RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LUIGI ANTONIO ROSATI

Sui gruppi finiti a sottogruppi di composizione caratteristici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 331-337

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__331_0>

SUI GRUPPI FINITI A SOTTOGRUPPI DI COMPOSIZIONE CARATTERISTICI

Nota (*) *di* LUIGI ANTONIO ROSATI (*a Firenze*)

E. Schenkman [2] ha caratterizzato i gruppi risolubili tali che ogni sottogruppo di composizione è una potenza del gruppo stesso. Precisamente, detta potenza k-ma $G^{(k)}$ di un gruppo G il sottogruppo di G generato dalle potenze k-me degli elementi di G, ha dimostrato che se un gruppo risolubile G verifica la seguente condizione

(A) *Ogni sottogruppo di composizione di* G *è una potenza* $G^{(k)}$ *di* G

allora, e soltanto allora, G è un gruppo metaciclico [1]) il cui derivato ha ordine primo col suo indice in G.

Dal risultato di Schenkman risulta che ogni gruppo metaciclico G, il cui derivato abbia ordine primo con l'indice in G, è un gruppo risolubile che soddisfa la seguente condizione

(B) *Ogni sottogruppo di composizione di* G *è caratteristico in* G

(infatti ogni potenza $G^{(k)}$ di G è un sottogruppo caratteristico di G).

In questa nota, dopo avere dato qualche proprietà dei gruppi risolubili verificanti la condizione (B) e mostrato con un esempio che esistono gruppi risolubili finiti che verificano

(*) Pervenuta in Redazione il 15 ottobre 1958.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Firenze.

1) Un gruppo G si dice metaciclico quando il suo derivato, G', e G/G' sono entrambi ciclici.

la condizione (B) e che non sono metaciclici, caratterizziamo i gruppi risolubili finiti G che soddisfano la seguente condizione

(C) *Se H è un qualsiasi sottogruppo normale di G l'omomorfismo di G su G/H porta un sottogruppo di composizione di G in un sottogruppo caratteristico di G/H.*

Dimostreremo che per un gruppo risolubile finito G la condizione (C) equivale alla condizione (A), cioè se un gruppo risolubile finito G verifica la condizione (C) allora, e soltanto allora, G è un gruppo metaciclico il cui derivato ha ordine primo con l'indice in G.

In particolare per i gruppi finiti si riottiene il risultato di Schenkman.

1. - Cominciamo col dimostrare

TEOREMA 1. - *Un gruppo che soddisfa la condizione* (C) *soddisfa anche la condizione* (B) *e un gruppo che verifica la condizione* (B) *è un t-gruppo* [2]).

È evidente che un gruppo che verifica la condizione (C) verifica anche la (B). Supponiamo allora che G verifichi la (B). Considerati un sottogruppo normale, H, di G e un sottogruppo normale, K, di H, si ha la catena normale $G \supseteq H \supseteq K \supseteq 1$; K risulta dunque caratteristico e quindi normale in G. G è perciò un t-gruppo.

TEOREMA 2. - *Un gruppo finito speciale che soddisfi la condizione* (B) *è ciclico.*

Infatti, siccome G è speciale, ogni suo sottogruppo è di composizione e quindi caratteristico. Di conseguenza [1] G è ciclico.

TEOREMA 3. - *Se G è un gruppo finito risolubile di ordine* $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ $(p_1 > p_2 > \ldots > p_k)$ *che verifica la condizione* (B),

2) Un gruppo G si dice un t-gruppo quando, se H è un sottogruppo normale di G e K un sottogruppo normale di H, si ha che K è normale in G.

allora G ammette un sottogruppo caratteristico, di ordine $p_1^{\alpha_1}$, ciclico.

G (teorema 1) è un t-gruppo risolubile e perciò supersolubile [3]. Allora [5] G ammette un solo sottogruppo, N, di ordine $p_1^{\alpha_1}$ che risulta caratteristico in G. Siccome un p-gruppo finito è speciale basterà dimostrare che N verifica la condizione (B), cioè che ogni sottogruppo di composizione di N è caratteristico in N. Intanto ogni sottogruppo di composizione di N è anche sottogruppo di composizione di G, sicchè sarà sufficiente far vedere che un automorfismo qualsiasi, α, di N si può prolungare in un automorfismo, β, di G, o che, in altre parole, si può costruire un automorfismo, β, di G che determini sugli elementi di N la stessa sostituzione operata da α.

Per il teorema di Hall, G possiede un sottogruppo S d'ordine $p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot .. \cdot p_k^{\alpha_k}$ tale che $S = S_2 \cup S_3 \cup ... \cup S_k$, dove S_j ($j = 2, 3, ..., k$) è un conveniente sottogruppo di Sylow di G d'ordine $p_j^{\alpha_j}$.

D'altra parte G. Zappa [4] ha dimostrato il seguente teorema:

Sia G un gruppo ed N un suo sottogruppo normale. Sia α un automorfismo di N. Condizione necessaria e sufficiente perchè esista un automorfismo β che determini sugli elementi di N la stessa sostituzione operata da α è che si possa trovare un sistema residuo di generatori di G rispetto ad N, sia $h_1, h_2, ..., h_n, ...$, e in corrispondenza agli elementi del sistema, degli elementi $h_1', h_2', ..., h_n', ...$ di G tali che

a) se trasformando gli elementi di N mediante h_i ($i = 1, 2, ..., n, ...$) si determina in N l'automorfismo γ_i, trasformando gli stessi elementi mediante h_i' si determina in N l'automorfismo $\alpha\gamma_i\alpha^{-1}$,

b) se eseguendo certe operazioni su $h_1, h_2, ..., h_n, ...$ ($h_1', h_2', ..., h_n', ...$) si ottiene un elemento, n, di N, eseguendo le stesse operazioni su $h_1', h_2', ..., h_n', ...$ ($h_1, h_2, ..., h_n, ...$) si ottiene $\alpha(n)$ [$\alpha^{-1}(n)$],

c) $h_1', h_2', ..., h_n', ...$ costituiscono un sistema residuo di generatori di G rispetto ad N.

Scegliamo allora un sistema di generatori di S tali che ciascuno di essi appartenga a S_j $(j=2, 3, \ldots, k)$ e chiamiamoli $h_1, h_2, \ldots, h_n$. Essi insieme agli elementi di N generano tutto G e costituiscono quindi, secondo il citato teorema di Zappa, un sistema residuo di generatori G rispetto ad N. Scegliamo poi $h_1', h_2', \ldots$ in modo che sia $h_i' = h_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Con queste scelte è ovviamente verificata la condizione c) del teorema di Zappa. Mostriamo ora che sono verificate la a) e la b). Siccome G è un t-gruppo risolubile e finito, $N, S_2, \ldots, S_k$ godono della proprietà [3] che ogni elemento s_j di S_j $(j=2, 3, \ldots, k)$ trasforma tutti gli elementi di N in una medesima potenza. Allora, se x è un elemento di N, si ha $\gamma_i'(x)=\gamma_i(x)=x^s$ e $\gamma[\alpha(x)]=[\alpha(x)]^s$; quindi $\alpha^{-1}\{[\alpha(x)]^s\} = x^s = \gamma_i'(x)$ e anche la a) è verificata. Poichè $h_1, h_2, \ldots, h_n$ sono i generatori di S che non ha elementi, divèrsi dall'identità, comuni con N, si ha $n = \alpha(n) = \alpha^{-1}(n) = 1$ e anche la b) è verificata. Dunque ogni automorfismo di N si può prolungare a tutto G e risulta dimostrato il teorema.

TEOREMA 4. - *Esiste un gruppo finito risolubile e non metaciclico che verifica la condizione* (B).

Consideriamo il gruppo G generato da 4 elementi a_1, a_2, b, c legati dalle relazioni

$$a_1^2 = a_2^2 = b^3 = c^5 = 1,$$

$$(1) \qquad a_1a_2 = a_2a_1, \ bc = cb, \ a_1c = ca_1, \ a_2b = a_2,$$

$$a_1^{-1}ba_1 = b^2, \ a_2^{-1}ca_2 = c^4 .$$

Mostriamo che esso è (finito e) d'ordine 60. Posto $A=\{a_1, a_2\}$, $B=\{b\}$, $C=\{c\}$, si ha che A è quadrinomio (quindi d'ordine 4), mentre B e C sono ciclici d'ordine 3 e 5 rispettivamente. Essendo, per le (1), b permutabile con c, si ha $B \cup C = B \times C$, e tale gruppo risulta ciclico d'ordine 15. Poichè infine, in base alle (1), $B \times C$ è trasformato in sè da a_1 e da a_2, si ha $G=A \cup (B \times C)=A(B \times C)$; essendo poi anche $A \cap (B \times C)=1$, si ha che l'ordine di $A(B \times C)$, cioè di G, è uguale a 60.

Si vede subito che il derivato, G', di G è BC e che G/G' è isomorfo ad A. Perciò G è risolubile e non metaciclico. Di più B e C sono unici nel loro ordine e quindi caratteristici in G; di conseguenza anche $BC = B \times C$ risulta caratteristico in G. Risultano quindi normali in G, B, C, BC e tutti i sottogruppi che contengono BC, cioè, posto $a_3 = a_1 a_2$ e $A_i = \{a_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$, $A_1 BC$, $A_2 BC$, $A_3 BC$ e sono anche normali $A_1 B$ e $A_2 C$, che risultano per di più caratteristici perchè, nel loro ordine, unici sottogruppi normali. Inoltre si controlla facilmente che G non possiede altri sottogruppi normali e, tenuto conto di [3], che G è un t-gruppo. Perciò ogni suo sottogruppo di composizione è normale in G; e quindi per dimostrare che G ha la proprietà (B) basta far vedere che $A_1 BC$, $A_2 BC$, $A_3 BC$ sono caratteristici in G, o cioè, dato che questi sono gli unici sottogruppi di G di ordine 30, che due qualsiasi di essi non sono isomorfi. Ed infatti il centro del primo è C, che ha ordine 5, il centro del secondo è B, che ha ordine 3, mentre il centro del terzo è l'identità.

2. - Vogliamo ora caratterizzare i gruppi risolubili verificanti la condizione (C).

TEOREMA 5. - *Se G è un gruppo che verifica la condizione* (C) *e H è un suo sottogruppo normale anche G/H verifica la condizione* (C).

Sia K/H un sottogruppo normale di G/H (e quindi K un sottogruppo normale di G contenente H) e sia G_r/H un sottogruppo di composizione di G/H. Possiamo, senza limitare la generalità, supporre $G_r/H \supseteq K/H$ (cioè $G_r \supseteq K$) poichè in caso contrario basterebbe sostituire G_r/H con $(G_r \cup K)/H$, che risulta anch'esso di composizione per G/H, e che ha lo stesso omologo di G_r/H nell'omomorfismo, ω, di G/H su $(G/H)/(K/H)$. Allora ω porta G_r/H su $(G_r/H)/(K/H)$. D'altra parte $(G_r/H):(K/H)$ è il corrispondente di G_r/K nell'isomorfismo fra G/K e $(G/H):(K/H)$. Di conseguenza $(G_r/H):(K/H)$ è caratteristico in $(G/H):(K/H)$. Questo significa che G/H verifica la condizione (C).

TEOREMA 6. - *Se G è un gruppo risolubile finito che verifica la condizione* (C) *allora ogni sottogruppo di Sylow di G è ciclico e quindi G è un gruppo metaciclico il cui derivato ha ordine primo con l'indice in G.*

Sia $p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ $(p_1 > p_2 > \ldots > p_k)$ l'ordine di G. Siccome un gruppo che verifica la condizione (C) verifica anche la condizione (B), per il teorema 3, G ammette un solo sottogruppo di Sylow d'ordine $p_1^{\alpha_1}$, S_1, ed esso è normale e ciclico. D'altronde, per il teorema di Hall, G ha un sottogruppo, S, d'ordine $p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Essendo $S_1 \cap S = 1$, $S_1 \cup S = G$, si ha che S è isomorfo a G/S_1 e perciò, per il teorema 5, S verifica le condizioni (B) e (C); di conseguenza, per il teorema 3 S contiene un sottogruppo S_2, d'ordine $p_2^{\alpha_2}$, normale e ciclico e del pari ciclici saranno, pel teorema di Sylow, tutti i sottogruppi d'ordine $p_2^{\alpha_2}$ di G. Così proseguendo si prova che tutti i sottogruppi di Sylow di G sono ciclici. D'altra parte, come abbiamo già ricordato, se tutti i sottogruppi di Sylow di un gruppo G sono ciclici, G è metaciclico e l'ordine del suo derivato è primo con l'indice [6]. Il teorema è così dimostrato.

TEOREMA 7. - *Sia G un gruppo metaciclico finito il cui derivato abbia ordine primo con l'indice in G. Allora G è un gruppo risolubile verificante le condizioni* (A) *e* (C).

Per il risultato di Schenkman [2] si ha che G verifica la condizione (A) [3]. Basta allora dimostrare che G verifica anche la (C). Infatti, se H è un sottogruppo normale di G, si ha subito che anche G/H verifica la (A). D'altra parte una potenza di G è un sottogruppo caratteristico di G; dunque un gruppo che soddisfi la condizione (A) soddisfa anche la (B). Inoltre l'omomorfismo di G su G/H porta un sottogruppo di composizione di G in un sottogruppo di composizione di

---

[3]) È facile vedere che G verifica la (A). Infatti ogni sottogruppo di Sylow di G è ciclico, e quindi, in base a [3], si ha che G è un t-gruppo. Basta allora far vedere che ogni sottogruppo normale di G è una potenza di G e questo si ha facilmente.

G/H, cioè (poichè in G/H vale la (A)) in una potenza di G/H, vale a dire in un sottogruppo caratteristico di G/H.

Per concludere vogliamo ritrovare per i gruppi finiti il risultato di Schenkman.

TEOREMA 8. - *I gruppi risolubili finiti verificanti la condizione* (A) *sono tutti e soltanto i gruppi metaciclici il cui derivato ha ordine primo con l'indice.*

Siccome un gruppo verificante la (A) verifica anche la (C), dal teorema 6 si ha che un gruppo risolubile finito verificante la (A) è un gruppo metaciclico il cui derivato ha ordine primo con l'indice. Dal teorema 7, che indipendentemente da [2] si può dimostrare anche come è accennato nella nota [3]), si ha il resto del teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] ROSATI, L. A.: *Sui gruppi ogni sottogruppo ciclico dei quali è caratteristico.* Boll. U. M. I. s. III, a. XI. n. 4 (1956), pp. 544-552.

[2] SCHENKMAN, E.: *A characterization of some metacyclic groups*, Proc. of the Amer. Mat. Soc., vol. 8, n. 4 (1957), pp. 664-667.

[3] ZACHER, G.: *Caratterizzazione dei t-gruppi finiti risolubili*, Ricerche di Matematica, vol. 1. n. 2 (1952), pp. 287-294

[4] ZAPPA, G.: *Sull'ampliamento degli automorfismi*, Rend. Sem. Mat. Univ. Roma, s. IV, v. 3, (1939), pp. 133-138.

[5] ZAPPA, G.: *Sui gruppi supersolubili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Roma, vol. 2, n. 4 (1938), pp. 323-330.

[6] ZASSENHAUS, H.: *Lehrbuch der Gruppentheorie*, Leipzig. Teubner, 1937.