Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Letizia Dal Soglio

Sulla nozione di grado e di coefficiente di allacciamento per mappe ponderate

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 280-289

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__280_0>

SULLA NOZIONE DI GRADO E DI COEFFICIENTE DI ALLACCIAMENTO PER MAPPE PONDERATE

Nota (*) *di* LETIZIA DAL SOGLIO (*a Padova*)

In questa nota estendo al caso di mappe *ponderate* [1]) alcune nozioni e risultati classici relativi a trasformazioni continue, quali, ad esempio, la nozione di grado per una trasformazione di una $(n-1)$-sfera in sè, ed il teorema di Brouwer. Definisco inoltre il coefficiente di allacciamento per una coppia (*disgiunta*) di mappe di una $(n-1)$-sfera in uno spazio euclideo n-dimensionale R^n, nozione questa che permette di stabilire un teorema sulle coincidenze (per mappe ponderate), e, come corollario, un criterio di esistenza di punti uniti per una mappa di una n-cella in R^n.

1. - In questo lavoro useremo le notazioni e le definizioni di carattere generale già introdotte nella memoria citata in [1]), ed in particolare quindi scriveremo $f: X \rightharpoondown Y$, con X ed Y spazi di Hausdorff, per indicare che f è una mappa ponderata di X in Y; con $\mathcal{C}_f$ denoteremo il supporto minimale di f [2]).

L'anello dei coefficienti Λ sarà fissato sin dall'inizio.

(*) Pervenuta in Redazione il 14 giugno 1958.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

[1]) Per la definizione di mappa ponderata, come per altre nozioni che ad essa si ricollegano, si veda G. DARBO, *Teoria dell'omologia in una categoria di mappe plurivalenti ponderate.* Questi Rendiconti, vol. XXVIII, pp. 188-220.

[2]) Cfr. loc. cit. in [1]), pag. 191.

Inoltre con R^n indicheremo lo spazio numerico n-dimensionale, con E^n la n-cella unitaria (cioè l'insieme dei punti $x \in R^n$ per cui $\| x \| \leq 1$), con S^{n-1} la $(n-1)$-sfera contorno di E^n.

Def. 1. - Data $f: X \to Y$, se $A \subset X$, definiamo la restrizione di f su A, $f \mid A: A \to Y$, ponendo $f \mid A = fi$, con $i: A \to X$, mappa d' inclusione.

Def. 2. - Se la mappa $f: X \to Y$ si può fattorizzare nel modo seguente:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "j"] & \\ X \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

in cui è $B \subset Y$ e j la mappa d'inclusione, diremo che f' è subordinata dalla f mediante restrizione del codominio a B. In tal caso la f' è determinata dalla f e da B.

Affinchè la f ammetta una tale mappa subordinata è sufficiente che si abbia: $\mathfrak{G}_f(x) \in B$ per ogni $x \in X$.

Def. 3. - La mappa *diagonale* che indicheremo con $diag: X \to X \times X$, è definita da $diag(x) = x \times x$, per $x \in X$.

Def. 4. - Indicheremo con $D: R^n \times R^n \to R^n$ la mappa univalente definita da $D(x \times y) = y - x$, dove la differenza $y - x$ è intesa nel senso vettoriale.

2. - Data $f: X \to Y$, l'elemento di Λ, $Y * f(x)$ [3]) (somma dei coefficienti di $f(x)$), che chiameremo indice della f nel punto x, è una funzione di x localmente costante, e quindi si riduce ad una costante se X è connesso. In quest'ultimo caso lo indicheremo con $\mathfrak{In}(f)$.

---

[3]) Cfr. loc. cit. in [1]), pag. 189.

LEMMA I. - *Se* $i: S^{n-1} \to S^{n-1}$ *è la mappa identica, e* λ *un elemento non nullo di* Λ, *allora la mappa* $\lambda i: S^{n-1} \to S^{n-1}$, *non si può estendere ad una mappa* $\varphi: E^n \to S^{n-1}$.

In caso affermativo infatti la commutatività varrebbe nel diagramma:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{H}_{n-1}(E^n) \arrow[dr, "\varphi_*"] & \\ \mathcal{H}_{n-1}(S^{n-1}) \arrow[ur] \arrow[rr, "\lambda i_*"'] & & \mathcal{H}_{n-1}(S^{n-1}) \end{tikzcd}$$

ed essendo $\mathcal{H}_{n-1}(E^n) \approx 0$, $\mathcal{H}_{n-1}(S^{n-1}) \approx \Lambda$, $(n > 1)$, ne seguirebbe $\lambda i_* = 0$ da cui $\lambda = 0$, contro l'ipotesi. Il caso $n = 1$ segue da analoghe considerazioni sui gruppi ridotti d'omologia [4]).

Possiamo ora generalizzare il teorema di Brouwer alle trasformazioni punto-insieme finito, nella forma seguente:

TEOREMA I. - *Se* t *è supporto* [5]) *di una mappa* $f: E^n \to E^n$ *con* $\mathfrak{In}(f) \neq 0$, *esiste un punto* $x_0 \in E^n$ *tale che* $x_0 \in t(x_0)$.

Ammettiamo per assurdo che, per ogni $x \in E^n$, $x \notin t(x)$. La mappa ottenuta per composizione di:

$$E^n \xrightarrow{diag} E^n \times E^n \xrightarrow{E^n \times f} E^n \times E^n$$

subordina allora, per restrizione del codominio ad $E^n \times E^n - \Delta$, Δ essendo la diagonale del prodotto $E^n \times E^n$, una mappa:

$$\eta : E^n \longrightarrow E^n \times E^n - \Delta .$$

Si consideri la mappa univalente $\zeta: E^n \times E^n - \Delta \to S^{n-1}$, che associa al punto $(x \times y) \in E^n \times E^n - \Delta$, il punto

---

[4]) Per la nozione di gruppo ridotto d'omologia si veda: EILENBERG-STEENROD, *Foundations of algebraic topology* (Princeton University Press, 1952), pp. 18 e segg. e p. 46).

[5]) Cfr. loc. cit. in [1]), pag. 191.

$\zeta(x \times y) \in S^{n-1}$, intersezione della semiretta uscente da y e passante per x con S^{n-1}.

Posto: $g = \zeta\eta : E^n \to S^{n-1}$, si ha, per $x \in S^{n-1}$:

$$g(x) = \zeta\eta(x) = \zeta(E^n \times f)\, diag\,(x) = \zeta(x,\ f(x)) = \mathfrak{I}n(f)\cdot x.$$

Ma allora $g : E^n \to S^{n-1}$ sarebbe una estensione della mappa:

$$\mathfrak{I}n(f)i : S^{n-1} \to S^{n-1}$$

con i identità ed $\mathfrak{I}n(f) \neq 0$, in contrasto col lemma precedente.

3. - Una mappa $f : X \to Y$ è *localmente* costante se ammette una fattorizzazione del tipo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \\ & P_0 \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

con P_0 spazio puntiforme.

DEF. 6. - Dicesi *inessenziale* una mappa σ-omotopa ad una mappa *localmente costante*.

OSS. I. - Il prodotto di due mappe di cui una almeno sia inessenziale è inessenziale.

Infatti se $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ed f è inessenziale, sarà $f \backsim \psi\varphi$ con $X \xrightarrow{\varphi} P_0 \xrightarrow{\psi} Y$ (P_0 spazio puntiforme), quindi $gf \backsim g(\psi\varphi) = (g\psi)\varphi$, vale a dire gf è inessenziale. Se è invece g inessenziale, cioè se $g \backsim \psi'\varphi'$ con $Y \xrightarrow{\varphi'} P_0 \xrightarrow{\psi'} Z$, $gf \backsim (\psi'\varphi')f = \psi'(\varphi'f)$ ed anche in questo caso gf è inessenziale poichè $X \xrightarrow{\varphi' f} P_0 \xrightarrow{\psi'} Z$.

LEMMA II. - *Se* $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$ *e* $\mathcal{C}_f(S^{n-1}) \neq S^{n-1}$, f *è inessenziale.*

DIMOSTRAZIONE. - Sia y_0 un punto di $S^{n-1} - \mathcal{C}_f(S^{n-1})$ ed f' la mappa subordinata dalla f mediante restrizione del codominio ad $S^{n-1} - y_0$. Allora è $f = jf'$, dove j è l'inclusione $S^{n-1} - y_0 \subset S^{n-1}$. Ma, essendo $S^{n-1} - y_0$ contrattile in sè, j è inessenziale e pertanto, per l'oss. precedente, anche f risulta inessenziale.

Si consideri una mappa $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ $(n > 1)$. Poichè $\mathcal{H}_{n-1}(S^{n-1}) \approx \Lambda$ ed $f_* : \mathcal{H}_{n-1}(S^{n-1}) \to \mathcal{H}_{n-1}(S^{n-1})$ è un Λ-omomorfismo, esiste uno ed uno solo elemento $\varkappa \in \Lambda$ tale che, per ogni $u \in \mathcal{H}_{n-1}(S^{n-1})$, $f_* u = \varkappa u$. Chiameremo $\varkappa$ grado di f e lo indicheremo con $\mathrm{grad}(f)$.

Oss. II. - Si osservi che:

1) Se $f \backsim g$ allora $\mathrm{grad}(f) = \mathrm{grad}(g)$

2) $\mathrm{grad}(fg) = \mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{grad}(g)$

3) $\mathrm{grad}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{grad}(f) + \mu \mathrm{grad}(g) \qquad (\lambda, \ \mu \in \Lambda)$

e ciò in conseguenza di note proprietà [6]).

TEOREMA II. - *Una mappa $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ $(n > 1)$ di grado diverso da zero è essenziale e pertanto $\mathcal{T}_f(S^{n-1}) = S^{n-1}$.*

Supponiamo per assurdo che f sia inessenziale; si ha allora $f \backsim \psi\varphi$, con $S^{n-1} \xrightarrow{\varphi} P_0 \xrightarrow{\psi} S^{n-1}$ e P_0 spazio puntiforme. Quindi $f_* = \psi_* \varphi_*$, ed essendo $\mathcal{H}_{n-1}(P_0) \approx 0$, φ_* e di conseguenza f_* sarebbe l'omomorfismo nullo, contro l'ipotesi.

4. - DEF. 7. - Due mappe $f, \ g: X \to Y$ costituiscono una *coppia disgiunta* (f, g) se verificano la condizione:

$$(4) \qquad \mathcal{T}_f(x) \cap \mathcal{T}_g(x) = \emptyset \qquad \text{per ogni} \quad x \in X.$$

DEF. 8. - Siano $(f_0, g_0): X \to Y$, $(f_1, g_1): X \to Y$ due coppie disgiunte. Diremo che (f_0, g_0) è σ-omotopa ad (f_1, g_1) se esistono due σ-omotopie $h: f_0 \backsim f_1$, $k: g_0 \backsim g_1$, tali da costituire una coppia disgiunta $(h, k): X \times I \to Y$.

Data una coppia disgiunta $(f, g): X \to R^n$, la mappa otte-

---

6) Cfr. loc. cit. in 1), pag. 203.

nuta per composizione delle:

$$X \xrightarrow{diag} X \times X \xrightarrow{f \times g} R^n \times R^n \xrightarrow{D} R^n$$

subordina, per restrizione del codominio ad $R^n - 0$, in virtù della condizione (4), una mappa $\Phi'_{f,g} : X \to R^n - 0$. Detta $p_n : R^n - 0 \to S^{n-1}$ la proiezione di centro O definita da $p_n(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ $(x \in R^n - 0)$, porremo:

$$\Phi_{f,g} = p_n \Phi'_{f,g} : X \to S^{n-1}.$$

Ne risulta che la $\Phi_{f,g}$ è determinata univocamente dalla coppia disgiunta (f, g) mediante la commutatività del diagramma:

(5)
$$\begin{tikzcd}
R^n \times R^n \arrow[r, "D"] & R^n \\
X \times X \arrow[u, "f \times g"] & R^n - 0 \arrow[u, "inclus."'] \arrow[d, "p_n"'] \\
X \arrow[u, "diag"] \arrow[ur, "\Phi'_{f,g}"'] \arrow[r, "\Phi_{f,g}"'] & S^{n-1}
\end{tikzcd}$$

DEF. 9. - Sia $(f, g): S^{n-1} \to R^n$ $(n > 1)$ una coppia disgiunta. In questo caso è $\Phi_{f,g} : S^{n-1} \to S^{n-1}$. Definiamo il coefficiente di allacciamento, $\omega(f, g) \in \Lambda$, della coppia (f, g), ponendo:

$$\omega(f, g) = \text{grad}\,(\Phi_{f,g}).$$

TEOREMA III. - *Se* $(f_0, g_0): S^{n-1} \to R^n$ *ed* $(f_1, g_1): S^{n-1} \to R^n$ *sono due coppie disgiunte* σ*-omotope, allora*:

$$\omega(f_0, g_0) = \omega(f_1, g_1).$$

Infatti, se (h, k): $(f_0, g_0) \sim (f_1, g_1)$ è una coppia disgiunta

di σ-omotopie, il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
R^n \times R^n \arrow[r, phantom, "="] & R^n \times R^n \arrow[r] & R^n \\
S^{n-1} \times S^{n-1} \arrow[u, "f_\varepsilon \times g_\varepsilon"] \arrow[r, "m^\varepsilon \times m^\varepsilon"] & (S^{n-1} \times I) \times (S^{n-1} \times I) \arrow[u, "h \times k"'] & R^n - 0 \arrow[u, "inclus."'] \\
S^{n-1} \arrow[u, "diag"] \arrow[r, dashed, "m^\varepsilon"'] \arrow[rr, bend right, "\Phi_{f_\varepsilon, g_\varepsilon}"'] & S^{n-1} \times I \arrow[u, "diag"] \arrow[r, "\Phi_{h,k}"'] \arrow[ur, dashed, "\Phi'_{h,k}"'] & S^{n-1} \arrow[u, "p_n"']
\end{tikzcd}$$

($\varepsilon = 0,\ 1$; m^ε immersioni)

è commutativo, e si ha pertanto $\Phi_{h,k} : \Phi_{f_0, g_0} \backsim \Phi_{f_1, g_1}$, donde la conclusione per la (1) dell'Oss. II.

TEOREMA IV. - *Siano* $(f_i, g) : S^{n-1} \to R^n$ *coppie disgiunte e* $\lambda_i \in \Lambda$ $(i = 1, \dots, n)$; *la coppia* $(f, g) : S^{n-1} \to R^n$ *con* $f = \sum_i \lambda_i f_i$ *è disgiunta e risulta*:

$$\omega(f, g) = \sum_i \lambda_i \omega(f_i, g).$$

Infatti, essendo $f \times g = \sum_i \lambda_i (f_i \times g)$, per la commutatività del diagramma (5) caratterizzante la $\Phi_{f,g}$, si ha

$$\Phi_{f,g} = \sum \lambda_i \Phi_{f_i, g} \tag{6}$$

che con la (3) dell' Oss. II porge l'asserto.

TEOREMA V. - *Se* $(f, g) : S^{n-1} \to R^n$ *è una coppia disgiunta, tale è* (g, f) *e si ha*:

$$\omega(f, g) = (-1)^n \omega(g, f). \tag{7}$$

Poichè risulta $\Phi_{f,g} = \alpha_{n-1} \Phi_{g,f}$, dove $\alpha_{n-1} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ è la mappa che muta ogni punto di S^{n-1} nel proprio antipode, il teorema segue facilmente dalla 2 dell'Oss. II e dal fatto che grad $(\alpha_{n-1}) = (-1)^n$.

TEOREMA VI. - *Se $\varphi: E^n \to R^n$, $\psi: E^n \to R^n$ sono tali che la coppia $(\varphi', \psi'): S^{n-1} \to R^n$, dove $\varphi' = \varphi \mid S^{n-1}$ e $\psi' = \psi \mid S^{n-1}$, sia disgiunta, e se inoltre $\omega(\varphi', \psi') \neq 0$, esiste almeno un punto $x_0 \in E^n$ per cui $\mathcal{T}_\varphi(x_0) \cap \mathcal{T}_\psi(x_0) \neq \emptyset$.*

Se ciò non fosse $(\varphi, \psi): E^n \to R^n$ sarebbe una coppia disgiunta, e dalla fattorizzazione seguente:

$$\begin{tikzcd} & E^n \arrow[dr, "\Phi_{\varphi,\psi}"] & \\ S^{n-1} \arrow[ur, "\text{inclus.}"] \arrow[rr, "\Phi_{\varphi',\psi'}"'] & & S^{n-1} \end{tikzcd}$$

risulterebbe $\omega(\varphi', \psi') = \operatorname{grad}(\Phi_{\varphi',\psi'}) = 0$, in virtù dal fatto che $\mathcal{H}_{n-1}(E^n) \approx 0 \ (n > 1)$.

TEOREMA VII. - *Sia A una n-cella di R^n, $\dot{A}$ il suo contorno, $\rho: E^n \to A$ un omeomorfismo. $i_n: S^{n-1} \to E^n$ e $j: A \to R^n$ inclusioni. Se $f: A \to R^n$ è tale che la coppia $(f \mid \dot{A}, j \mid \dot{A})$ sia disgiunta, anche la $(f\rho i_n, j\rho i_n): S^{n-1} \to R^n$ è disgiunta. Si dimostra che, se è verificata l'ulteriore ipotesi: $\mathcal{T}_f(x) \subset A$ per $x \in \dot{A}$, allora:*

$$\omega(f\rho i_n, j\rho i_n) = \pm \mathfrak{In}(f). \tag{8}$$

DIMOSTRAZIONE. - Consideriamo le mappe $\dot{\rho}$, $\dot{f}$, subordinate rispettivamente da ρ e da f in modo tale da rendere commutativo il diagramma:

$$\begin{tikzcd} E^n \arrow[r, "\rho"] & A \arrow[r, "f"] & R^n \\ S^{n-1} \arrow[u] \arrow[r, "\dot{\rho}"'] & \dot{A} \arrow[u] \arrow[r, "\dot{f}"'] & A \arrow[u] \end{tikzcd}$$

dove le freccie verticali indicano inclusioni.

Sia inoltre $l: A \times I \rightarrow A$ una omotopia che contragga A in un punto $x_0 \in int\ A$ e tale che, per $x \in A$, si abbia:

$$\begin{aligned} &l(x, t) \in int\ A \quad \text{se} \quad 0 < t \leq 1 \\ &l(x, 0) = x \\ &l(x, 1) = x_0 . \end{aligned}$$

Allora la mappa h, composizione di:

$$S^{n-1} \times I \xrightarrow{(f\dot{\rho}) \times I} A \times I \xrightarrow{l} A \xrightarrow{j} R^n$$

e la mappa $k: S^{n-1} \times I \rightarrow R^n$, tale che $k(x, t) = j\rho i_n(x)$ per $(x \times t) \in S^{n-1} \times I$, costituiscono una coppia disgiunta di σ-omotopie:

$$(h, k); (f\rho i_n, j\rho i_n) \backsim (\psi_0, j\rho i_n)$$

dove $\psi_0: S^{n-1} \rightarrow R^n$ è la mappa costante che muta ogni punto $x \in S^{n-1}$ in $\mathfrak{I}n(f)x_0$.

Ne segue, per il teorema III che:

$$\omega(f\rho i_n, j\rho i_n) = \omega(\psi_0, j\rho i_n) \tag{9}$$

D'altra parte, detta $p_{x_0}: \dot{A} \rightarrow S^{n-1}$ la proiezione di centro x_0, vale a dire la mappa univalente, definita, mediante notazione vettoriale, da:

$$p_{x_0}(x) = \frac{x - x_0}{\| x - x_0 \|} \qquad \text{per } x \in \dot{A}$$

si ha:

$$\Phi_{\psi_0, j\rho i_n} = \mathfrak{I}n(f) p_{x_0} \dot{\rho} : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1} \tag{10}$$

Dalla (10) si deduce, tenendo conto del fatto noto [7]) che

---

[7]) Infatti grad $(p_{x_0}\dot{\rho})$ coincide, a meno eventualmente del segno, con l'ordine del punto x_0 rispetto ad $\dot{A}$, e tale ordine vale ± 1. (Cfr. ALEKSANDROV, *Topologia combinatoria* (Ed. Einaudi, 1957), Cap. XVI & 1,5 e Cap. XV, 3,4).

$\operatorname{grad}(p_{x_0}\dot{\rho}) = \pm 1$, e della (3) dell'Oss. II:

(11) $\omega(\psi_0, j\rho i_n) = \operatorname{grad}(\mathfrak{In}(f) p_{x_0}\dot{\rho}) = \mathfrak{In}(f) \operatorname{grad}(p_{x_0}\dot{\rho}) = \mp \mathfrak{In}(f)$

e la (9) e la (11) porgono la conclusione voluta.

COROLLARIO. - *Nelle ipotesi del teorema precedente, se* $\mathfrak{In}(f) \neq 0$, *esiste almeno un punto* $y_0 \in A$, *unito nella* f, *tale cioè che sia* $y_0 \in \mathfrak{T}_f(y_0)$.

Per il teorema VI esiste un punto $x_0 \in E^n$ tale che $\mathfrak{T}_{f\rho}(x_0) \cap \mathfrak{T}_{j\rho}(x_0) \neq \emptyset$. da cui , posto $y_0 = \rho(x_0)(\in A)$, segue $y_0 \in \mathfrak{T}_f(y_0)$.