RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

B. A. ROSINA

Sugli spazi lineari contenuti in un'ipersuperficie con un punto multiplo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 290-321

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__290_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUGLI SPAZI LINEARI CONTENUTI IN UN'IPERSUPERFICIE CON UN PUNTO MULTIPLO

Nota (*) *di* B. A. ROSINA (*a Ferrara*)

In questa Nota si studiano i sistemi di spazi lineari S_k immersi nell'ipersuperficie generale d'ordine n di uno spazio lineare S_r, dotata di un punto $(n-s)$-uplo.

I risultati sono riassunti al successivo n. 1.

1. - È nota [1]), una condizione necessaria e sufficiente affinchè sulla forma generale F^n_{r-1} di dato ordine n di S_r, giacciano degli spazi lineari S_k, ed è stata pure determinata la dimensione del sistema algebrico degli S_k suddetti.

Si conoscono altresì [2]) delle condizioni necessarie e sufficienti, affinchè i monoidi generali M^n_{r-1} di ordine n di S_r contengano spazi lineari S_k $(k \geq 1)$.

Nel presente lavoro, consideriamo forme di ordine n, di

(*) Pervenuto in Redazione il 10 settembre 1958.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Ferrara.

1) v. *a*) U. MORIN, *Sull'insieme degli spazi lineari contenuti in una ipersuperficie algebrica* [« Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (6), 24 (1936), 188-190].

b) B. SEGRE, *Intorno agli S_k che appartengono alle forme generali di dato ordine* [« Rend. Acc. Naz. dei Lincei », (8), 4 (1848), 261-265, 341-346].

c) A. PREDONZAN, *Intorno agli S_k giacenti sulla varietà intersezione completa di più forme* [« Rend. Acc. Naz. dei Lincei » (8), 5 (1948), 238-242].

2) v. A. PREDONZAN, *Intorno ai sistemi di S_k che appartengono al monoide generale di dato ordine* [« Rend. del Seminario Mat. della Università di Padova » vol. XXI, 2 (1952), 278-292].

uno spazio lineare S_r, con un punto O di molteplicità $n-s$, relativamente alle quali dimostriamo quanto segue:

La forma F^n_{r-1} con un punto $(n-s)$-uplo, di ordine $n \geq 3$ di S_r, contiene tutto al più tre famiglie che indichiamo con i simboli: Σ_1, Σ_2, Σ_3 di spazi lineari S_k $(k \geq 1)$.

Le tre famiglie si distinguono tra loro in quanto contengono spazi S_k che si trovano in diverse posizioni rispetto al punto O^{n-s}.

La famiglia Σ_1 è costituita da quelli S_k di F^n_{r-1} che passano per il punto O^{n-s}. Σ_2 è formata dagli S_k che appartengono agli S_{k+1} situati su F^n_{r-1} e passanti per O. Σ_3, infine, comprende i rimanenti S_k di F^n_{r-1} e quelli di Σ_1, Σ_2, che sono di accumulazione per gli stessi.

Le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di dette tre famiglie sono date rispettivamente da

$$r \geq k + \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{s} \binom{n-i+k-1}{k-1} \tag{1}$$

$$r \geq k + 1 + \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{s} \binom{n-i+k}{k} \tag{2}$$

$$r \geq k + \frac{1}{k+1} \binom{n+k}{k}. \tag{3}$$

Gli S_k di Σ_1, Σ_2 sono in numero finito se, e soltanto se, nella (1), rispettivamente nella (3), vale il segno di uguaglianza, altrimenti essi costituiscono due sistemi algebrici infiniti, irriducibili nel campo di razionalità di F^n_{r-1}, di dimensione rispettivamente

$$D_1 = k(r-k) - \sum_{i=0}^{s} \binom{n-i+k-1}{k-1} \tag{4}$$

$$D_3 = (r-k)(k+1) - \binom{n+k}{k}. \tag{5}$$

Gli S_k di Σ_2 sono, appena sia verificata la (2), sempre infiniti. Essi costituiscono, se nella (2) vale il segno di uguaglianza, un sistema algebrico puro di dimensione $k+1$; nell'altro caso invece, Σ_2 è un sistema algebrico irriducibile nel campo di razionalità di F^n_{r-1}. In entrambi i casi la dimensione di Σ_2 soddisfa alla limitazione:

$$D_2 \leq D_1 + 1 \tag{6}$$

valendo nella (6) il segno di uguaglianza se, e soltanto se, il sistema Σ_2 comprende Σ_1 come parte propria. Affinchè questa eventualità si verifichi è necessario e sufficiente che sia:

$$r \geq k + 1 + \sum_{i=0}^{s} \binom{n-i+k-1}{k} \tag{7}$$

La (7) è pure necessaria e sufficiente perchè il sistema Σ_3 comprenda Σ_2 (di conseguenza Σ_1) come parte propria.

Infine, condizione necessaria e sufficiente perchè Σ_3 comprenda propriamente Σ_1 è che si abbia:

$$r \geq k + 1 + \sum_{i=1}^{s} \binom{n-i+k-1}{k}. \tag{8}$$

Per giungere ai risultati ora enunciati vi è necessità di dimostrare due lemmi che vengono stabiliti nei numeri 5, 6.

Nel primo dimostriamo che condizione necessaria e sufficiente affinchè la generica $V^{n(n-1)\dots(n-s)}_{r-s-2}$ intersezione completa di $s+1$ forme generiche di S_{r-1} degli ordini rispettivi $n, \dots, n-s$ contenga qualche F^{n-1}_{k-1} è che risulti:

$$r \geq k + \frac{1}{k+1}\left[\sum_{i=0}^{s} \binom{n-i+k}{k} - \binom{n-1+k}{k}\right].$$

Nel secondo si dimostra che condizione necessaria e sufficiente affinchè la generica $V^{n(n-1)\dots(n-s)}_{r-s-2}$ contenga delle $V^{(n-1)\dots(n-s)}_{k-s}$ intersezione completa di s forme dello stesso S_k degli ordini $n-1, \dots, n-s$, è che sia:

$$r \geq k + \frac{1}{k+1}\binom{n+k}{k}.$$

Nel corso della trattazione determiniamo inoltre un gruppo di $s-1$ sottofamiglie della famiglia Σ_3 e le loro rispettive dimensioni.

2. - Consideriamo in uno spazio lineare S_r $(x_0, x_1, \dots, x_r)$ una forma di ordine n con un punto O di molteplicità $n-s$. L'equazione della F^n_{r-1}, ove si ponga O nel punto A_r $(0, 0, \dots, 0, 1)$ della piramide fondamentale delle coordinate, sarà del tipo:

$$(9) \qquad \varphi^n(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) + x_r \varphi^{n-1}(x_0, x_1, \dots, x_{r-1}) + \dots \\ \dots + x_r^s \varphi^{n-s}(x_0, \dots, x_{r-1}) = 0$$

dove le φ^i sono forme generali di ordine $n, \dots, n-s$ rispettivamente.

Intersechiamo la F^n_{r-1} con una retta generica l, per O di equazioni parametriche

$$(10) \qquad \begin{cases} x_i = tz_i \\ x_r = 1 + tz_r \end{cases} \qquad (i = 0 \dots r-1).$$

Le coordinate dei punti intersezione di l con F^n_{r-1} si ottengono risolvendo il sistema (9), (10), che ci porta l'equazione in t:

$$\binom{n}{n} \Delta_0^0 f_z t^n + \binom{n}{n-1} \Delta_0^1 f_z t^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-s} \Delta_0^s f_z t^{n-s} = 0$$

ove le Δ_0^i $(i = 1, \dots, s)$ sono le polari i-esime di O rispetto a F^n_{r-1}; esse sono forme aventi tutte il punto O di molteplicità $n-s$, ed ognuna di queste ha in O come cono delle tangenti proprio la stessa polare s-sima. Inoltre per Δ_0^0 si intende la stessa F^n_{r-1}. Osserviamo inoltre che i punti z, appartenenti all'intersezione delle $\Delta^s, \dots, \Delta^i$, mi danno, congiunti con O, la totalità delle rette di S_r che hanno in O un contatto di ordine $n-s+i$ con la F^n_{r-1}.

Intersechiamo ora tutte le polari e la forma F^n_{r-1} con un iperpiano generico S_{r-1} che, senza ledere la generalità del problema, potremo supporre di equazione $x_r = 0$.

Le intersezioni di tale S_{r-1} con le $\Delta^i f_x$ sono $s+1$ forme del tipo: V^{n-s}_{r-2}, V^{n-s+1}_{r-2}, ..., V^n_{r-2}. Esse hanno le equazioni rispettive:

$$\varphi^{n-s}(x_0, \dots, x_{r-1}) = 0, \dots, \varphi^n(x_0, \dots, x_{r-1}) = 0,$$

quindi sono forme generali di S_{r-1}, situate in posizione generica. Determiniamo la loro intersezione completa.

La varietà intersezione completa delle $s+1$ forme avrà dimensione $r-1-s-1=r-s-2$ ed ordine uguale al prodotto degli ordini: $n(n-1)\dots(n-s)$.

Indichiamo quindi tale varietà con il simbolo $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Segue subito che il campo K di razionalità della F_{r-1}^n coincide con quello della $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

3. - Vogliamo ora dimostrare che sulla forma F_{r-1}^n giacciono degli spazi S_k $(k \geq 1)$ per O se, e soltanto se, esistono degli spazi S_{k-1} che appartengono alla varietà $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Inoltre seguirà subito che la dimensione D_1 del sistema degli S_k eguaglia la dimensione del sistema degli S_{k-1} contenuti nella varietà $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Infatti, comunque si consideri un S_k di F_{r-1}^n per O, le sue rette per O hanno in O un contatto di ordine maggiore di $n-1$, quindi appartengono oltre che alla F_{r-1}^n anche a tutte le polari che indichiamo con i simboli $\Delta^1, \dots, \Delta^s$ e quindi l'S_k sarà segato dall'iperpiano S_{r-1} secondo un S_{k-1} che giacerà sulla varietà $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Viceversa, se S_{k-1} appartiene alla $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$, proiettando tale S_{k-1} da O, otteniamo un S_k le cui rette hanno n intersezioni in O ed una sull'S_{k-1} con la F_{r-1}^n, quindi ogni retta appartiene alla predetta forma, ed allora tutto l'S_k appartiene alla F_{r-1}^n.

Concludiamo quindi: affinchè esistano degli S_k di Σ_1 è necessario e sufficiente che esistano degli S_{k-1} giacenti sulla $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ e tale condizione è data da [3])

$$D_1 \geq 0 \tag{11}$$

avendo D_1 il valore dato dalla (4).

Dalla relazione(11), tenuto conto della (4), discende la (1) per cui resta provata la necessità e la sufficienza della condizione.

Gli S_k sono in numero finito se sono in numero finito gli S_{k-1} di $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$, cioè se $D_1=0$; altrimenti essi co-

---

[3]) v. loc. cit. [1]) in *b*).

stituiscono un sistema algebrico irriducibile in K e di dimensione D_1.

4. - Consideriamo la famiglia che indichiamo con Σ_2 la quale comprende quegli S_k che appartengono agli S_{k+1} situati sulla varietà F^n_{r-1} e passanti per O^{n-s}.

Ora affinchè esistano degli S_k appartenenti alla famiglia Σ_2 è necessario e sufficiente che esistano degli S_k giacenti sulla varietà $V^{n(n-1)\dots(n-s)}_{r-s-2}$.

Infatti, come nel caso della famiglia Σ_1, ogni S_{k+1} di F^n_{r-1} per O è tale che le sue rette hanno in O contatto maggiore di $n-1$, quindi esse appartengono oltre che alla F^n_{r-1} anche alle polari $\Delta^1, \dots, \Delta^s$.

Viceversa ogni S_k appartenente alla $V^{n(n-1)\dots(n-s)}_{r-s-2}$ proiettato da O da un S_{k+1} ogni retta del quale ha in O un punto di molteplicità n, ed inoltre ha in comune con la varietà F^n_{r-1} ancora un punto appartenente all' S_k della $V^{n(n-1)\dots(n-s)}_{r-s-2}$, quindi tutta la retta dell' S_{k+1} per O appartiene alla F^n_{r-1}, allora tutto l' S_{k+1} appartiene alla F^n_{r-1}.

Indichiamo con Ω il sistema degli S_k appartenenti alla $V^{n(n-1)\dots(n-s)}_{r-s-2}$ e con Ω^* il corrispondente sistema di spazi S_{k+1} per O giacenti sulla F^n_{r-1}.

Affinchè tali sistemi non siano vuoti è necessario e sufficiente che sia [4])

$$D = (r-k-1)(k+1) - \sum_{i=0}^{s} \binom{n-i+k}{k} \geq 0 \tag{12}$$

dove D indica la dimensione dei sistemi Ω e Ω^*.

Dalla (12) discende la (2).

Il sistema Ω, quindi Ω^*, è finito se $D = 0$. Se vale il segno $>$ il sistema è algebrico infinito, irriducibile nel campo di razionalità della F^n_{r-1}.

Può accadere che il sistema Σ_2 comprenda propriamente il sistema Σ_1.

Dimostreremo che ciò accade quando è verificata la condizione (7). Cioè dobbiamo dimostrare che la (7) è condizione

---

[4]) v. loc. cit. [1]) in *b*).

necessaria e sufficiente affinchè per ogni S_{k-1} di $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ passi almeno un S_k giacente sulla stessa $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Sia allora verificata la condizione (12), o l'equivalente condizione (2). Supponiamo che valga il segno $>$, il sistema Ω, giacchè è irriducibile nel campo di razionalità di F_{r-1}^{n} è un sistema puro.

Indichiamo con $\overline{\Omega}$ una sua componente assolutamente irriducibile. Associamo ora ad ogni S_k di $\overline{\Omega}$ un S_{k-1} giacente su $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ quando questi S_k, S_{k-1} si appartengono.

Si viene così a definire una corrispondenza algebrica irriducibile di dimensione $D+k$, giacchè D è la dimensione degli S_k di $\overline{\Omega}$ e k è la dimensione del sistema lineare degli S_{k-1} contenuti in un S_k. Ne seguirà che sarà pure irriducibile il sistema degli S_{k-1} di $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ che appartengono a qualche S_k di $\overline{\Omega}$, ed avrà dimensione

$$D_1 - \varepsilon \quad \text{con} \quad \varepsilon \geq 0 \tag{13}$$

giacchè è contenuto nel sistema di tutti gli S_{k-1} di $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Indichiamo con δ' la dimensione del sistema algebrico irriducibile degli S_k di $\overline{\Omega}$ passanti per un S_{k-1} generico tra quelli situati sugli S_k di $\overline{\Omega}$.

In virtù del principio del computo delle costanti applicato alla corrispondenza prima enunciata si ha:

$$D + k = D_1 - \varepsilon + \delta' \tag{14}$$

$$\delta' = r - k - 1 - \sum_{i=0}^{s} \binom{n-i+k-1}{k} + \varepsilon \tag{14'}$$

posto

$$\delta = r - k - 1 - \sum_{i=0}^{s} \binom{n-i+k-1}{k} \tag{15}$$

$$\delta' = \delta + \varepsilon \tag{14''}$$

poichè per ipotesi è verificata la (2) si dovrà avere $\delta' \geq 0$, risulterà quindi $\delta' = \delta \geq 0$ se per ogni S_{k-1} giacente su $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ passerà almeno un S_k di Ω.

Se è verificata la $\delta \geq 0$ dalla relazione (15) discende la (7) che volevamo ottenere.

Vogliamo ora studiare la dimensione del sistema Σ_2.

Per far ciò proiettiamo da O gli S_k di Ω, otteniamo un sistema algebrico irriducibile di dimensione D degli S_{k+1} di Ω^*.

Per analogia indichiamo tale sistema con $\bar{\Omega}^*$.

Applichiamo il principio del computo delle costanti alla corrispondenza algebrica irriducibile che associa un S_{k+1} di $\bar{\Omega}^*$ ad un S_k di Σ_2 quando si appartengono.

Tale corrispondenza ha dimensione $D + k + 1$ in quanto $k + 1$ sono gli S_k contenuti in S_{k+1}. Se indichiamo con D_2 la dimensione del sistema algebrico irriducibile Σ_2 degli S_k di Σ_2 che giacciono sugli S_{k+1} di $\bar{\Omega}^*$ avremo:

$$(16) \qquad D + k + 1 = D_2 + \delta'.$$

Da tale relazione, ricordando la (14), la (14″) e la $\varepsilon \geq 0$ discende:

$$(17) \qquad D_2 \leq D_1 + 1.$$

Nella (17) vale il segno inferiore se Σ_2 comprende propriamente Σ_1, cioè se vale la (7), se la (7) non è verificata è verificata la (2), allora esistono degli S_k di Σ_1 per i quali non passa alcun S_{k+1} situato sulla F^n_{r-1} e passante per O.

Ora giacchè il sistema Ω^* è irriducibile nel campo di razionalità di F^n_{r-1}, quando nella relazione (12) vale il segno $>$ sarà pure irriducibile nel campo K il sistema Σ_2. Perciò la dimensione di Σ_2 è uguale a quella D_2 delle sue componenti assolutamente irriducibili.

Se nella relazione (12) vale il segno di uguaglianza, il sistema Σ_2 di dimensione D_2 è un sistema infinito irriducibile, quindi puro, e il numero delle sue componenti irriducibili è uguale a quello finito degli S_k situati su $V^{n(n-1)\dots(n-s)}_{r-s-2}$.

La dimensione D_2 uguaglia allora quella del sistema degli S_k di S_{k+1} e vale pertanto $k + 1$.

5. - I LEMMA.

Nello spazio lineare S_{r-1} $(x_0, x_1, \dots, x_{r-1})$ si consideri la varietà $V^{n(n-1)\dots(n-s)}_{r-s-2}$ intersezione completa di $s + 1$ forme generiche del tipo V^{n-i}_{r-2} $(i = 0 \dots s)$.

Vogliamo dimostrare che: Condizione necessaria e sufficiente affinchè la generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ contenga qualche F_{k-1}^{n-1} di S_k è che:

$$r \geq k + \frac{1}{k+1}\left[\sum_{i=0}^{s}\binom{n-i+k}{k} - \binom{n-1+k}{k}\right] \tag{18}$$

e qualora valga la relazione (18)

$$D = (r-k)(k+1) - \sum_{i=0}^{s}\binom{n-i+k}{k} + \binom{n-1+k}{k} \tag{19}$$

rappresenta proprio la dimensione del sistema delle F_{k-1}^{n-1} giacenti sulla generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Condizione necessaria:

per dimostrare questa prima parte determiniamo la dimensione del sistema delle $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ dell' S_{r-1}.

Indicata con R_i la dimensione del sistema lineare delle V_{r-2}^{n-i} di S_{r-1} si ha:

$$R_i = \binom{n+r-i-1}{r-1} - 1. \tag{20}$$

Ora per la generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ passerà un certo sistema di V_{r-2}^{n-i}, indichiamo con δ_i la dimensione di tale sistema.

Se per brevità di scrittura indichiamo con

$$N_i = R_i - \delta_i = \binom{n+r-i-1}{r-1} - 1 - \delta_i \tag{21}$$

i paramatri da cui dipende nell' S_{r-1} ogni sistema di V_{r-2}^{n-i} passante per la $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$, la dimensione del sistema algebrico irriducibile delle $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ sarà data dalla somma dei vari N_i relativi a tutte le varietà che intervengono nella intersezione e sarà:

$$B = \sum_{i=0}^{s} N_i. \tag{22}$$

L'insieme delle F_{k-1}^{n-1} contenute negli S_k di S_{r-1} costituiscono un sistema razionale, quindi irriducibile di dimensione:

$$a = (r - k - 1)(k + 1) + \binom{n + k - 1}{k} - 1. \tag{23}$$

La totalità delle $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ dell' S_{r-1} che contengono una data F_{k-1}^{n-1} è un sistema algebrico irriducibile di dimensione:

$$b = \sum_{i=0}^{s} N_i - \sum_{i=2}^{s} \binom{n + k - i}{k} - \tag{24}$$

$$- \binom{n + k}{k} + k + 1 - \binom{n + k - 1}{k} + 1$$

e ciò per il fatto che le varietà $V_{r-2}^{n-2} \dots V_{r-2}^{n-s}$ devono avere lo S_k di appartenenza della F_{k-1}^{n-1} come S_k totale, ed inoltre il passaggio per la F_{k-1}^{n-1} impone $\binom{n + k - 1}{k} - 1$ condizioni alla V_{r-2}^{n-1} e $\binom{n + k}{k} - k - 1$ condizioni alla V_{r-2}^{n}. Sia poi

$$c = B - \varepsilon \qquad \varepsilon \geq 0 \tag{25}$$

la dimensione del sistema delle $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ dell' S_{r-1} che passano per qualche F_{k-1}^{n-1}. Se $\varepsilon = 0$ ogni $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ dell' S_{r-1} passa per almeno una F_{k-1}^{n-1}.

Applichiamo il principio del computo delle costanti alla corrispondenza algebrica irriducibile che associa una F_{k-1}^{n-1} ad una $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$, quando la F_{k-1}^{n-1} appartiene alla $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Avremo:

$$a + b = c + d$$

ove d indica la dimensione del sistema algebrico irriducibile nel campo di razionalità della F_{r-1}^{n} delle F_{k-1}^{n-1} che appartengono alla generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ su cui giaccia qualche F_{k-1}^{n-1}.

In virtù delle relazioni (23), (24), (25), (22) avremo:

$$d = (r - k - 1)(k + 1) - \sum_{i=2}^{s} \binom{n + k - i}{k} + \binom{n + k}{k} + k + 1 + \varepsilon$$

$$d = (r - k)(k + 1) - \sum_{i=2}^{s} \binom{n + k - i}{k} - \binom{n + k}{k} + \varepsilon. \tag{26}$$

Se la generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ contiene qualche F_{k-1}^{n-1} necessariamente $\varepsilon = 0$, quindi $d \geq 0$ e dalla (26) discende la (18), il chè prova la necessità di quest'ultima condizione.

Condizione sufficiente

Vogliamo provare che la (18) è pure condizione sufficiente affinchè la generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ contenga delle F_{k-1}^{n-1}.

Seguiamo un ragionamento per assurdo. Sia verificata la (18) e si supponga che la generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ dell' S_{r-1} non contenga delle F_{k-1}^{n-1}. Sarà allora $\varepsilon > 0$ e quindi $d > 0$.

Si consideri un generico S_k dell' S_{r-1}, indichiamolo con $\bar{S}_k$. Entro questo si fissi una generica F_{k-1}^{n-1}, che indichiamo con $\bar{F}_{k-1}^{n-1}$. Per tale $\bar{F}_{k-1}^{n-1}$ passerà un sistema algebrico irriducibile $\bar{\Sigma}$ di $\bar{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di S_{r-1} di dimensione d e la generica $\bar{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di questo sistema sarà generica tra le $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di S_{r-1} che contengono qualche F_{k-1}^{n-1}, pertanto sarà ancora d la dimensione del sistema algebrico Ω_d delle F_{k-1}^{n-1} che giacciono sulla stessa.

Al variare della $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ nel sistema lineare $\bar{\Sigma}$, il sistema Ω_d descrive un sistema algebrico Ω^* eventualmente riducibile in parti di dimensione diversa, che risulta contenuto nel sistema razionale di tutte le F_{k-1}^{n-1} di $\bar{S}_k$ dell' S_{r-1}.

Diciamo $\bar{\Omega}$ una sua componente assolutamente irriducibile di dimensione massima a'.

Sulla base di quanto abbiamo prima affermato sarà $a' \leq a$, cioè:

$$a' = a - \varepsilon_1 \qquad \text{con} \qquad \varepsilon_1 \geq 0$$

Consideriamo ora la corrispondenza algebrica π che associa ad una generica F_{k-1}^{n-1} di Ω una $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di $\bar{\Sigma}$ quando si appartengono. Tale corrispondenza è non degenere su $\bar{\Omega}$ e $\bar{\bar{\Sigma}}$ ed in essa ad elementi generici di Ω corrispondono elementi generici di $\bar{\bar{\Sigma}}$. Inoltre è costante la dimensione del sistema lineare delle $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di Σ che risultano associate in π alla generica F_{k-1}^{n-1} di $\bar{\Omega}$.

Ove si osservi infine, che il sistema algebrico irriducibile, interferenza di tutti i sistemi algebrici irriducibili delle $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di S_{r-1} che contengono le $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ corrispondenti in π alle generiche F_{k-1}^{n-1} di $\bar{\Omega}$, coincide col sistema $\bar{\bar{\Sigma}}$, si può concludere che [5]) anche la corrispondenza π è irriducibile.

Ora le $\overline{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ passanti per una determinata F_{k-1}^{n-1} di Ω si possono pensare ottenute come varietà intersezione delle varietà $V_{r-2}^{n} \dots V_{r-2}^{n-s}$, ad ognuna delle quali sia stato imposto precedentemente il passaggio per la medesima varietà

$$\overline{F}_{k-1}^{n-1} + F_{k-1}^{n-1}.$$

Consideriamo dapprima il caso in cui l' S_k di appartenenza della F_{k-1}^{n-1} generica di $\overline{\Omega}$ sia sghemba con l' $\overline{S}_k$.

Il sistema delle F_{k-1}^{n-1} di Ω avrà dimensione

$$(27)\qquad a' = (r-k-1)(k+1) + \binom{n+k-1}{k} - 1 - \varepsilon_1\,;\ \varepsilon_1 \geq 0.$$

Le $\overline{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ passanti per una generica F_{k-1}^{n-1} di $\overline{\Omega}$ formano un sistema algebrico irriducibile la cui dimensione è:

$$(28)\qquad b' = b - \sum_{i=2}^{s}\binom{n+k-i}{k} - \binom{n+k}{k} + k + 1 - \binom{n+k-1}{k} + 1$$

e non varia al variare di F_{k-1}^{n-1} nell' S_k di S_{r-1}.

Applicando il principio del computo delle costanti alla corrispondenza algebrica irriducibile prima ricordata avremo:

$$a' + b' = b + d$$

e ricordando le (27), (28), (24), (22), otteniamo

$$(29)\qquad \varepsilon + \varepsilon_1 = 0$$

il che è assurdo avendo supposto $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 \geq 0$.

Consideriamo ora il caso in cui l' S_k di appartenenza della F_{k-1}^{n-1} generica di $\overline{\Omega}$ sia incidente ad $\overline{S}_k$ secondo un S_h dove $h < k$.

Nel sistema $\overline{\Omega}$ delle F_{k-1}^{n-1} fissiamone una che indichiamo con F^*. Consideriamo il sistema delle $\overline{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ generiche che passano per F^*, tali $\overline{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ sono $\overline{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ generiche di $\overline{\Sigma}$, ma tali $\overline{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di $\overline{\Sigma}$ non hanno altri punti in $\overline{S}_k$ se non quelli che appartengono alla $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$.

[5]) v. loc. cit. [2]).

Accade ora che la F^* sega su S_h una certa F_{h-1}^{n-1} che per il ragionamento ora fatto deve necessariamente essere contenuta nella $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$.

Si possono però presentare due casi:

1) L' S_k della F^* è incidente a $\overline{S}_k$ secondo un S_h, e tale S_h è di appartenenza per la F_{h-1}^{n-1} contenuta in $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$; ma esso stesso non appartiene alla $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$.

2) L' S_k di F^* è incidente ad $\overline{\overline{S}}_k$ secondo un S_h, che è sempre immerso nella $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ e quindi in F^*.

Infatti per il modo stesso come esso S_h è stato ottenuto, se è immerso nella F_{k-1}^{n-1} esso è costituito da punti di S_k, che appartengono a tutte le $\overline{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ passanti per F^*, quindi sta anche in F^*.

Poniamoci nel primo caso.

1) La dimensione del sistema $\overline{\overline{\Omega}}$ si ottiene ragionando nel modo seguente. Si fissi un qualunque S_h di $\overline{S}_k$, per tale S_h si faccia passare un qualunque S_k di S_{r-1}, entro tale S_k si fissi ancora una F_{k-1}^{n-1} la quale contenga la F_{h-1}^{n-1} segata su S_h da $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$.

Si faccia quindi variare in tutti i modi possibili l' S_h, l' S_k e la F_{k-1}^{n-1}. Avremo:

$$(30) \qquad a'' = (r-k+h)(k-h) +$$

$$+\binom{n+k-1}{k} - 1 - \binom{n+h-1}{h} + 1 - \varepsilon_2 \qquad \text{con } \varepsilon_2 \geq 0.$$

La dimensione del sistema delle $\overline{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ passanti per F^* si ottiene ricordando che la generica $\overline{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di $\overline{\Sigma}$ passa già per la F_{k-1}^{n-1} segata da S_h su F^*, in quanto è contenuta in $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$, e per nessun altro punto di F^*, perchè se così fosse tale ulteriore punto di F^* dovrebbe appartenere ad S_h, quindi F^* dovrebbe contenere tutto l' S_h, ciò che è escluso dalle ipotesi. Avremo allora:

$$(31) \qquad b'' = b - \sum_{i=2}^{s}\binom{n+k-i}{k} + \sum_{i=2}^{s}\binom{n+h-i}{h} - \binom{n+k}{k} +$$

$$+k+1-\binom{n+k-1}{k}+1+\binom{n+h}{h}-h-1+\binom{n+h-1}{h}-1.$$

Applicando il principio del computo delle costanti alla corrispondenza prima enunciata avremo:

$$a''+b''=b+d$$

e in virtù delle (30), (31), (24), (26), otteniamo:

$$(32)\qquad (r-2k+h)(h+1)+\varepsilon+\varepsilon_2=\sum_{i=2}^{s}\binom{n+h-i}{h}+\binom{n+h}{h}.$$

Ricordando l'ipotesi (18) vogliamo dimostrare che dalla (32) segue $\varepsilon=0$.

Ragionando per assurdo supponiamo sempre che sia verificata la (18), ma sia $\varepsilon\geq 1$, avremo allora:

$$(33)\qquad \frac{1}{k+1}\left[\sum_{i=2}^{s}\binom{n+k-i}{k}+\binom{n+k}{k}\right]+\frac{1}{h+1}\leq$$

$$\leq\frac{1}{h+1}\left[\sum_{i=2}^{s}\binom{n+h-i}{h}+\binom{n+h}{h}\right]+k-h.$$

Ora essendo $h<k$ tale relazione è assurda per ogni $n\geq 3$ e qualunque sia h e k.

Analizziamo il secondo caso:

2) Per ottenere la dimensione a''' di $\overline{\Omega}$ dobbiamo fissare dentro all' $\overline{S}_k$ l' S_h, il quale sia contenuto nella $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$, facciamo poi passare per l' S_h un qualunque S_k di S_{r-1}.

Entro l' S_k fissiamo ancora una F_{k-1}^{n-1} la quale contiene ancora la F_{h-1}^{n-1} segata su S_h da $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$, ma essa stessa contiene pure l' S_h.

Sarà allora:

$$(34)\qquad a'''=(r-k+h)(k-h)-$$

$$-\binom{n+h-1}{h}+\binom{n+k-1}{k}-1-\binom{n+h-1}{h}-\varepsilon_3$$

con $\varepsilon_3\geq 0$.

La dimensione del sistema delle $\overline{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ passanti per F^* si ottiene ricordando che la generica $\overline{V}_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di Σ passa già per l' S_h di appartenenza della F_{k-1}^{n-1}, sarà allora

$$(35)\qquad b''' = b - \sum_{i=2}^{s}\binom{n+k-i}{k} + \sum_{i=2}^{s}\binom{n+h-i}{h} - \binom{n+k}{k} + \\ + k + 1 - \binom{n+k-1}{k} + 1 + \binom{n+h}{h} + \binom{n+h-1}{h}.$$

Per il principio del computo delle costanti applicato alla solita corrispondenza avremo:

$$a''' + b''' = d + d$$

ricordando le (34), (35), (24), (26), abbiamo:

$$(36)\qquad (r-2k+h)(h+1) + \varepsilon + \varepsilon_s = \\ = \sum_{i=2}^{s}\binom{n+h-i}{h} - \binom{n+h-1}{h} + \binom{n+h}{h} + h.$$

Ricordando l'ipotesi (18) e supponendo per assurdo che sia $\varepsilon \geq 1$, vogliamo dimostrare che deve essere $\varepsilon = 0$.

Ragionando per assurdo supponiamo sempre che sia verificata la (18), ma sia $\varepsilon \geq 1$, avremo allora:

$$(37)\qquad \frac{1}{k+1}\left[\sum_{i=2}^{s}\binom{n+k-i}{k} + \binom{n+k}{k}\right] + \frac{1}{h+1} \leq \\ \leq \frac{1}{h+1}\left[\sum_{i=2}^{s}\binom{n+h-i}{h} + \binom{n+h}{h} + h\right] - \frac{1}{h+1}\binom{n+h-1}{h} + k - h.$$

Ora tale relazione è assurda, giacchè differisce dalla relazione (33), già dimostrata assurda, per un termine mai negativo.

Discende subito che il sistema delle F_{k-1}^{n-1} contenute nella generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ ha dimensione:

$$D = (r-k)(k+1) - \sum_{i=0}^{s}\binom{n-i+k}{k} + \binom{n-1+k}{k}$$

se $D = 0$ il sistema delle F_{k-1}^{n-1} è finito; se $D > 0$ il sistema è algebrico infinito irriducibile nel campo di razionalità K.

6. - Il Lemma.

Nello spazio lineare S_{r-1} $(x_0, x_1, \ldots, x_{r-1})$ si consideri la varietà $V_{r-s-2}^{n(n-1)\ldots(n-s)}$, intersezione completa di $s+1$ forme del tipo f_i^{n-i} $(x_0, \ldots, x_{r-1})$ $(i=0 \ldots s)$, e la varietà $V_{k-s}^{(n-1)\ldots(n-s)}$ intersezione completa di s forme appartenenti allo stesso S_k degli ordini $n-1, \ldots n-s$.

Vogliamo dimostrare che: Condizione necessaria e sufficiente affinchè la generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\ldots(n-s)}$ dell' S_{r-1} contenga qualche $V_{k-s}^{(n-1)\ldots(n-s)}$ è che sia:

$$r \geq k + \frac{1}{k+1}\binom{n+k}{k} \tag{38}$$

e qualora valga la relazione (38), $D = (k+1)(r-k) - \binom{n+k}{k}$ rappresenta proprio la dimensione del sistema delle $V_{k-s}^{(n-1)\ldots(n-s)}$ giacenti sulla generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\ldots(n-s)}$.

Infatti determiniamo la dimensione del sistema di tutte le $V_{r-s-2}^{n(n-1)\ldots(n-s)}$ dell' S_{r-1}. Per far ciò dobbiamo determinare precedentemente i parametri da cui dipende nell' S_{r-1} ogni singola forma che interviene nella intersezione.

Ogni V_{r-2}^{n-i} $(i = 0 \ldots s)$ dipende nell'S_{r-1} da $\binom{n-i+r-1}{r-1} - 1$ parametri. Ma per la generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\ldots(n-s)}$ passerà un certo sistema di tali V_{r-2}^{n-i}, sistema la cui dimensione indichiamo con il simbolo δ_i. Concludendo avremo: ogni singola V_{r-2}^{n-i} che passa per la $V_{r-s-2}^{n(n-1)\ldots(n-s)}$, dipende nell' S_{r-1} da $\binom{n-i+r-1}{r-1} - \delta_i - 1$ parametri.

La totalità delle V_{r-2}^{n-i} che intervengono nella intersezione, cioè in definitiva la $V_{r-s-2}^{n(n-1)\ldots(n-s)}$ dell' S_{r-1}, costituiscono un sistema algebrico irriducibile la cui dimensione B è data da:

$$B = \sum_{i=0}^{s} \left[\binom{n-i+r-1}{r-1} - \delta_i - 1\right] \tag{39}$$

Sia a la dimensione del sistema di tutte le $V_{k-s}^{(n-1)\ldots(n-s)}$, contenute negli S_k di S_{r-1}. Tale dimenione è data dalla dimensione delle $V_{k-s}^{(n-1)\ldots(n-s)}$ di un generico S_k alla quale va aggiunta la dimensione degli S_k di S_{r-1}, che vale: $(r-k-1)(k+1)$. Per determinare la dimensione del sistema delle $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ contenute in un S_k, si rifà il ragionamento svolto per stabilire la dimensione B, con la sola variante che lo spazio ambiente in questo caso è lo spazio S_k, e le forme che intervengono nella intersezione per formare la varietà $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ sono del tipo V_{k-1}^{n-i} $(i=1\dots s)$ ed inoltre indichiamo ora con σ_i, la dimensione del sistema delle V_{k-1}^{n-i} passanti per la generica $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$. Avremo quindi:

$$(40)\qquad a=\sum_{i=1}^{s}\left[\binom{n-i+k}{k}-\sigma_i-1\right]+(r-k-1)(k+1)$$

si fissi ora un S_k di S_{r-1} e dentro a questo S_k una generica $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$. Le $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$, che passano per la fissata $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ costituiscono un sistema irriducibile la cui dimensione b è data da:

$$(41)\qquad b=\sum_{i=1}^{s}\left[\binom{n-i+r-1}{r-1}-\delta_i-1-\binom{n-i+k}{k}+\sigma_i+1\right]+$$

$$+\binom{n+r-1}{r-1}-\delta_0-1-\binom{n+k}{k}+k-1\,.$$

Ciò che interessa osservare della quantità b è che il suo valore non dipende da quale $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ si sia fissata, fra tutte quelle esistenti nei vari S_k di S_{r-1}.

La corrispondenza algebrica intercedente tra tali $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ e le varietà $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di S_{r-1}, definita dalla relazione di appartenenza è una corrispondenza irriducibile, ed irriducibile è pure il sistema di tutte le $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ che contengono qualche $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$; indichiamo con:

$$(42)\qquad c=B-\varepsilon \qquad\qquad \varepsilon\geq 0$$

la dimensione di detto sistema, dove $\varepsilon=0$, se e soltanto se, ogni $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di S_{r-1} contiene almeno una $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$

Indichiamo con d la dimensione del sistema delle $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ contenute nella generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ del sistema ∞^c.

Il principio del computo delle costanti applicato alla corrispondenza algebrica irriducibile sopra definita, fornisce per d l'espressione:

$$d = a + b - c$$

e in forza dele (36), (37), (38), (35), avremo:

$$(43) \qquad d = (k+1)(r-k) - \binom{n+k}{k} + \varepsilon$$

ponendo per comodità

$$D = (k+1)(r-k) - \binom{n+k}{k}$$ possiamo scrivere:

$$(44) \qquad d = D + \varepsilon$$

Ora se la generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ contiene qualche $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ risulta per quanto prima osservato $\varepsilon = 0$, quindi essendo per sua natura $d \geq 0$ dalla (44) segue la (38), il che prova la necessità della condizione.

La (38) è anche condizione sufficiente. A questo risultato si può pervenire con procedimento analogo a quello seguito per dimostrare la sufficienza della condizione (18) del I Lemma.

Osserviamo inoltre, che nel caso $\varepsilon = 0$, D rappresenta la dimensione del sistema delle $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ contenute in una generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ dell' S_{r-1}.

Se $D = 0$ il sistema è finito, se $D > 0$, esso è infinito irriducibile nel campo di razionalità della F_{r-1}^n.

7. - Vogliamo ora determinare il sistema di spazi S_k, che indichiamo con Σ_3, il quale comprende i rimanenti S_k di F_{r-1}^n e quelli di Σ_1 e di Σ_2 che sono di accumulazione per gli stessi.

Per far ciò, consideriamo uno spazio qualsiasi S_k, appartenente alla F_{r-1}^n, il quale non passi per O^{n-s} e non appartenga ad un S_{k+1} passante per O^{n-s} e situato sulla forma F_{r-1}^n.

L' S_{k+1} che passa per lo spazio S_k e per il punto O^{n-s}, sega la F_{r-1}^n in una F_k^n che si scinde nello spazio S_k, precedentemente fissato, ed in una F_k^{n-1} che in generale avrà in O un punto di molteplicità $n-s$.

Prendiamo in esame la varietà delle rette dello spazio S_r, aventi con la forma F_{r-1}^n un contatto n-punto in O^{n-s}.

Notiamo, che in generale, le rette di tale varietà non appartengono alla F_{r-1}^n, ma fra queste rette vi saranno certamente anche quelle appartenenti alla F_{r-1}^n.

Tale varietà la otteniamo come intersezione completa delle s polari che indichiamo con i simboli Δ_{r-1}^{n-s}, Δ_{r-1}^{n-s+1}, ..., Δ_{r-1}^{n-1}.

Tali polari sono delle forme di dimensione $r-1$ e di ordine rispettivamente $n-s$, $n-s+1$, ..., $n-1$. La varietà intersezione delle s polari sarà una varietà di dimensione $r-s$ e di ordine $(n-1)\ldots(n-s+1)(n-s)$.

Lo spazio S_{k+1} prima considerato sega tale $V_{r-s}^{(n-1)\ldots(n-s)}$ in una $V_{k-s+1}^{(n-1)\ldots(n-s)}$ appartenente allo spazio S_{k+1}. E ciò in quanto ogni Δ_{r-1}^{n-i} $(i=1\ldots s)$ sarà segata dallo stesso S_{k+1} in una Δ_k^{n-i} $(i=1\ldots s)$ e considerando l'intersezione di tutte le Δ_k^{n-i} si ottiene la $V_{k-s+1}^{(n-1)\ldots(n-s)}$.

Ora le rette della varietà $V_{k-s+1}^{(n-1)\ldots(n-s)}$ appartengono alla forma F_k^{n-1}, ottenuta precedentemente come parte della F_k^n e ciò per il fatto che le rette della $V_{k-s+1}^{(n-1)\ldots(n-s)}$ hanno ancora in O un punto col contatto di ordine $n-1$, e quindi appartengono ovviamente alla F_k^{n-1}.

Ma se ogni retta della $V_{k\ s+1}^{(n-1)\ldots(n-s)}$ appartiene alla F_k^{n-1} tutta la varietà apparterrà alla F_k^{n-1}, e quindi apparterrà pure alla forma iniziale F_{r-1}^n.

Seghiamo ora con un iperpiano S_{r-1} la forma F_{r-1}^n e le due varietà $V_{r-s}^{(n-1)\ldots(n-s)}$ e $V_{k-s+1}^{(n-1)\ldots(n-s)}$. Otteniamo come sezione rispettivamente la forma F_{r-2}^n e le varietà $V_{r-s-1}^{(n-1)\ldots(n-s)}$, $V_{k-s}^{(n-1)\ldots(n-s)}$; inoltre, per il modo stesso come tali varietà sono state costruite la $V_{k-s}^{(n-1)\ldots(n-s)}$ appartiene sia alla F_{r-2}^n, come alla $V_{r-s-1}^{(n-1)\ldots(n-s)}$, cioè alla loro intersezione, che indichiamo come nei precedenti numeri, con il simbolo $V_{r-s-2}^{n(n-1)\ldots(n-s)}$.

Osserviamo poi che lo spazio di appartenenza della $V_{k-s}^{(n-1)\ldots(n-s)}$ è l' S_k sezione dell' S_{k+1} con l'iperpiano S_{r-1}.

Viceversa:

Consideriamo sull'iperpiano S_{r-1} una varietà $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ il cui spazio di appartenenza sia un S_k, e che soddisfi alla condizione di appartenere alla varietà intersezione di F_{r-2}^{n} con $\Delta_{r-2}^{n-1}, \dots, \Delta_{r-2}^{n-s}$, cioè appartenga alla $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Consideriamo lo spazio S_{k+1}, congiungente il punto O^{n-s} con lo spazio di appartenenza della $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$, cioè con l' S_k. Tale S_{k+1} sega la forma F_{r-1}^{n} in una F_k^n.

Osserviamo ora che le rette che dal punto O proiettano la $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$, appartengono tutte alla F_k^n. Infatti tali rette essendo state ottenute proiettando da O i punti appartenenti alla $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$, che per ipotesi appartiene alla intersezione di tutte le polari Δ_{r-2}^{n-i} $(i = 1 \dots s)$, avranno in O con la F_k^n un contatto n-punto, ma esse incontrano la F_k^n anche nei punti della $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$, concludiamo allora che le rette appartengono alla F_k^n. Ma dal fatto che le rette appartengono alla F_k^n, ed hanno con essa in O un contatto n-punto, discende che la F_k^nstessa, si spezza in una F_k^{n-1} ed in un S_k, cioè:

$$F_k^n = F_k^{n-1} + S_k$$

possiamo quindi concludere:

Vi è corrispondenza algebrica biunivoca tra gli S_k di F_u^{r-1}, non per O (ai quali vanno aggiunti gli S_k che sono di accumulazione per gli stessi) e le $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ di S_k situate sulla varietà $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di S_{r-1}.

Tale sistema di S_k avrà dunque la dimensione di quello delle $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ appartenenti alla $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ e tale dimensione è data dal lemma II. Sarà allora sempre in virtù dello stesso lemma che: condizione necessaria e sufficiente perchè esistano degli S_k di Σ_3 è che sia:

$$r \geq k + \frac{1}{k+1}\binom{n+k}{k}. \tag{45}$$

Gli S_k di Σ_3 sono in numero finito, se, e soltanto se, nella (45) vale il segno inferiore, altrimenti essi costituiscono un sistema algebrico infinito irriducibile in K di dimensione:

$$D_s = (k+1)(r-k) - \binom{n+k}{k}. \tag{46}$$

Il precedente ragionamento, in quanto si basa sulla esistenza di $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$, vale unicamente se, e soltanto se, risulta $s \leq k$.

Nel caso $s > k$, che ha come analogo nei monoidi quello degli S_0, che in effetti, nella trattazione costituivano caso eccezionale [6], è probabile che la ipersuperficie F_{r-1}^n, avendo O con molteplicità molto piccola rispetto alla dimensione k, si comporti come la ipersuperficie generale di ordine n di S_r, e contenga pertanto un solo sistema di S_k la cui dimensione è data dalla (46).

8. - Nel numero precedente abbiamo indicato il procedimento, attraverso al quale siamo giunti alla determinazione del sistema Σ_3.

Vogliamo ora considerare alcune notevoli sottofamiglie della famiglia Σ_3.

Per far ciò osserviamo che nel caso generale, preso un generico S_k di Σ_3, e condotto per tale S_k e per il punto O uno spazio S_{k+1}, questo segava la F_{r-1}^n in una F_k^n, che si scindeva nell' S_k ed in una forma F_k^{n-1}, passante per O ed avente in O un punto di molteplicità $n-s$. Ora può accadere che, sulla F_{r-1}^n esistano dei particolari S_k, sempre di Σ_3, tali che conducendo per essi e per il punto O il solito S_{k+1} questo seghi la F_{r-1}^n secondo una F_k^n che si scinde nell' S_k fissato ed in una F_k^{n-1}, avente in O, questa volta, un punto di molteplicità $n-s+1$.

Con ragionamenti analoghi, potremo trovare in corrispondenza di altri particolari S_k, delle F_k^{n-1}, passanti per O ed aventi in O un punto di molteplicità $n-s+2, \dots, n-1$. Nell'ultimo caso le forme F_k^{n-1} sono coni.

Tali famiglie di F_k^{n-1}, con $O^{n-s+1}, \dots, O^{n-1}$ costituiscono delle sottofamiglie proprie della famiglia di tutte le F_k^{n-1} determinate in corrispondenza degli S_k della famiglia Σ_3.

Prendiamo in esame la prima di queste sottofamiglie, che indichiamo con Σ_3'. Fissiamo un S_k' di questo sistema, con il

---

6) v. loc. cit. 1) in c).

solito procedimento otteniamo la F_k^{n-1} per O ed avente in O un punto di molteplicità $n-s+1$.

Consideriamo poi come nel caso generale l'intersezione con lo spazio S_{k+1} della varietà di tutte le rette dell' S_r, passanti per O, ed aventi in O un punto di molteplicità n. Otteniamo ancora la varietà $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s)}$. Ma nel nostro caso, anzichè considerare la $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s)}$, sarà sufficiente considerare la $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ e ciò per il fatto che il punto O ha già molteplicità $n-s+1$ per la F_k^{n-1}.

Ogni retta della $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ appartiene alla F_k^{n-1}, quindi la stessa $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ appartiene alla F_k^{n-1} e quindi alla F_{r-1}^n.

Seghiamo la forma F_{r-1}^n e le due varietà $V_{r-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$, $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ con il solito iperpiano S_{r-1}, otteniamo rispettivamente la forma F_{r-2}^n e le varietà $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$, $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$. ora giacchè la $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ apparteneva sia alla F_{r-1}^n come alla $V_{r-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$, anche la sua intersezione con l'iperpiano apparterrà alla F_{r-2}^n ed alla $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$, cioè la $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ apparterrà alla loro intersezione: $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Per quanto riguarda il viceversa del ragionamento, si procede come nel caso generale, con la sola variante di considerare sull'iperpiano S_{r-1} le $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ di S_k, contenute nella $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$, anzichè le $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ di S_k.

C'è quindi corrispondenza biunivoca tra quei particolari S_k' e le $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ di S_k soddisfacenti alla condizione di appartenere alla $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

In forza della predetta biunivocità, la dimensione del sistema delle $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ di S_k appartenenti alla generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di S_{r-1}, eguaglia la dimensione del sistema degli S_k', cioè del sistema Σ_3'.

Prima di determinare la dimensione di tale sistema, dimostriamo che: condizione necessaria e sufficiente affinchè la generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ contenga delle $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ è che sia:

$$r \geq k + \frac{1}{k+1}\left[\binom{n+k}{k} + \binom{n-s+k}{k}\right]. \tag{47}$$

Per tale dimostrazione si fa un ragionamento analogo a quello svolto nella dimostrazione del II lemma. Naturalmente muteranno le dimensioni di quei sistemi ove interviene la varietà $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ in luogo della $V_{k-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$.

Riportiamo per completezza la dimensione B, del sistema delle $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ dell' S_{r-1}:

$$B = \sum_{i=0}^{s}\left[\binom{n-i+r-1}{r-1} - \delta_i - 1\right]. \tag{48}$$

Sia a' la dimensione di tutte le $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ contenute negli S_k di S_{r-1}:

$$a' = \sum_{i=1}^{s}\left[\binom{n-i+k}{k} - \sigma_i - 1\right] - \binom{n-s+k}{k} + \sigma_s + 1 + (r-k-1)(k+1). \tag{49}$$

Sia poi b' la dimensione del sistema delle $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s}$ passanti per una fissata $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$:

$$\begin{aligned} b' = {} & \sum_{i=1}^{s}\left[\binom{n-i+r-1}{r-1} - \delta_i - 1 - \binom{n-i+k}{k} + \sigma_i + 1\right] - \\ & - \binom{n-s+r-1}{r-1} + \delta_s + 1 + \binom{n-s+k}{k} - \\ & - \sigma_s - 1 + \binom{n+r-1}{r-1} - \delta_0 - 1 - \binom{n+k}{k} + \\ & + k + 1 + \binom{n-s+r-1}{r-1} - \delta_s - 1 - \binom{n-s+k}{k} \end{aligned} \tag{50}$$

dove δ_i e σ_i hanno il solito significato.

La grandezza b' non dipende dalla particolare $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ scelta fra quelle contenute negli S_k di S_{r-1}. Come nel caso generale potremo affermare che la corrispondenza algebrica che associa ad ogni $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ un sistema di $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di dimensione costante b', è irriducibile. Sia poi

$$c' = B - \varepsilon' \qquad \varepsilon' \geq 0 \tag{51}$$

la dimensione del sistema delle $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ contenenti qualche $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ dove $\varepsilon' = 0$ se ogni $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ contiene almeno una $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$.

Sia infine d' la dimensione delle $V_{k-s+1}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ contenute in una generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Applicando il principio del computo delle costanti alla corrispondenza prima enunciata, otteniamo:

$$d' = a' + b' - c'$$

e ricordando le (48), (49), (50), (51), avremo:

$$(52) \qquad d' = (r-k)(k+1) - \binom{n+k}{k} - \binom{n-s+k}{k} + \varepsilon'$$

ponendo:

$$D' = (r-k)(k+1) - \binom{n+k}{k} - \binom{n-s+k}{k}$$

avremo:

$$(53) \qquad d' = D' + \varepsilon'.$$

Se la generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ contiene qualche $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$, risulta $\varepsilon' = 0$, ed essendo per sua natura $d' \geq 0$ dalla (53) discende la (47).

Se $\varepsilon' = 0$, D' rappresenta proprio la dimensione del sistema delle $V_{k-s+1}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ contenute in una generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ dell' S_{r-1}.

Gli S_k' di Σ'_3 sono in numero finito se $D' = 0$, se D' è maggiore di 0, essi costituiscono un sistema algebrico infinito, irriducibile nel campo K.

Per determinare la seconda sottofamiglia Σ_3'', (comprendente quegli S_k'', tali che condotto per essi e per il punto O lo spazio S_{k+1} si ottiene come sezione con la F_{r-1}^n una certa F_k^n che si scinde nello spazio S_k'' ed in una F_k^{n-1} passante per O ed avente in O un punto di molteplicità $n-s+2$) si procede in modo analogo a quanto fatto per la famiglia Σ_3', con la sola variante di considerare al posto della varietà $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+1)}$ la varietà $V_{k-s+3}^{(n-1)\dots(n-s+2)}$, e ciò per il fatto che il punto O è ora di molteplicità $n-s+2$ per la F_k^{n-1}. Sul solito iperpiano S_{r-1} avremo ora una $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+2)}$ di S_k contenuta nella $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Ci sarà quindi corrispondenza biunivoca tra le $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+2)}$ di S_k, contenute nella $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ e gli S_k'' di F_{r-1}^n costituenti il sistema Σ_3''.

Dal fatto che la corrispondenza è biunivoca discende che la dimensione del sistema delle $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+2)}$ di S_k, contenute nella $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di S_{r-1} eguaglierà la dimensione del sistema degli S_k'' della sottofamiglia Σ_3''.

Per determinare tale dimensione dimostreremo prima che: condizione necessaria e sufficiente affinchè la generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ dell' S_{r-1} contenga qualche $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+2)}$ è che sia:

$$(54)\quad r \geq k + \frac{1}{k+1}\left[\binom{n+k}{k} + \binom{n-s+k}{k} + \binom{n-s+1+k}{k}\right].$$

Infatti rifacendo il ragionamento svolto nel caso della prima sottofamiglia, ed indicando ora con a'' la dimensione del sistema delle $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+2)}$ contenute negli S_k di S_{r-1}; con b'' la dimensione del sistema delle $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ passanti per una fissata $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+2)}$; con c'' la dimensione delle $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ contenenti qualche $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+2)}$; e con d'' la dimensione delle $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+2)}$ contenute in una generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$, avremo:

$$(55)\quad a'' = \sum_{i=1}^{s}\left[\binom{n-i+k}{k} - \sigma_i + 1\right] - \binom{n-s+k}{k} + \sigma_s + 1 - \\ - \binom{n-s+1+k}{k} + \sigma_{s-1} + 1 + (r-k-1)(k+1)$$

$$(56)\quad b'' = \sum_{i=1}^{s}\left[\binom{n-i+r-1}{r-1} - \delta_i - 1 - \binom{n-i+k}{k} + \sigma_i + 1\right] - \\ - \binom{n-s+r-1}{r-1} + \delta_s + 1 - \binom{n-s+1+r-1}{r-1} + \delta_{s-1} + 1 + \\ + \binom{n-s+k}{k} - \sigma_s - 1 + \binom{n-s+1+k}{k} - \sigma_{s-1} - 1 + \\ + \binom{n+r-1}{r-1} - \delta_0 - 1 - \binom{n+k}{k} + K + 1 +$$

$$+\binom{n-s+r-1}{r-1}-\delta_s-1-\binom{n-s+k}{k}+$$

$$+\binom{n-s+1+r-1}{r\ \ 1}-\delta_{s-1}-1-\binom{n-s+1+k}{k}$$

(57) $$c''=B-\varepsilon'' \qquad \varepsilon''\geqq 0$$

dove $\varepsilon''=0$ solamente se ogni $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ contiene qualche $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+2)}$;

$$d''=a''+b''-c''$$

e ricordando le (55), (56), (57), (48), avremo:

(58) $$d''=(r-k)(k+1)-\binom{n+k}{k}-\binom{n-s+k}{k}-\binom{n-s+1+k}{k}+\varepsilon''$$

posto:

$$D''=(r-k)(k+1)-\binom{n+k}{k}-\binom{n-s+k}{k}-\binom{n-s+1+k}{k}$$

avremo:

(59) $$d''=D''+\varepsilon''.$$

Se $\varepsilon''=0$, essendo sempre $d''\geq 0$ dalla (59) discende la (54); D'' rappresenta la dimensione del sistema delle $V_{k-s+2}^{(n-1)\dots(n-s+2)}$ contenute in una generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Se $D''=0$, gli S_k'' sono in numero finito, se $D''>0$ essi costituiscono un sistema algebrico infinito irriducibile nel campo K.

Proseguendo otterremo in totale $s-1$ di tali sottofamiglie, per l'ultima delle quali seguiremo uno sviluppo particolare.

Per stabilire la dimensione delle rimanenti sottofamiglie, cioè per stabilire le dimensioni che indichiamo simbolicamente con $D'''\dots D^{(s-1)}$, dovremo determinare le rispettive condizioni necessarie e sufficienti, affinche la $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ contenga rispettivamente le varietà $V_{k-s+3}^{(n-1)\dots(n-s+3)}\ ..\ V_{k-2}^{(n-1)\dots(n-2)}$.

Veniamo ora all'ultima sottofamiglia: $\Sigma_3^{(s-1)}$.

Essa comprende quei particolari spazi $S_k^{(s-1)}$ tali che conducendo per essi e per il punto O un S_{k+1}, questo sega la F_{r-1}^n in una F_k^n, che si spezza nell' $S_k^{(s-1)}$ fissato ed in una F_k^{n-1} passante per O ed avente in O un punto di molteplicità $n-1$. Tali F_k^{n-1} sono quindi delle forme più particolari di quelle finora ottenute negli altri casi, esse sono coni con il vertice in O.

Per questa ultima famiglia il procedimento che serve a determinarla, si semplifica rispetto ai procedimenti prima svolti sia per la determinazione del sistema Σ_3, come pure per la determinazione delle prime $s-2$ sottofamiglie.

Infatti, ottenuto il cono F_k^{n-1}, osserviamo che tutte le rette aventi in O contatto n-punto ed appartenenti oltre che alla $V_{r-s}^{(n-1)\dots(n-s)}$ allo spazio S_{k+1}, sono tutte generatrici del cono F_k^{n-1}. Accadrà allora che l'intersezione F_{k-1}^{n-1} della F_k^{n-1} con l'iperpiano S_{r-1}, apparterrà essa stessa alla $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Viceversa: Consideriamo una F_{k-1}^{n-1} di S_k appartenente alla $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ dell' S_{r-1}.

Tale S_k, sarà S_k totale per le V_{r-2}^{n-i} $(i=2\dots s)$, ma non apparterrà in generale nè alla V_{r-2}^{n-1} nè alla F_{r-2}^n.

Proiettiamo l' S_k ambiente della F_{k-1}^{n-1} dal punto O, otteniamo un S_{k+1} il quale non giace sulla F_{r-1}^n, ma la sega secondo una F_k^n.

Ora la F_{k-1}^{n-1}, contenuta nell' S_k proiettata da O dà luogo ad una F_k^{n-1} che è un cono con vertice in O, inoltre ogni generatrice di questo cono, poichè F_{k-1}^{n-1} sta sulla intersezione delle polari, ha in O un contatto n-punto, e quindi sta sulla F_{r-1}^n. Da ciò segue che il cono F_k^{n-1} sta sulla F_{r-1}^n, per cui la F_k^n, si scompone in questa F_k^{n-1} ed in un S_k.

Avremo quindi una corrispondenza algebrica biunivoca, tra le F_{k-1}^{n-1} di S_k, contenute nella $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ e gli $S^{(s-1)}$ di F_{r-1}^n costituenti il sistema $\Sigma_3^{(s-1)}$.

Dal fatto che la corrispondenza è biunivoca, discende che la dimensione del sistema delle F_{k-1}^{n-1} di S_k, contenute nella $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di S_{r-1}, eguaglia la dimensione del sistema degli $S_k^{(s-1)}$ della famiglia $\Sigma_3^{(s-1)}$.

Tale dimensione è data dal lemma I.

Sarà allora sempre in virtù dello stesso lemma che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè esistano degli $S_k^{(s-1)}$ di $\Sigma_s^{(s-1)}$ è che sia:

$$(60) \qquad r \geq k + \frac{1}{k+1}\left[\sum_{i=0}^{s}\binom{n+k}{k} - \binom{n-1+k}{k}\right].$$

Gli $S_k^{(s-1)}$ di $\Sigma_s^{(s-1)}$ sono in numero finito, se e soltanto se, nella (60) vale il segno inferiore, altrimenti essi costituiscono un sistema algebrico infinito irriducibile in K di dimensione:

$$(61) \qquad D^{(s-1)} = (k+1)(r-k) - \sum_{i=0}^{s}\binom{n+k}{k} + \binom{n-i+k}{k}.$$

9. - Vogliamo ora stabilire le relazioni che intercorrono fra il sistema Σ_3 e i sistemi Σ_1 e Σ_2.

Per far ciò consideriamo la sottofamiglia $\Sigma_3^{(s-1)}$ della famiglia Σ_3.

Se riusciremo determinare delle relazioni di appartenenza delle famiglie Σ_1, Σ_2 alla sottofamiglia $\Sigma_3^{(s-1)}$, allora saremo riusciti a determinare le relazioni di appartenenza delle due prime famiglie alla Σ_3, giacchè $\Sigma_3^{(s-1)}$ è sottofamiglia della Σ_3.

Indichiamo con Ω il sistema delle F_{k-1}^{n-1} di S_k contenute in una generica $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ di S_{r-1}. Supponiamo che il sistema Ω sia infinito, indichiamo allora con $\overline{\Omega}$ una sua componente assolutamente irriducibile.

Sia $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ una forma appartenente alla $\overline{\Omega}$ tale che il suo spazio ambiente $\overline{S}_k$ seghi la varietà $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ nella $\overline{F}^{n-1}_{-1}$ stessa ed in un S_{k-1}.

L' $\overline{S}_k$ sarà di conseguenza S_k totale per ogni varietà V_{r-2}^{n-i} $(i = 1 \dots s)$, e quindi sarà S_k totale pure per la loro intersezione $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$, mentre non è contenuto nella $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Supponiamo ancora che per il suddetto S_{k-1} non passi alcun S_k giacente sulla varietà $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

La corrispondenza biunivoca che associa ad ogni F_{k-1}^{n-1} di Ω un $S_k^{(s-1)}$ di $\Sigma_3^{(s-1)}$ associerà a questa $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ un S_k^* che appartiene a Σ_1, ma non a Σ_2, ed è intersecato dall' S_{r-1} nell' S_{k-1}, prima considerato. La $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ è di accumulazione per le F_{k-1}^{n-1}

generiche di Ω per cui anche l' S_k è di accumulazione per gli $S_k^{s-1)}$ di $\Sigma_3^{(s-1)}$, che corrispondono alle stesse F_{k-1}^{n-1}, generiche ed appartiene perciò al sistema $\Sigma_3^{(s-1)}$, e quindi al sistema Σ_3.

Viceversa, se un S_k di Σ_1, ma non di Σ_2, appartiene al sistema $\Sigma_3^{(s-1)}$, e quindi al sistema Σ_3, esso è di accumulazione per quegli $S_k^{(s-1)}$ di $\Sigma_3^{(s-1)}$, che provengono dalle generiche F_{k-1}^{n-1} del sistema Ω. Tale S_k^* può quindi ottenersi attraverso alla corrispondenza biunivoca prima ricordata, da qualche F_{k-1}^{n-1} di $\overline{\Omega}$, il cui spazio di appartenenza, dovendo segare la $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ nell' S_{k-1} sezione di S_k^* con S_{r-1}, e nella F_{k-1}^{n-1} stessa, deve giacere sulla $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$ ma non sulla $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Non ci saranno poi degli S_k passanti per l' S_{k-1} ora considerato, e situati su $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$, perchè in tal caso l' S_k verrebbe ad appartenere anche a Σ_2.

Concludiamo quindi che:

I) Condizione necessaria e sufficiente perchè un S_k di Σ_1, ma non di Σ_2, appartenga al sistema Σ_3 che è che per l' S_{k-1}, sezione dell' S_k stesso con l' S_{r-1}, passino degli S_k situati su $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$, ma nessuno di questi giaccia su $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Supponiamo in secondo luogo, che la $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ di $\overline{\Omega}$ abbia l' $\overline{S}_k$ situato su $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$. Tale F_{k-1}^{n-1} può essere dedotta da una generica F_{k-1}^{n-1} di $\overline{\Omega}$, quando quest'ultima varia in un sistema continuo Γ di F_{k-1}^{n-1} tutte generiche in $\overline{\Omega}$ ad eccezione della $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ ora considerata.

Alle generiche F_{k-1}^{n-1} di Γ corrispondono, dei ben determinati $S_k^{(s-1)}$ di $\Sigma_3^{(s-1)}$, quindi al limite quando la generica F_{k-1}^{n-1} tende, lungo il sistema Γ stesso, alla F_{k-1}^{n-1}, l' $S_k^{(s-1)}$ corrispondente tende ad un S_k^* ben determinato, che per il particolare modo con cui è stato ottenuto, è di accumulazione per gli $S_k^{(s-1)}$ generici di una componente assolutamente irriducibile di $\Sigma_3^{(s-1)}$, ed appartiene quindi al sistema $\Sigma_3^{(s-1)}$, ed infine al sistema Σ_3 stesso. L' S_k^* medesimo, in quanto la $\overline{F}_{k-1}^{n-1}$ ha l' $\overline{S}_k$ ambiente che giace su $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$, è situato sull' S_{k+1} che congiunge O con $\overline{S}_k$ e quindi appartiene pure al sistema Σ_2.

Lo stesso S_k^* sega poi l' S_{r-1} in un S_{k-1} situato su $\bar{S}_k$, quindi su $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Inversamente se un S_k^* di Σ_2 appartiene anche al sistema $\Sigma_3^{(s-1)}$, e quindi al sistema Σ_3 esso deve potersi ottenere come posizione limite di $S_k^{(s-1)}$ di $\Sigma_3^{(s-1)}$ corrispondenti a generiche F_{k-1}^{n-1} di una componente assolutamente irriducibile, Ω, di Ω.

Dovrà quindi esistere una $\bar{F}_{k-1}^{n-1}$ di $\bar{\Omega}$ tale che, quando la generica F_{k-1}^{n-1} di $\bar{\Omega}$ tende lungo un sistema continuo Γ di F_{k-1}^{n-1} generiche alla $\bar{F}_{k-1}^{n-1}$ stessa, il corrispondente $S_k^{(s-1)}$ di $\Sigma_3^{(s-1)}$ tende a S_k^*.

Proiettando la $\bar{F}_{k-1}^{n-1}$ da O si otterrà una F_k^{n-1} il cui S_{k+1} di appartenenza dovrà contenere l' S_k^*. e giacere su F_{r-1}^n.

Tale S_{k+1} sarà quindi segato dall' S_{r-1} secondo uno spazio $\bar{S}_k$ che sarà situato su $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$, ed al quale appartengono la F_{k-1}^{n-1} e l' S_{k-1} sezione di S_k^* con l' S_{r-1}.

Possiamo pertanto affermare che:

II) Condizione necessaria e sufficiente perchè un S_k di Σ_2 appartenga anche al sistema Σ_3 è che esso seghi l' S_{r-1} in un S_{k-1} per il quale passi almeno un S_k giacente sulla varietà $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$.

Dalle proposizioni I) e II) prima enunciate, seguono le seguenti condizioni:

III) Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema Σ_3 comprenda propriamente Σ_1, è che per ogni S_{k-1} giacente su $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ passi almeno un S_k situato su $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$.

IV) Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema Σ_3 comprenda propriamente Σ_2, è che per ogni S_{k-1} giacente su $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ passi almeno un S_k situato sulla varietà $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ stessa.

La condizione della proposizione IV) è data dalla (7), come risulta da quanto detto nel n. 4.

Dallo stesso numero discende poi, che in questo caso Σ_2 contiene propriamente Σ_1, cioè sulla forma F_{r-1}^n vi è una sola famiglia Σ_3 di spazi lineari S_k, che comprende come sottofamiglia Σ_2, la quale a sua volta contiene Σ_1.

Per quanto riguarda la proposizione III) osserviamo che l' S_{k-1} generico per una componente assolutamente irriducibile del sistema degli S_{k-1} giacenti su $V_{r-s-2}^{n(n-1)\dots(n-s)}$ è pure generico per una componente assolutamente irriducibile del sistema degli S_{k-1} situati su $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$, si può pertanto affermare che la condizione della proposizione III) equivale a quella che ogni S_{k-1} di $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$ passi un S_k situato sulla $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$ stessa.

Vogliamo dimostrare che tale condizione è espressa dalla relazione:

$$r \geq k + 1 + \sum_{i=1}^{s} \binom{n-i+k-1}{k} \tag{62}$$

Infatti indichiamo con $\mathfrak{d}$ il sistema degli S_k contenuti sulla $V_{-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$ di S_{r-1}.

Come è noto [2] il sistema $\mathfrak{d}$ avrà dimensione:

$$D = (k+1)(r-k-1) - \sum_{i=1}^{s} \binom{n-i+k}{k} \tag{63}$$

Supponiamo sia $D > 0$.

Il sistema $\mathfrak{d}$, in quanto irriducibile nel campo K, risulta puro.

Sia $\bar{\mathfrak{d}}$ una sua componente assolutamente irriducibile.

Associamo ad un S_k di $\mathfrak{d}$ un S_{k-1} giacente su $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$, quando si appartengono. Si viene così a definire, una corrispondenza algebrica irriducibile di dimensione $D+k$. Ne segue che è pure irriducibile il sistema degli S_{k-1} di $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$ che appartengono a qualche S_k di $\bar{\mathfrak{d}}$ ed ha dimensione

$$D_1 - \varepsilon \qquad \text{con } \varepsilon \geq 0$$

dove $\varepsilon = 0$ se, e soltanto se, per ogni S_{k-1}, di $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$ passa qualche S_k di $\mathfrak{d}$ e dove:

$$D_1 = k(r-k) - \sum_{i=1}^{s} \binom{n-i+k-1}{k-1} \tag{64}$$

rappresenta la dimensione del sistema degli S_{k-1} situati su $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$.

In virtù del principio del computo delle costanti, applicato alla corrispondenza ora considerata si ha:

$$D + k = D_1 - \varepsilon + \mu' \tag{65}$$

μ' indicando la dimensione del sistema algebrico degli S_k di $\bar{\delta}$ passanti per un S_{k-1} scelto genericamente tra quelli situati sugli S_k di $\bar{\delta}$.

Dalla (65) tenuto conto delle (63), (64), si ha:

$$\mu' = \mu + \varepsilon \tag{66}$$

dove si è posto

$$\mu = r - k - 1 - \sum_{i=1}^{s} \binom{n - i + k - 1}{k}. \tag{67}$$

Poichè per ipotesi la (63) è verificata, si dovrà avere $\mu' \geq 0$ e risulterà quindi $\mu = \mu' \geq 0$ se, e soltanto se, per ogni S_{k-1} giacente su $V_{r-s-1}^{(n-1)\dots(n-s)}$ passerà almeno un S_k di δ.

Dalla $\mu \geq 0$ consegue, ricordando la (67), la (62), la cui necessità e sufficienza perchè Σ_3 comprenda propriamente Σ_1, resta pertanto provata.