membro della (29) privato di u_0 e con u_{n-1} al posto di u.

In tal caso nelle (23) figura, in luogo di $(ab)^2$, la quantità

$$\frac{1}{\min \theta} \left\{ a \max \left| \frac{\partial \theta}{\partial x} \right| + b \max \left| \frac{\partial \theta}{\partial y} \right| + a^2 b^2 (\max |\alpha| + \max |\beta|) + \right.$$

$$\left. + ab \max \left| \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} \right| \right\}$$

---

[8]) Loc. cit. in [6]).

e H è un numero positivo non inferiore ai secondi membri delle due maggiorazioni che si ottengono dalla (30) per $|u_0|$ e per $\frac{1}{k}\left|\frac{\partial^k u_0}{\partial t^k}\right|$. Da quest'ultima circostanza risulta appunto che VI vale per la (29) se le dimensioni a e b di R sono entrambe abbastanza piccole, mentre invece VII sussiste inalterato supponendo che $\omega(x, y, t)$ soddisfi in R alle condizioni più restrittive imposte in tal caso alle successive derivate rispetto a t delle φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2.

Se poi in R_0 risulta $\alpha(x, y) \geq 0$, $\beta(x, y) \leq 0$, $\omega(x, y, t) = 0$, il risultato VIII è ancora valido per la (28), mentre, ove si assuma $\alpha(x, y) = 1$, $\beta(x, y) = \omega(x, y, t) = 0$ in ogni punto di R_0, esiste un integrale del tipo (25), almeno nel caso in cui si prenda

$$f(x, y) = \sum_1^n {}_h \, \alpha_h v_h(x, y, t)$$

e quindi

$$u(x, y, t) = \sum_1^n {}_h \, \alpha_h v_h(x, y, t) e^{-\lambda_h(c-t)}$$

essendo n un numero naturale qualsivoglia, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ arbitrarie costanti, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ autofunzioni corrispondenti ad una n-pla di autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ della

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left[\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right] = \lambda u$$

congiunta con la condizione $u = 0$ su FR_0 [9]).

Il risultato IX vale anche per la (28), supponendo che $\omega(x, y, t)$ sia di classe 4 in R, giacchè la (27) diviene

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) + \int_0^x \int_0^y \left[\frac{1}{\theta} \int_0^\xi \int_0^\eta \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \beta u\right) d\xi' d\eta'\right] d\xi d\eta,$$

---

[9]) Cfr. loc. cit. in [6]), pp. 198-213.

con

$$u_0(x, y, t) = \varphi_1(x, t) + \psi_1(y, t) - \varphi_1(0, t) + y\int_0^x \frac{\theta(\xi, 0)}{\theta(\xi, y)}\varphi_2(\xi, t)d\xi +$$

$$+ x\int_0^y \frac{\theta(0, \eta)}{\theta(x, \eta)}\psi_2(\eta, t)d\eta - xy\frac{\theta(0, 0)}{\theta(x, y)}\varphi_2'(0, t) +$$

$$+ \int_0^x\int_0^y \left[\frac{1}{\theta}\int_0^\xi\int_0^\eta \omega d\xi' d\eta'\right] d\xi d\eta,$$

mentre $u_n(x, y, t)$, per $n \geq 1$, si definisce nella maniera seguente:

$$u_n(x, y, t) = \int_0^x\int_0^y \left[\frac{1}{\theta}\int_0^\xi\int_0^\eta \left(\alpha\frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} + \beta u_{n-1}\right)d\xi' d\eta'\right] d\xi d\eta.$$

Inoltre per le u_n e $\dfrac{\partial^k u_n}{\partial t^k}$ si hanno in R limitazioni del tipo di quelle del n. 7, con $\dfrac{\max|\alpha| + r\max|\beta|}{\min\theta}a^2b^2$ in luogo di a^2b^2 e con H numero positivo non inferiore ai secondi membri delle maggiorazioni che si ottengono per $|u_0|$ e per $\dfrac{r^k}{(4k)!}\left|\dfrac{\partial^k u_0}{\partial t^k}\right|$. Analogamente si riconosce che l'esistenza e l'unicità «in grande» dell'integrale di classe 2 della (28), congiunta con le (26), discendono dall'ipotesi che $\omega(x, y, t)$ sia, al pari delle φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2, di classe 2 in R.

9. - PROBLEMA C). Sia $f(x, y)$ una funzione continua nel dominio $(0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq b)$ e ivi dotata delle derivate parziali $\dfrac{\partial^{4k} f}{\partial x^{2k}\partial y^{2k}}$ [10]) $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ continue e soggette alle

[10]) Anche tali derivate si possono ritenere qui definite direttamente in modo simile a quello accennato nella nota [5]).

limitazioni

$$(31)\qquad \left|\frac{\partial^{4k} f}{\partial x^{2k}\partial y^{2k}}\right| \leq M\frac{k\,!}{r^k} \qquad (k=1,\,2,\,3,\,\ldots),$$

con M ed r costanti positive.

Procedendo come nel n. 4 si prova che:

X. *Se la dimensione c di R è abbastanza piccola, esiste un unico integrale $u(x,\,y,\,t)$ della* (2), *congiunta con la* (16), *continuo in R insieme con le $\dfrac{\partial u}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^{4k} u}{\partial x^{2k}\partial y^{2k}}$ $(k=1,\,2,\,3,\,\ldots)$ e verificante una limitazione del tipo* (31).

Se poi, invece delle (31), si considerano, ad esempio, le

$$(32)\qquad \left|\frac{\partial^{4k} f}{\partial x^{2k}\partial y^{2k}}\right| \leq M\frac{k}{r^k} \qquad (k=1,\,2,\,3,\,\ldots),$$

allora si deduce l'esistenza e l'unicità « in grande » dell'integrale che verifica una condizione del tipo (32).

Si osservi che la (2), congiunta con la (16), ammette più integrali che non verificano limitazioni del tipo (31) o (32). Tali sono, ad esempio, le funzioni:

$$u(x,\,y,\,t) = \begin{cases} f(x,\,y) + \alpha\,\mathrm{sen\,h}(x+\beta)\,\dfrac{e^{-\frac{(y+\gamma)^2}{4t}}}{\sqrt{t}} & \text{per} \quad 0 < t \leq c \\[2ex] f(x,\,y) & \text{per} \quad t=0, \end{cases}$$

$$(ux,\,y,\,t) = \begin{cases} f(x,y) + \displaystyle\int\!\!\int_D q(\xi,\,\eta)\,\mathrm{sen\,h}(x-\xi)\,\frac{e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4t}}}{\sqrt{t}}\,d\xi d\eta & \text{per}\ 0<t\leq c \\[2ex] f(x,\,y) & \text{per}\ t=0, \end{cases}$$

dove α, β e $\gamma > 0$ sono costanti arbitrarie, D è un qualsivoglia dominio regolare limitato del piano xy e contenuto nel semipiano $y > b$, $q(x,\,y)$ è un'arbitraria funzione continua in D e $f(x,\,y)$ è una qualunque soluzione continua in $(0 \leq x \leq a,$ $0 \leq y \leq b)$ dell'equazione $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$.

Si noti che funzioni dello stesso tipo si ottengono dalle precedenti scambiando la x con la y, oppure sostituendo cosh a senh.

Gli argomenti di questo numero si possono svolgere, con lievi modificazioni, anche nel caso in cui la (16) si muti nella $u(x, y, c) = f(x, y)$.

I risultati ottenuti nella presente nota possono estendersi ad equazioni analoghe a quelle considerate con più di tre variabili indipendenti: si osservi tuttavia che, indicate con $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ codeste variabili, il teorema di unicità VIII sussiste mutando la (24) nella $u(x_1, x_2, \dots, x_n, c) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, oppure nella $u(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, secondochè n è pari o dispari.