RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

OCTAV ONICESCU

La mécanique de certaines particules stables

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 322-330

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__322_0>

LA MÉCANIQUE DE CERTAINES PARTICULES STABLES

Nota (*) *di* OCTAV ONICESCU (*a Bucarest*)

§ 1. - La Mécanique inertiale de la particule.

1. Le plus simple type de particule, celui que nous étudions ici, est constitué, au point de vue représentatif, géometrique, par un point P et trois angles α_1, α_2, α_3.

Les caractéristiques inertiales de cette particule sont la la masse relativiste m et un tenseur symetrique $l_{jk}(j, k = 1, 2, 3)$.

Le modèle intuitif C en est donné par une répartition spatiale de masse matérielle autour du centre de masse P et dont l_{jk} sont les moments d'inertie du second ordre.

2. Suivant les principes que nous appliquons ici, l'espace du mouvement est euclidien. La position du point matériel P peut donc être définie par le vecteur position $\bar{r}$ à l'aide des trois coordonnées cartesiennes (x^1, x^2, x^3). Les impulsions p_1, p_2, p_3 seront considérées comme les trois composantes d'un vecteur $\bar{\pi}$. Désignons par α_1, α_2, α_3 les trois angles et par ξ_1, ξ_2, ξ_3 les impulsions relatives.

Les invariants euclidiens du système d'impulsions sont:

$$\omega = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) \tag{1}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad \omega_2 = \frac{1}{2}\theta_2^2, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}\theta_3^2$$

(*) Pervenuta in Redazione il 30 giugno 1958.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico. Università. Bucarest (Romania).

et les trois grandeurs anholonomes φ_1, φ_2, φ_3 dont les variations seules sont définies:

$$(2) \quad \delta\varphi_1 = \theta_2\delta\theta_3 - \theta_3\delta\theta_2, \quad \delta\varphi_2 = \theta_3\delta\theta_1 - \theta_1\delta\theta_3, \quad \delta\varphi_3 = \theta_1\delta\theta_2 - \theta_2\delta\theta_1.$$

La fonction d'état est, suivant les principes, une fonction de ces invariants $H = H(\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ et la forme inertiale sera

$$(3) \qquad \Omega_\delta^{(i)} = \bar{\pi}\delta\bar{r} + \sum_j \theta_j\delta\alpha_j - H\delta t$$

Les équations du mouvement inertial du système expriment, suivant les mêmes principes, que

$$(4) \qquad d\Omega_\delta^{(i)} - \delta\Omega_d^{(i)} = 0$$

quels que soient δx^j, $\delta\alpha_j$, δp_j, $\delta\theta_j$, δt.

Il en résultent les équations canoniques, dont le premier groupe est relatif au mouvement de P,

$$(5) \qquad \dot{x}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial H}{\partial \omega} p_j \qquad (j = 1, 2, 3)$$

et à l'évolution des angles

$$(6) \qquad \begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \frac{\partial H}{\partial \omega_1}\theta_1 - \frac{\partial H}{\partial \varphi_3}\theta_2 + \frac{\partial H}{\partial \varphi_2}\theta_3 \\ \dot{\alpha}_2 &= \frac{\partial H}{\partial \varphi_3}\theta_1 + \frac{\partial H}{\partial \omega_2}\theta_2 - \frac{\partial H}{\partial \varphi_1}\theta_3 \\ \dot{\alpha}_3 &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi_2}\theta_1 + \frac{\partial H}{\partial \varphi_1}\theta_2 + \frac{\partial H}{\partial \omega_3}\theta_3 \end{aligned}$$

Ces équations doivent nous servir a définir θ_1, θ_2, θ_3 et a préciser la forme de H.

3. Pour avoir une indication sur la valeur des coefficients du système (6) faisons appel au modèle intuitif C constitué par une repartition de masse matérielle autour de son centre de masse $P(x^1, x^2, x^3)$.

La partie spatiale de la forme inertiale de ce système est représentée par l'integrale

$$\pi_\delta = \int_C (\dot{\xi}^1 \delta\xi^1 + \dot{\xi}^2 \delta\xi^2 + \dot{\xi}^3 \delta\xi^3) dm$$

qui est la somme des parties spatiales des formes relatives aux parties élémentaires du corps C.

Les $\delta\xi^j$ correspondent aux déplacements solides du système C

$$\begin{aligned} \delta\xi^1 &= \delta x^1 + (\xi^2 - x^2)\delta\alpha_3 - (\xi^3 - x^3)\delta\alpha_2 \\ \delta\xi^2 &= \delta x^2 + (\xi^3 - x^3)\delta\alpha_1 - (\xi^1 - x^1)\delta\alpha_3 \\ \delta\xi^3 &= \delta x^3 + (\xi^1 - x^1)\delta\alpha_2 - (\xi^2 - x^2)\delta\alpha_1 . \end{aligned} \tag{7}$$

Elles mettent en relief les angles α_1, α_2, α_3 qui caractérisent la position de la particule. En les utilisant, π_δ devient

$$\pi_\delta = \sum_j m\dot{x}^j \delta x^j + ((l_{22} + l_{33})\dot{\alpha}_1 - l_{12}\dot{\alpha}_2 + l_{13}\dot{\alpha}_3) d\alpha_1 +$$

$$+ (l_{21}\dot{\alpha}_1 + (l_{33} + l_{11})\dot{\alpha}_2 - l_{23}\dot{\alpha}_3)\delta\alpha_2 + (-l_{31}\dot{\alpha}_1 + l_{32}\dot{\alpha}_2 + (l_{11} + l_{22})\dot{\alpha}_3)\delta\alpha_3$$

où

$$m = \int_C dm \quad ; \quad l_{jk} = \int_C (\xi^j - x^j)(\xi^k - x^k) dm .$$

Si nous assimilions maintenant cette partie avec celle correspondante dans $\Omega_\delta^{(j)}$ donné par (3) nous trouvons d'abord $\bar{\pi} = m\dot{\bar{r}}$ et ensuite les expressions des impulsions angulaires

$$\begin{aligned} \theta_1 &= (l_{22} + l_{33})\dot{\alpha}_1 - l_{12}\dot{\alpha}_2 + l_{13}\dot{\alpha}_3 \\ \theta_2 &= l_{21}\dot{\alpha}_1 + (l_{33} + l_{11})\dot{\alpha}_2 - l_{23}\dot{\alpha}_3 \\ \theta_1 &= - l_{31}\dot{\alpha}_1 + l_{32}\dot{\alpha}_2 + (l_{11} + l_{22})\dot{\alpha}_3 \end{aligned} \tag{8}$$

d'où, en effectuant l'inversion, supposée possible,

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \chi_1\theta_1 - \lambda_3\theta_2 + \lambda_2\theta_3 \\ \dot{\alpha}_2 &= \lambda_3\theta_1 + \varkappa_2\theta_2 - \lambda_1\theta_3 \\ \dot{\alpha}_3 &= - \lambda_2\theta_1 + \lambda_1\theta_2 + \varkappa_3\theta_3 \end{aligned} \tag{9}$$

les χ et λ étant des fonctions rationelles en l_{jk} .

La comparaison de (6) avec (9) nous donne

$$\frac{\partial H}{\partial \omega_j} = \chi_j \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial \varphi_j} = \lambda_j \qquad (j = 1,\ 2,\ 3). \tag{10}$$

D'après leurs expressions les composantes l_{jk}, donc aussi les coefficients χ et λ ne dépendent pas apparement des α_j, donc des θ_j et par cela des ω_j et φ_j. Nous le supposons par *principe.*

Il s'ensuit que H est linéaire par rapport aux ω_j et φ_j:

$$H = \sum_j (\varkappa_j \omega_j + \lambda_j \varphi_j) + L(\omega)$$

où $L(\omega)$ ne dépend pas des ω_j et φ_j.

Pour préciser la forme de $L(\omega)$ retenons maintenant aussi comme un *principe,* que si nous supposons les $\alpha_j(1,\ 2,\ 3)$ nulles au moment initial $t = t_0$ elles restent nulles durant le mouvement: la particule se comporte comme un point de masse m en mouvement inertial.

Mais dans ce cas $H = L(\omega) = mc^2$ avec $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{\dot{r}^2}{c^2}}}$.

Ces deux restrictions, c'est à dire l'indépendence des l_{jk} des vitesses angulaires et le comportement de la particule comme un point quand les vitesses angulaires initiales sont nulles, caractérisent le concept de particule inertiale que nous considérons ici. Elles limitent le rôle de la vitesse de rotation dans l'expression de l'énergie, qui se présente alors sous la forme suivante

$$H = \sum_j (\varkappa_j \omega_j + \lambda_j \varphi_j) + mc^2$$

§ 2. - La Mécanique de la particule dans un champ.

1. La particule définie plus haut dans son état inertial, possède des caractéristiques spéciales relatives au champ: Ce sont sa charge e et les tenseurs $\tau_j (j = 1,\ 2,\ 3)$, $\tau_{hk} (h,\ k = 1,\ 2,\ 3)$ du premier et du second ordre, qui sont des constantes propres à la particule.

En conservant le modèle intuitif C ces tenseurs correspondent au moment du premier et du second ordre par rapport à la répartition de la charge.

Mais pour maintenir une valabilité à ce modèle intuitif nous sommes obligés à supposer — si nous voulons définir des particules du second ordre — que l'extension spatiale de la charge autour de P soit tellement restreinte que les moments d'ordre 3 — par rapport à la charge — soient pratiquement nuls.

2. Etant donnée la structure de la forme inertiale, la forme potentielle de la particule sera

$$\Omega_{\delta}^{(p)} = \bar{A}\,\delta\bar{r} + \sum_{j} B_j \delta\alpha_j + A_0 \delta t \tag{15}$$

où $\bar{A}(x^1, x^2, x^3, t)$ est un potentiel vecteur du point P et $B_j(x^1, x^2, x^3, t)$ $(j = 1, 2, 3)$ sont les trois potentiels relatifs aux angles $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Tous ces potentiels doivent réflecter le champ donné, dériver donc des potentiels ponctuels $\bar{a}$, a_0 du champ et naturellement aussi des caractéristiques de structure de la particule.

La forme potentielle du système C sera [1])

$$\bar{\Omega}_{\delta}^{(p)} = \int_{C} (a_1 \delta\xi^1 + a_2 \delta\xi^2 + a_3 \delta\xi^3 + a_0 \delta t) de \tag{16}$$

où nous avons désigné par $a_j(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$, $j = 1, 2, 3$ les trois composantes du potentiel vecteur a et par $a_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ le potentiel scalaire relatif à l'unité de charge au point ξ^1, ξ^2, ξ^3 et au moment t, l'integration étant effectuée relativement à la charge.

Nous supposons que les fonctions $a_j(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ et $a_0(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t)$ soient continues avec leurs dérivées jusqu'au troisième ordre et que ces dernières soient uniformement li-

[1]) C'est M. Serban Titeica qui m-a attiré l'attention sur le fait fondamental que ces integrales dans le champ doivent être effectuées par rapport à la distribution de charge et non pas par rapport à la distribution de masse.

mitées:

$$
(17) \qquad \left| \frac{\partial^3 a_j}{\partial \xi^h \partial^k \partial \xi^l} \right| < h \qquad \begin{array}{r} h,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3 \\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3. \end{array}
$$

Dans ces conditions on peut développer toutes ces fonctions comme suit

$$
(18) \quad a(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) = a(x^1, x^2, x^3, t) + \sum_h (\xi^h - x^h) \frac{\partial a}{\partial x^h} +
$$

$$
+ \frac{1}{2} \sum_{h,k} (\xi^h - x^h)(\xi^k - x^k) \frac{\partial^2 a}{\partial x^h \partial x^k} +
$$

$$
+ \frac{1}{6} \sum_{h,k,l} (\xi^h - x^h)(\xi^k - x^k)(\xi^l - x^l) \left(\frac{\partial^3 a}{\partial \xi^h \partial \xi^k \partial \xi^l} \right)_{\xi \to x + u(\xi - x)}
$$

avec $|u| < 1$.

Pour $\delta\xi$ nous avons, d'autre part, les expressions (7).

Il s'ensuit que

$$
\overline{\Omega}_\delta^{(p)} = \sum_j \bar{A}_j \delta x^j + \sum \bar{B}_j \delta \alpha_j + A_0 \delta t + \boxed{3}
$$

où

$$
\bar{A}_j = e a_j + \sum_h \varepsilon_h \frac{\partial a_j}{\partial x_h} + \sum_{h,k} \tau_{hk} \frac{\partial^2 a_j}{\partial x^h \partial x^k} \qquad (j = 0,\ 1,\ 2,\ 3)
$$

$$
\bar{B}_1 = \varepsilon_3 a_2 - \varepsilon_2 a_3 + \sum_h \left(\tau_{3k} \frac{\partial a_2}{\partial x^h} - \tau_{2h} \frac{\partial a_3}{\partial x^h} \right)
$$

$$
B_2 = \varepsilon_1 a_3 - \varepsilon_3 a_1 + \sum_h \left(\tau_{1h} \frac{\partial a_3}{\partial x^h} - \tau_{3h} \frac{\partial a_2}{\partial x^h} \right)
$$

$$
\bar{B}_3 = \varepsilon_2 a_1 - \varepsilon_1 a_2 + \sum_h \left(\tau_{2h} \frac{\partial a_1}{\partial x^h} - \tau_{1h} \frac{\partial a_2}{\partial x^h} \right)
$$

ayant posé

$$
e = \int_C de \quad , \quad \varepsilon_h = \int_C (\xi^h - x^h) de \quad ; \quad \tau_{hk} = \int_C (\xi^h - x^h)(\xi^h - x^k) de.
$$

pour les moments d'inertie du premier et du second ordre par rapport à la distribution de la charge, et $\boxed{3}$ étant composé d'un certain nombre de termes, comme par exemple

$$\underset{j,h,k,l}{C} = \int_C (\xi^h - x^h)(\xi^k - x^k)(\xi^l - x^l)\left(\frac{\partial a_j}{\partial \xi^h \partial \xi^k \partial \xi^l}\right)_{\xi \to x + u(\xi - x)} de$$

où des termes relatifs à des produits des différences du $4^{ème}$ ordre.

Or d'après (17) on aura

$$|\underset{j,h,k,l}{C}| < K \int_C |(\xi^h - x^h)(\xi^k - x^h)(\xi^l - x^l)| \, de$$

Il suffira de supposer que, la charge totale e étant finie et τ_{hk} étant pratiquement non nuls, les moments d'inertie absolus du troisième ordre sont tous pratiquement nuls ou de grandeur negligeable comparativement à ceux du second ordre.

Les particules ainsi considérées seront appelées d'ordre deux, ou simplement particules.

Il en est ainsi par exemple si l'étendue spatiale des domaines où la charge est sensible, est caractérisée par des inégalités telles que

$$|\xi^l - x^l| < \frac{1}{c^2} \qquad (l = 1,\ 2,\ 3).$$

Dans ce cas on pourra prendre $A_j = \bar{A}_j$, $B_j = \bar{B}_j$, *et*

$$\Omega_\delta^{(p)} = \Sigma\, \bar{A}_j \delta x^j + \Sigma\, \bar{B}_j \delta \alpha^j + \bar{A}_0 \delta t$$

Si le centre de charge coincide avec le centre de masse, on aura aussi $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$.

§ 3. - Les particules de Dirac.

Pour une classification des particules d'ordre 2 nous devons envisager les caractères des deux formes quadratiques $\Phi = \sum_{h,k} l_{hk} u^h u^k$; $\psi = \sum_{h,k} \tau_{hk} u^h u^k$ et la forme linéaire $\chi = \sum_h \varepsilon_h w^h$.

Nous appelons particules propres celles pour lesquelles le déterminant $|l_{hk}|$ de la forme quadratique positive Φ, est différent de zero, ce qui correpond à l' hypothèse d'une repartition de masse proprement spatiale.

Nous considérons ici seulement le cas où la particule possède une symètrie sphérique aussi bien pour la repartition de masse que pour celle de la charge, ce que nous appelons particule de Dirac. Dans ce cas

$$l_{jj} = l\,(j = 1,\ 2,\ 3),\ l_{hk} = 0 \quad h \neq k\,;$$
$$\tau_{jj} = \tau\,(j = 1,\ 2,\ 3),\ \tau_{hk} = 0 \quad h \neq k\,,$$

et l'on aura

$$\bar{A} = e\bar{a} + \tau\Delta\bar{a} \quad ; \quad \bar{B} = \tau \operatorname{rot} \bar{a}.$$
$$A_0 = ea_0 + \tau\Delta a_0.$$

Les potentiels ponctuels $\bar{a}$ et a_0 déterminent les potentiels de la particule. Il n'est pas sans intérêt de signaler l'étroite correspondance entre ces résultats et les potentiels bien connus de l'électron de Dirac.

Les lois du mouvement de la particule de Dirac.

La dérivée extérieure de $\Omega_\delta^{(p)}$ sera

$$d\Omega_\delta^{(p)} - \delta\Omega_\delta^{(p)} = \left\{ \sum_j \left(\frac{dA}{dt} - \sum_h \dot{x}^h \frac{\partial A_h}{\partial x^j} - \frac{\partial A_0}{\partial x^j} - \sum \frac{\partial B_h}{\partial x^j} \dot{\alpha}_h \right) \delta x^j + \right.$$
$$\left. + \sum_j \frac{dB_j}{dt} \delta\alpha_j + \left(+ \frac{dA_0}{dt} - \sum_j \dot{\alpha}^j \frac{\partial A_j}{\partial t} - \sum \dot{\alpha} \frac{\partial B_j}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial t} \right) \delta t \right\} dt.$$

Les équations du mouvement résultent de l'égalité, pour δ arbitraire, des dérivées extérieures de $\Omega_\delta^{(i)}$; et $\Omega_\delta^{(p)}$:

$$d\Omega_\delta^{(i)} - \delta\Omega_d^{(i)} = d\Omega_\delta^{(p)} - \delta\Omega_d^{(p)}.$$

Il en résulte le système

$$\frac{d(mx_j)}{dt} = \frac{dA_j}{dt} - \sum_h \dot{x}^h \frac{\partial A_h}{\partial x^j} - \frac{\partial A^0}{\partial x^j} - \sum \dot{\alpha}_h \frac{\partial B_h}{\partial x^j} \qquad (j = 1,\ 2,\ 3)$$

$$\frac{d\theta_j}{dt} + \frac{dB_j}{dt} = 0$$

où encore, si nous tenons compte de (20) et supposons τ constant

$$\frac{d(m\dot{r})}{dt} = \bar{l} + \text{rot}\, \bar{A} \times \dot{\bar{r}} - \text{gmd}\, B.$$

$$\bar{\theta} = \tau \,\text{rot}\, \bar{a} + C$$

les composantes du vecteur $\bar{l}$ étant $\frac{\partial A_j}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x^j}$, ayant posé $B = \sum_h \bar{\alpha}_h B_h$, en désignant par $\bar{\theta}$ le systèmes des trois fonctions θ_1, θ_2, θ_3 et par $\bar{C}$ le système des trois constantes C_1, C_2, C_3.

La conservation de l'énergie pour les systèmes conservatifs est exprimée par l'égalité:

$$mc^2 + \sum_j (x_j \omega_j + \lambda_j \varphi_j) - ea_0 - \tau\, \Delta a_0 = \text{constante}$$

Remarques finales.

Des particules du second ordre mais avec un plus grand degré de liberté, par exemple des particules qui sont en état d'expansion, ou de contraction, ou avec des déformations élastiques, en général, peuvent être envisagées avec les mêmes méthodes si nous donnons aux $\delta\xi^j$ une expression adéquate.

Pour les principes de la Mécanique adoptés dans le présent travail on peut lire les articles suivants du même auteur:

O Mecanicà nouà a sistemelor materiale. Revista Universitatii C. J. Parhon si a Politechnicei Bucuresti, vol. 3, 1953.

Sur la Mécanique du point matériel, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. P. R. Tome 1 (49) n. 4, Bucaresti, 1957.

Une mécanique des systèmes inertiaux. Une théorie de la gravitation. Une mécanique des petites distances. Journal of Mathematics and Mechanics, Indiana University, vol. 7, n. 5, September 1958.