RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MAURO PAGNI

Teoremi di unicità e di completezza relativi ad un problema misto tipico per l'equazione del calore

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 31-39

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__31_0>

TEOREMI DI UNICITÀ E DI COMPLETEZZA RELATIVI AD UN PROBLEMA MISTO TIPICO PER L'EQUAZIONE DEL CALORE

Nota (*) *di* MAURO PAGNI (*a Modena*)

Questa Nota fa seguito alla Memoria « *Su un problema al contorno tipico per l'equazione del calore* » [1]).

In [*M*] sono dati teoremi di unicità e di completezza di certi sistemi di funzioni per il problema di derivata obliqua « regolare » relativo alla equazione del calore

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = f(x_1,\, x_2,\, y):$$

nel presente lavoro verranno invece conseguiti teoremi di unicità e di completezza per il problema « misto » consistente nell'assegnare la soluzione u sulla base inferiore del dominio τ, in cui si considera la (I), ancora la u su una parte della superficie laterale s di τ e una combinazione lineare di u e di $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ (derivata obliqua regolare) sulla rimanente parte di s.

(*) Pervenuta in Redazione il 28 settembre 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Modena.

1) Detta Memoria, che verrà indicata brevemente con [M], si trova nel vol. XI degli Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Serie III (1957). Ad [M] si rimanda per la bibliografia.

1. - Sia D un dominio del piano (x_1, x_2) limitato dalla curva semplice e chiusa c_0 e dalle k curve semplici e chiuse $c_1, \dots, c_k$, a due a due prive di punti comuni esterne l'una all'altra ed interne tutte a c_0; $c_0, c_1, \dots, c_k$ essendo inoltre di classe 2 in ogni loro punto.

Fissato $y_0 > 0$ si consideri il cilindro retto determinato dalla base D e dal segmento $0 \leq y \leq y_0$.

Diciamo τ il cilindro ora considerato o più in generale il dominio, dello spazio x_1, x_2, y, che sia ottenuto da questo con deformazione continua in modo da rimanere limitato dai piani $y = 0$ e $y = y_0$, che le sezioni coi piani $y = t$ $(0 \leq t \leq y_0)$ siano dello stesso tipo di D; e che inoltre la superficie laterale s sia di classe 2 in ogni suo punto, con piano tangente che formi con i piani $y = \text{cost}$ un angolo maggiore di un numero $\theta > 0$.

Indichiamo, per $0 < y' \leq y_0$, con $\tau(y')$ il dominio costituito dalla porzione di τ contenuta fra i piani $y = 0$, $y = y'$, con $\sigma(y')$ la frontiera di $\tau(y')$, con $p(0)$ e $p(y')$ rispettivamente la base inferiore e la base superiore di $\tau(y')$ e con $s(y')$ la superficie laterale di $\sigma(y')$ e con $c(y')$ la frontiera di $p(y')$. Si ha evidentemente $\tau(y_0) = \tau$, $s(y_0) = s$.

Per ogni punto M di s sia definito un asse $l(M)$, giacente sul piano passante per M e parallelo al piano (x_1, x_2), penetrante in τ; inoltre i coseni direttori di $l(M)$ siano funzioni di classe 1 del punto M su s.

Poniamo per $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $M \equiv (x_1, x_2, y)$ e $N \equiv (x_1', x_2', y')$ essendo due punti dello spazio tali che $y' > y$,

$$h_{\alpha,\beta}(M, N) = \frac{r^\alpha}{(y' - y)^\beta} e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}, \quad r = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2};$$

e più in generale essendo $\lambda > 0$

$$h^{(\lambda)}_{\alpha,\beta}(M, N) = \frac{r^\alpha}{(y' - y)^\beta} e^{-\frac{\lambda r^2}{4(y'-y)}}.$$

Sia poi $F(M, N)$ la funzione così definita

$$F(M, N) \begin{cases} = h_{0,1}(M, N) & \text{per} \quad y' > y, \\ = 0 & \text{per} \quad y' \leq y. \end{cases}$$

Si ponga ancora

$$E(u) = \Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \left(\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

$$E^*(u) = \Delta_2 u + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Richiamiamo ora per comodità del lettore la definizione della funzione $H(M, N)$ introdotta in $[M]$.

Indicati con $\alpha_1(M)$, $\alpha_2(M)$ i coseni direttori dell'asse $l(M)$ e detta $\nu(M)$ [2]) la conormale, siano $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{v}$ rispettivamente i vettori unitari su $l(M)$, $\nu(M)$, $\boldsymbol{m}$ il vettore unitario uscente da M e di coseni direttori $-\alpha_2(M)$, $\alpha_1(M)$, $\boldsymbol{r}$ il segmento orientato che unisce $(x_1, x_2, 0)$ con $(x_1', x_2', 0)$. Posto per ogni x reale $\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ e detti $M \equiv (x_1, x_2, y)$ un punto di s, $N \equiv (x_1', x_2', y')$ un punto dello spazio e d un opportuno numero positivo [3]), la funzione $H(M, N)$ è così definita:

$$H(M, N) = \frac{\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{v}}{y' - y} e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} - \frac{(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{v})(\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{r})}{(y' - y)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}.$$

---

[2]) La conormale ν_M è la proiezione sul piano caratteristico per M della normale interna n_M. Nel caso del cilindro retto $\nu_M = n_M$.

[3]) d è un qualunque numero positivo se in ogni punto M di s l'asse opposto ad $l(M)$ non ha altro punto a comune con τ. Se ciò non accade per essere s di classe 2 in ogni suo punto M l'asse opposto ad $l(M)$ incontrerà la s in un insieme di punti che ha un primo elemento M_1; la distanza $\overline{MM_1}$ al variare di M su s ha un estremo inferiore positivo δ e d è un qualunque numero positivo minore di δ.

$$\cdot \left\{ \frac{\Phi\left(\dfrac{l \times r}{2(y' - y)^{1/2}}\right) - \Phi\left(\dfrac{l \times r + d}{2(y' - y)^{1/2}}\right)}{e^{-\frac{(l\times r)^2}{4(y'-y)}}} \right\} \quad \text{per} \quad y' > y,$$

$H(M, N) = 0$ per $y' \leq y$.

Sia infine, detta $g(Q)$ una assegnata funzione su s,

$$(1) \qquad 2\pi\delta(Q) + \int_s \delta(M) \frac{\partial H(M, Q)}{\partial l_Q} d_M s = g(Q)$$

l'equazione integrale studiata nel n. 6 di [M] e $K(M, Q)$ il suo nucleo risolvente [4]).

2. - Diamo ora alcuni lemmi.

LEMMA I: *Se la funzione $e(N)$ è di quadrato sommabile su s allora tali sono pure le funzioni*

$$E_1(N) = \int_s e(M) \frac{\partial H(M, N)}{\partial l_M} d_M s, \qquad E_2(N) = \int_s e(M) H(M, N) d_M s,$$

$$E_3(N) = \int_s e(M) K(M, N) d_M s,$$

e riesce, detta L una opportuna costante,

$$\int_s (E_i(N))^2 d_N s \leq L \int_s (e(N))^2 d_N s \qquad (i = 1, 2, 3).$$

La dimostrazione si consegue tenendo presente quanto provato a pag. 103 di [M] e usando gli stessi ragionamenti

---

[4]) Posto $G_n(M, Q) = \int_s G_{n-1}(M, N) \frac{\partial H(N, Q)}{\partial l_Q} d_N s \quad (n = 1, 2, \ldots)$

$G_0(M, Q) = \dfrac{\partial H(M, Q)}{\partial l_Q}$, riesce $K(M, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2\pi)^{n+1}} G_n(M, Q)$.

fatti da E. Magenes nella Nota « *Sull'equazione del calore: Teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo d'integrazione di M. Picone* » (vedi questi Rendiconti, vol. XXI (1942), pp. 136-170) per dimostrare il lemma IV.

LEMMA II: *Se la funzione $e(N)$ è di quadrato sommabile su s, posto*

$$E_2(N) = \int_s e(M)H(M, N)d_M s, \qquad E_4(N) = \int_s e(M)\frac{\partial H(M, N)}{\partial x_1'}d_M s,$$

la funzione $E_2(N)$ è di quadrato sommabile su $p(y_0)$ e in τ e la funzione $E_4(N)$ è di quadrato sommabile in τ; inoltre detta L una opportuna costante si ha

$$\int_{p(y_0)} [E_2(N)]^2 dp(y_0) \leq L\int_s [e(N)]^2 ds,$$

$$\int_\tau [E_i(N)]^2 d\tau \leq L\int_s [e(N)]^2 ds \qquad (i = 2,\ 4).$$

Incominciamo con l'osservare (vedi la 3 bis) di [M]) che per M su s e N di τ, tali che $M \neq N$, si ha

$$|\, H(M, N)\,| \leq Ah_{0,1}(M, N) + Bh_{1,3/2}^{(\lambda)}(M, N)$$

(A, B, λ costanti indipendenti da M e N). D'altra parte

$$h_{1,3/2}^{(\lambda)}(M, N) \leq C_1 h_{0,1}^{(\bar\lambda)}(M, N)$$

dove C_1 è una costante e $\bar\lambda$ è un qualunque numero positivo minore di λ. Si ha allora su s

$$\left|\int_{p(y_0)} H(M, N)H(R, N)d_N p(y_0)\right| \leq C_2 \int_{p(y_0)} h_{0,1}^{(\bar\lambda)}(M, N)h_{0,1}^{(\bar\lambda)}(R, N)d_N p(y_0)$$

dove C_2 è una costante. Riesce, dette y_M ed y_R rispettivamente le coordinate dei punti M ed R e r, $\bar r$, $\rho(M, R)$ le proiezioni dei segmenti MN, RN, $M\bar{R}$ sul piano $y=0$,

$$\int\limits_{p(y_0)} h_{0,1}^{(\bar\lambda)}(M, N) h_{0,1}^{(\bar\lambda)}(R, N) d_N p(y_0) = \frac{1}{(y_0 - y_M)^{1/3}(y_0 - y_R)^{1/3}} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{p(y_0)} \frac{r^{4/3} \bar{r}^{4/3}}{(y_0 - y_M)^{2/3}(y_0 - y_R)^{2/3}} e^{-\frac{\bar\lambda r^2}{4(y_0 - y_M)}} e^{-\frac{\bar\lambda \bar{r}^2}{4(y_0 - y_R)}} \frac{1}{r^{4/3}\bar{r}^{4/3}} dp(y_0) \leq$$

$$\frac{C_3}{(y_0 - y_M)^{1/3}(y_0 - y_R)^{1/3}} \int\limits_{p(y_0)} \frac{1}{r^{4/3}\bar{r}^{4/3}} dp(y_0) \leq \frac{C_4}{(y_0 - y_M)^{1/3}(y_0 - y_R)^{1/3} \rho(M, R)^{2/3}} \cdot$$

Si ha quindi

$$\left| \int\limits_{p(y_0)} H(M, N) H(R, N) d_N p(y_0) \right| \leq \frac{L^1}{(y_0 - y_M)^{1/3}(y_0 - y_R)^{1/3} \rho(M, R)^{2/3}} \cdot$$

Allo stesso modo si ottiene

$$\left| \int\limits_{\tau} H(M, M) H(R, N) d_N \tau \right| \leq L_1 \log \frac{1}{|y_M - y_R|} \log \frac{1}{\rho(M, R)} \cdot$$

Tenuto poi conto della 5 bis) di [M], e precisamente che per M su s e N in $\tau - \sigma$

$$\left| \frac{\partial H(M, N)}{dx_1'} \right| \leq A[h_{1,2}(M, N) + h_{0,3/2}^{(\lambda)}(M, N) + h_{2,5/2}^{(\lambda)}(M, N)] + B$$

(A, B, λ, costanti indipendenti da M e N), procedendo come sopra si ha

$$\left| \int\limits_{\tau} \frac{\partial H(M, N)}{\partial x_1} \frac{\partial H(R, N)}{\partial x_1'} d_N s \right| \leq \frac{L_1}{|y_M - y_R|^{2/3} \rho(M, R)^{2/3}} + L_2 .$$

Quanto osservato permette ora di ripetere i ragionamenti usati da E. Magenes a pag. 155 del su citato Lavoro ed ottenere la completa dimostrazione del lemma in esame.

Si consideri nella classe Γ [5]) (vedi n. 3 di $[M]$) la sotto classe Γ^* per la quale le corrispondenti funzioni $A(M)$ e $B(M)$ sono di quadrato sommabile su s.

Ricordiamo poi che l'equivalenza stabilita nel n. 8 di $[M]$ pone una corrispondenza biunivoca fra le funzioni u di Γ e le funzioni $v(P) = \int_s \delta(M) H(M, P) d_M s$, con δ sommabile su s. Indicata allora con $[\delta]$ la classe delle funzioni δ di quadrato sommabile su s, si vede che, in virtù del lemma I e dei resultati conseguiti nel n. 6 di $[M]$ sulla equazione integrale (1), alle funzioni di Γ^* corrispondono funzioni δ di $[\delta]$ e viceversa.

Detta w una funzione di classe 2 in τ soddisfacente le seguenti condizioni

$$w > 0 \text{ in } \tau; \; E^*(w) \leq 0 \text{ in } \tau; \; a_*^{(l)} \frac{\partial w}{\partial l_*} - b^{(l)} w \leq 0 \text{ su } s \; ^{6)};$$

---

[5]) Γ è l'insieme delle funzioni $u(P)$ che godono delle seguenti proprietà: a) sono soluzioni di $E(u) = 0$ in $\tau - \sigma$; b) preso quasi ovunque su σ un punto M esiste finito il limite $\lim\limits_{P \to M (\text{su } \nu_M +)} u(P) = A(M)$ e $A(M) = 0$ su $p(0)$; c) preso quasi ovunque su s un punto M esiste finito il $\lim\limits_{P \to M (\text{su } \nu_M +)} \dfrac{\partial u(P)}{\partial l_M} = B(M)$; d) $A(M)$ e $B(M)$ sono funzioni sommabili su σ ed s rispettivamente e risultano soddisfatte le equazioni

$$0 = \int_s A(M) a_*^{(l)} \frac{\partial F(M, Q)}{\partial l_M^*} d_M s - \int_s B(M) a^{(l)} F(M, Q) d_M s - \int_{s+p(y_0)} A(M) b^{(l)} F(M, Q) d_M \sigma$$

se Q è esterno a τ, e

$$4\pi u(P) = \int_s A(M) a_*^{(l)} \frac{\partial F(M, P)}{\partial l_M^*} d_M s -$$

$$\int_s B(M) a^{(l)} F(M, P) d_M s - \int_s A(M) b^{(l)} F(M, P) d_M s$$

se P è interno a τ.

[6]) Non è difficile stabilire l'esistenza di una tale w; vedasi ad es. la nota (5) di $[M]$.

sussiste il seguente

LEMMA III: *Nella classe Γ^* vale la seguente identità integrale*

$$(2)\quad \begin{aligned} -\int_s a^{(l)} w A(M)B(M)ds &= \int_\tau w \operatorname{grad}^2 u \, d\tau - \frac{1}{2}\int_\tau u^2 E^*(w) d\tau \\ &- \frac{1}{2}\int_s A(M)^2 \left(a_*^{(l)} \frac{dw}{dl_*} - b^{(l)} w \right) ds + \int_{p(y_0)} A(M)^2 dp(y_0). \end{aligned}$$

Osservato, come sopra si è rilevato, che le u di Γ^* sono della forma $u(P) = \int_s \delta(M) H(M, P) d_M s$, con $\delta(M)$ di quadrato sommabile su s; si approssimi la $\delta(M)$ in media con una successione $\{\delta_n\}$ di funzioni hölderiane e si ponga $u_n(P) = \int_s \delta_n(M) H(M, P) d_M s$. Per i lemmi I e II u_n e le derivate di u_n convergono in media in τ verso u e le derivate di u e le successioni $\{u_n\}$ e $\left\{\frac{\partial u_n}{\partial l}\right\}$ convergono in media ad $A(M)$ e $B(M)$ rispettivamente su σ e su s.

Poichè per la u_n la (2) sussiste [7]), un passaggio al limite prova l'asserto.

Dal lemma III segue ovviamente il seguente teorema di unicità

TEOREMA I: *Decomposto s in due insiemi misurabili s' e s'' esiste in Γ^* solo la funzione $u(P) \equiv 0$ che soddisfi alle*

$$\lim_{P \to M (\text{su } \nu_M^+)} u(P) = 0$$

per quasi tuti gli M di s',

---

[7]) Si ricordi (vedi pag. 101 di [M] o Gevrey [6]) che le $\frac{\partial u_n}{\partial x_1}, \frac{\partial u_n}{\partial x_2}$ sono continue in τ.

$$\lim_{P \to M(\text{su } \nu_M +)} \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial l_M} - h(M) u(P) \right\} = 0$$

per quasi tutti gli M di s'', $h(M)$ essendo una funzione misurabile limitata e non negativa in s''.

3. - Il teorema di unicità sopra conseguito ci permette, per quanto è stato detto nel n. 10 di [M], di dare dei teoremi di completezza hilbertiana per taluni sistemi di funzioni.

Ci limitiamo ad enunciarne due che sono gli analoghi di quelli dati in [M]. Siano f_r le funzioni introdotte nel n. 10 di [M] e siano s' ed s'' due insiemi misurabili in cui è decomposto s; indicata con $\{\Omega_r\}$ la successione di vettori di componenti f_r su $p(y_0)$, $a^{(l)} f_r$ su s', $\left(- a_*^{(l)} \frac{\partial f_r}{\partial l_*} + b^{(l)} f_r + a^{(l)} h f_r \right)$ su s'' (h essendo una funzione misurabile limitata e non negativa su s'') si ha

TEOREMA II: *Il sistema $\{\Omega_r\}$ è completo nella totalità dei vettori G di componenti g_1, g_2, g_3 di quadrato sommabile rispettivamente su $p(y_0)$, su s' e su s''.*

Indicati poi con w_r, come nel n. 10 di [M], i cosiddetti polinomi parabolici omogenei e con $\{\omega_r\}$ il sistema di vettori di componenti w_r su $p(y_0)$, $a^{(l)} w_r$ su s', $\left(a^{(l)} h w_r + b^{(l)} w_r - a_*^{(l)} \frac{\partial w_r}{\partial l_*} \right)$ su s'' vale il seguente

TEOREMA III: *Nell'ipotesi che D sia semplicemente connesso il sistema $\{\omega_r\}$ è completo nella totalità dei vettori di componenti g_1, g_2, g_3 di quadrato sommabile rispettivamente su $p(y_0)$, su s' e su s''.*