RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALDO BRESSAN

Sulle sollecitazioni lagrangiane, dipendenti anche dall'atto di moto, e derivanti da un potenziale generalizzato

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 263-279

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__263_0>

SULLE SOLLECITAZIONI LAGRANGIANE, DIPENDENTI ANCHE DALL'ATTO DI MOTO, E DERIVANTI DA UN POTENZIALE GENERALIZZATO

Nota (*) *di* ALDO BRESSAN (*a Padova*)

Introduzione.

Nella presente nota mi propongo di determinare il più generale sistema a vincoli olonomi, bilaterali e lisci, a N gradi di libertà $q_1 \dots q_N$, soggetto ad una sollecitazione $\mathfrak{Q}_h(q \mid \dot{q} \mid t)$ $(h = 1 \dots N)$ anche dipendente dall'atto di moto, per il quale le equazioni del moto provengono da un lagrangiano $\mathfrak{L}(q \mid \dot{q} \mid t) = \mathfrak{T} + V(q \mid \dot{q} \mid t)$. Osservato che ciò equivale alla determinazione delle sollecitazioni $\mathfrak{Q}_h(q \mid \dot{q} \mid t)$ derivanti secondo Whittaker[1]) da una funzione potenziale (che dirò potenziale generalizzato, caratterizzo tali sollecitazioni, e tra queste, quelle a potenza nulla.

Dopo ciò passo a stabilire criteri atti a riconoscere direttamente (cioè con sole operazioni di derivazione) i casi in cui valgono gli integrali dei momenti rispetto a coordinate lagrangiane prefissate ad arbitrio.

Determino tra l'altro i casi di sollecitazione dipendenti solo dalla configurazione e dal tempo, in cui sussistono integrali

---

(*) Pervenuta in Redazione il 21 aprile 1958.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) WHITTAKER, *Analytische Dynamik der Punkte und starren Körper*, pag. 47.

dei momenti, ottenibili solo mediante l'uso del potenziale generalizzato anzichè di quello ordinario.

Inoltre convenendo di denotare nel seguito con S la classe di tutti i sistemi a vincoli olonomi bilaterali e lisci, a N gradi di libertà $q_1 \dots q_N$, determino la più generale sollecitazione a potenza nulla, che agendo su uno di tali sistemi S, dotato di forza viva indipendente dalle $N-1$ coordinate $q_1 \dots q_{N-1}$, dia luogo agli integrali dei momenti rispetto a tali coordinate. Si riconosce così che essa coincide con una già considerata da G. Grioli[2], il quale tuttavia non ha rilevato tale carattere di generalità.

A titolo d'esempio, applico uno dei suddetti criteri al problema di un corpo rigido soggetto a forze del tipo delle centrifughe composte, riconoscendo, in base ai teoremi dimostrati e all'esame della struttura del lagrangiano, il sussistere di un certo integrale dei momenti, stabilito[3]) da G. Grioli mediante considerazioni sul sistema differenziale che traduce il problema dinamico.

§ 1. - Sulle equazioni del moto ammettenti un lagrangiano $\mathcal{T} + V(q \mid \dot{q} \mid t)$.

Detto C un sistema di classe S, riferito a coordinate lagrangiane $q_1 \dots q_N$, di energia cinetica

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{N} \tau_{hk} \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^{N} \tau_h \dot{q}_h + \tau,$$

con τ_{hk}, τ_h e τ dipendenti da $q_1 \dots q_N$, t, è ben noto che le equazioni del moto provengono da un lagrangiano

$$\mathcal{L}(q \mid \dot{q} \mid t) = \mathcal{T} + V(q \mid \dot{q} \mid t) \tag{1'}$$

---

[2]) G. GRIOLI, *Moto attorno al baricentro di un giroscopio soggetto a forze di potenza nulla*, Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni. Fascicolo III-IV, 1947.

[3]) G. GRIOLI, *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla*, Rendiconti del Seminario matematico della Università di Padova, vol. XXVII, 1957.

se e solo se $V(q \mid \dot{q} \mid t)$ è un potenziale generalizzato della sollecitazione $\mathcal{Q}_h(q \mid \dot{q} \mid t)$, ossia se valgono le

$$\mathcal{Q}_h(q \mid \dot{q} \mid t) = -\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial V}{\partial q_h} \qquad (h = 1 \ldots, N). \tag{2}$$

Passo a caratterizzare tali sollecitazioni dimostrando il seguente

TEOREMA I. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le $\mathcal{Q}_h(q \mid \dot{q} \mid t)$ $(h = 1, \ldots N)$ ammettano un potenziale generalizzato $V(q \mid \dot{q} \mid t)$, è che abbiano la forma*

$$\mathcal{Q}_h(q \mid \dot{q}\,) = \sum_{k \neq h}^{1,N} \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_h}{\partial q_k}\right) \dot{q}_k + \frac{\partial U}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_h}{\partial t} \qquad (h = 1 \ldots N) \tag{3}$$

con le U, $\alpha_1 \ldots \alpha_N$ dipendenti da $q_1 \ldots q_N$, t.

Infatti le (1) si esplicitano in

$$\mathcal{Q}_h(q \mid \dot{q} \mid t) = -\sum_{k=1}^{N} (V''_{\dot{q}_h \dot{q}_k} \ddot{q}_k + V''_{\dot{q}_h q_k} \dot{q}_k) - V''_{\dot{q}_h t} + V_{q_h} \tag{4}$$
$$(h = 1 \ldots N)$$

onde, per l'indipendenza della sollecitazione dalle accelerazioni, si hanno le

$$V''_{\dot{q}_h \dot{q}_k} = 0 \qquad (h,\ k = 1 \ldots N) \tag{5}$$

che danno al potenziale generalizzato la semplice forma

$$V(q \mid \dot{q} \mid t) = \sum_{h=1}^{N} \alpha_h(q \mid t)\, \dot{q}_h + U(q \mid t) \tag{6}$$

da cui per (4) e (5) seguono le (3).

Da queste viceversa segue ovviamente la validità delle (2) in corrispondenza alla V data da (6).

* * *

Per la particolare forma dei coefficienti delle $\dot{q}_h$ nella (3), può essere utile trasformare il precedente teorema nel

TEOREMA II. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè le $Q(q \mid \dot{q} \mid t)$ abbiano un potenziale generalizzato, è che siano* *della forma*

$$\mathcal{Q}_h = \sum_{k \neq h}^{1,N} a_{hk}(q \mid t)\dot{q}_k + b_h(q \mid t) \tag{7}$$

con

$$a_{hk/l} + a_{kl/h} + a_{lh/k} = 0 \qquad a_{hk} + a_{kh} = 0 \qquad (h,\ k = 1 \dots N) \tag{8}$$

e

$$b_{h/k} - b_{k/h} = \frac{\partial}{\partial t} a_{hk}, \qquad (h,\ k = 1 \dots N), \tag{9}$$

intendendosi per brevità come nel seguito

$$\varphi_{/h} = \frac{\partial \varphi}{\partial q_h} \qquad \varphi_{/t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Verificate poi le (8) *e* (9), *il potenziale si determina con quadrature.*

DIMOSTRAZIONE - La necessità delle (7) (8) (9) segue dalle (3), valide in base al teorema precedente.

Quanto alla sufficienza, osservo che le (8) sono le condizioni di solubilità del sistema

$$\alpha_{k/h} - \alpha_{h/k} = a_{hk} \qquad (h,\ k = 1 \dots N) \tag{10}$$

Se poi le $\alpha_h(q \mid t)$ risolvono le (10), le (8) e le (10) derivate rispetto al tempo mostrano che i vettori $\alpha_{h/t}$ e b_h hanno rotori eguali ed opposti. Esisterà quindi una $U(q \mid t)$ verificante le

$$b_h = U_{/h} - \alpha_{h/t} \qquad (h = 1 \dots N) \tag{11}$$

onde le Q_h date da (7) hanno la forma (3) da cui, pel Teorema I, segue l'asserto.

§ 2. - Sulle Sollecitazioni del tipo precedente a potenza nulla.

TEOREMA III. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la sollecitazione $Q_h(q \mid \dot{q} \mid t)$ a potenziale generalizzato, sia a potenza nulla, è che abbia la forma*

$$\mathcal{Q}_h(q \mid \dot{q}) = \sum_{h \neq k}^{1,N} (\alpha_{k|h} - \alpha_{h|k})\dot{q}_k \qquad (h = 1 \dots, N), \tag{12}$$

con le α_h indipendenti da t, e che valga identicamente rispetto a $q_1 \dots q_N$, t, la

$$P_2^* = \sum_{i=}^{\nu} \boldsymbol{F}_i \times \frac{\partial P_i}{\partial t} = 0 . \tag{13}$$

Si può osservare innanzi tutto che *l'avere la sollecitazione la forma* (12), *equivale a potersi esprimere nella forma*

$$\mathfrak{Q}_h(q \quad \dot{q}) = \sum_{k \neq h}^{1, N} a_{hk} \dot{q}_k \qquad (h = 1 \dots N), \tag{12'}$$

ove le a_{hk} dipendono dalle sole $q_1 \dots q_N$.

Per la validità della (13) è certo sufficiente ma non necessario che i vincoli siano fissi, e in generale essa costituisce una condizione indipente dalla (12), non esprimibile solo mediante la $\mathfrak{T}(q \mid \dot{q} \mid t)$ e le $Q_h(q \mid \dot{q} \mid t)$.

Osservato ciò, passo alla dimostrazione del teorema, in cui per semplicità mi riferisco ad un sistema particellare costituito da ν punti $P_1 \dots P_\nu$ soggetti alle forze attive $\boldsymbol{F}_i(q \mid \dot{q} \mid t)$ $(i = 1 \dots \nu)$ e riferito alle coordinate $q_1 \dots q_N$ mediante le

$$P_i = P_i(q_1 \dots q_N, \ t) \qquad (i = 1 \dots \nu).$$

Allora, per le note formule

$$\boldsymbol{v}_i = \sum_{h=1}^{N} \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial P_i}{\partial t} \qquad (1 = 1 \dots \nu)$$

$$\mathfrak{Q}_h = \sum_{i=1}^{\nu} F_i \times \frac{\partial P_i}{\partial q_h} \qquad (h = 1 \dots N),$$

la potenza delle $\boldsymbol{F}_1 \dots \boldsymbol{F}_\nu$ è

$$P^* = \sum_{h=1}^{N} \mathfrak{Q}_h(q \mid \dot{q} \quad t) \dot{q}_h + P_2$$

che per (7) e $(8)_2$ si riduce a

$$P^* = \sum_{h=1}^{N} b_h(q \mid t) \dot{q}_h + P_2^*$$

cosicchè il suo annullarsi identico rispetto alle $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_N$ equivale alla (13) e alle

$$b_h(q \mid t) = 0 \qquad (h = 1 \dots N),$$

da cui per (7) segue (12′) e, per la (9), l'indipendenza dal tempe delle a_{hk} $(h,\ k = 1 \dots N)$. Ovviamente le (10) possono risolversi con delle α_k indipendenti dal tempo onde le (12) valgon con tali α_k.

La sufficienza della condizione espressa nel teorema è ovvia.

Dal Teorema III e dalle (3) segue il

COROLLARIO - *Se i vincoli son fissi ogni sollecitazione a potenziale generalizzato è la somma di una sollecitazione a potenza nulla con una a potenziale ordinario.*

* * *

Le considerazioni precedenti permettono di fare le seguenti

OSSERVAZIONE I^a^ - *Le* (10) *e* (11) *con le posizioni*

$$(\overline{11}) \qquad a_{ho} = -a_{oh} = b_h \qquad (h = 1 \dots N)$$
$$q_0 = U \qquad q^0 = t$$

equivalgono le

$$(\overline{10}) \qquad \alpha_{k/h} - \alpha_{h/k} = a_{hk} \qquad (h,\ k = 0,\ 1, \dots N)$$

OSSERVAZIONE II^a^ - *Se la sollecitazione* $Q_h(q \mid \dot{q} \mid t)$ *agente su* C *dà luogo ad un lagrangiano* $\mathfrak{L} = \mathcal{T} + V$, *questo è determinato a meno dell'aggiunta della derivata totale rispetto al tempo di un'altra funzione* $v(q \mid t)$.

Infatti la V data da (6) è un potenziale generalizzato delle Q_h, per esempio date da (7), se e solo se valgono (10) e (11), quindi per (11), se e solo se valgono le $(\overline{10})$ la cui soluzione generica è la

$$(14) \qquad \bar{\alpha}_h = \alpha_h + \frac{\partial v(q_1 \dots q_N q_0)}{\partial q_h} \qquad (h = 0,\ 1 \dots N)$$

le α_h costituendo una soluzione particolare. Segue per $(\overline{11})$ che il contributo dato dalle $\dfrac{\partial v}{\partial q_h}$, $(h = 0 \dots N)$ alla V espressa con la (6), è $\dfrac{dV}{dt}$.

Val forse la pena di fare le

OSSERVAZIONE III^a - La $v(q \mid t)$ può scegliersi in modo da rendere la V omogenea nelle $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_n$ o indipendente da una di queste.

OSSERVAZIONE IV^a - Se V data da (6) non dipende da $q_1 \dots q_m$ [rispett. da t, $q_1 \dots q_m$], con una opportuna funzione v delle $q_{m+1} \dots q_N$, t [rispett. $q_{m+1} \dots q_N$], per $(\overline{10})$ si può ottenere un potenziale $\overline{V}$ della forma

$$\overline{V} = \sum_{h=1}^{m} \bar{\alpha}_h(q_{m+1} \dots q_N t)\dot{q}_h \tag{15}$$

[rispett. della forma:

$$\overline{V} = \sum_{h=1}^{m} \bar{\alpha}_h(q_{m+1} \dots q_N)\dot{q}_h + \bar{\alpha}_0(q_{m+1} \dots q_N) \tag{$\overline{15}$}$$

Quanto alle $\alpha_1 \dots \alpha_m$ [rispett. $\bar{\alpha}_0 \dots \bar{\alpha}_m$], si può annullare una $\bar{\alpha}_i$ di esse conservando a $\overline{V}$ la dipendenza delle sole variabili figuranti in V solo se la α_i corrispondente in V è costante, ossia, per (10) e per l'ipotesi d'indipendenza fatta sulle α_h, solo se per quel valore di i, è

$$a_{i1} = \dots = a_{im} = 0.$$

§ 3. - N. 1. **Integrali dei momenti generalizzati.**

Il considerato sistema C ammetta sollecitazione $Q_h(q \mid \dot{q} \mid t)$ a potenziale generalizzato, e sia m un intero > 0, $\leq N$. Sussistono allora, oltre la (1), le (3) e (6), e il seguente

TEOREMA IV. - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè C ammetta gli integrali dei momenti generalizzati rispetto a $q_1 \dots q_m$, è che non dipendano da tali variabili le τ_{hk} $(h, k = 1 \dots N)$ e le*

$$\gamma_h = \tau_h + \alpha_h \qquad \delta = \tau + U \qquad (h = 1 \dots N) \tag{16}$$

Infatti per (1) (6) (15) le equazioni del moto provengono dal lagrangiano

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{2} \sum_{h,k=1}^{N} \tau_{hk}\, \dot{q}_h \dot{q}_k + \sum_{h=1}^{N} \gamma_h\, \dot{q}_h + \delta$$

e da ciò segue l'asserto in base ad un ben noto teorema.

COROLLARIO - Se valgono le

$$\tau = 0 \qquad \tau_h = 0 \qquad (h = 1 \dots N) \tag{17}$$

come accade per esempio nel caso dei vincoli fissi, le (3) si particolarizzano in

$$\left\{\begin{aligned} &\mathcal{Q}_i(q_{m+1} \dots q_N \mid \dot{q}_{m+1} \dots \dot{q}_N \mid t) = -\sum_{k=m+1}^{N} \frac{\partial \alpha_i}{\partial q_k}\dot{q}_k - \\ &\qquad - \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = -\frac{d\alpha_i(q_{m+1} \dots q_N \mid t)}{dt} \qquad (i = 1 \dots m) \\ &\mathcal{Q}_j(q_{m+1} \dots q_N \mid \dot{q}_1 \dots \dot{q}_{j-1}, \dot{q}_{j+1} \dots \dot{q}_N \mid t) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \alpha_k}{\partial q_j}\dot{q}_k + \\ &\qquad + \sum_{k \neq j}^{m+1 \dots N} \left(\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_j} - \frac{\partial \alpha_j}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (j = m+1 \dots N) \end{aligned}\right. \tag{18}$$

ove le $\alpha_1 \dots \alpha_N$ non dipendono da $q_1 \dots q_m$.

N. 2. **Caso dei sistemi di classe S a potenza nulla.**

G. Grioli [4]) nella memoria « Moto attorno al baricentro di un giroscopio soggetto a forze di potenza nulla », considera sistemi lagrangiani di classe S, a potenza nulla con sollecitazione della forma

$$Q_i(q \mid \dot{q}) = \frac{d}{dt} f_i(q_N) \qquad (i = 1 \dots N), \tag{19}$$

deduce la relazione

$$\mathcal{Q}_N = -\sum_{i=1}^{N-1} f_i'(q_N)\dot{q}_i \tag{19'}$$

e l'esistenza del potenziale

$$V = -\sum_{i=1}^{N-1} f_i(q_N)\dot{q}_i \tag{20}$$

cosicchè se la forza viva $\mathcal{T}$ non dipende da $q_1 \dots q_{N-1}$, t, sussistono gli integrali dei momenti rispetto a $q_1 \dots q_{N-1}$.

---

[4]) Loco cit. in nota [2]).

In base a quanto è detto nei paragrafi precedenti si può ora osservare che la (19) è la più generale sollecitazione a potenza nulla che agendo su un sistema di classe S, sotto la detta condizione su $\mathcal{T}$, dia luogo agli integrali dei momenti rispetto a $q_1 \dots q_{N-1}$.

Infatti le Q_h, certo a potenziale generalizzato pel Teorema III del § 1 hanno la forma (12) colle $\alpha_1 \dots \alpha_N$ indipendenti da t.

Il sussistere poi dei detti integrali dei momenti per il Corollario del Teorema IV di § 3 implica la validità delle $(18)_1$ per $m = N - 1$ e la dipendenza delle α_i dalla sola q_N, ossia che la sollecitazione abbia la forma (19). Anche la relazione (20), per (19), (19)' e (18), si riduce alla (6) in cui si assuma

$$\alpha_i = -\varphi_i(q_N) \qquad (i = 1 \dots N-1)$$

$$\alpha_N = U = 0.$$

TEOREMA V - *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un prefissato sistema C di classe S ammetta gli integrali dei momenti rispetto a $q_1 \dots q_m$, è che, valendo le espressioni* (1) *e* (7) *per $\mathcal{T}$ e le $\mathcal{Q}_h$, non dipendano da $q_1 \dots q_m$ le τ_{hk}, $(h,\ k = 1 \dots N)$, e le quantità*

$$(21) \qquad c_{hk} = a_{hk} + \tau_{k/h} - \tau_{h/k} \qquad c_{oh} = -c_{ho} = \tau_{h/t} - b_h - \tau_{/h}, \qquad (h,\ k = 1 \dots N)$$

e che, oltre le (8) *e* (9), *valgano le*

$$(22) \qquad c_{is} = 0 \qquad c_{ji/t} = c_{oi/j} \qquad (i,\ s = 1 \dots m) \quad (j = m+1 \dots N).$$

Infatti, considerate in aggiunta alle $(\overline{11})$ le posizioni

$$(23) \qquad \delta = \gamma_0 \qquad \tau = \tau_0 .$$

le (16) (21) e (22) si scrivono

$$(24) \qquad \gamma_h = \tau_h + \alpha_h \qquad (h = 0 \dots N)$$

$$(\overline{24}) \qquad c_{hk} = a_{hk} + \tau_{k/h} - \tau_{h/k} \qquad (h,\ k = 0 \dots N)$$

$$(\overline{22}) \qquad c_{is} = 0 \qquad c_{ji/0} = c_{oi/j} \qquad (i,\ s = 1 \dots m) \quad (j = m+1 \dots N)$$

Con la posizione (24) per le (10) che, come si è osservato, equivalgono alle (10) e (11), le (21) divengono

(25) $\quad c_{hk} = \alpha_{k/h} - \alpha_{h/k} + \tau_{k/h} - \tau_{h/k} = \gamma_{k/h} - \gamma_{h/k} \qquad (h,\ k = 0 \ldots N)$

Per dimostrare la necessità della condizione osservo che dall'indipendenza da $q_1 \ldots q_m$ di γ_h, $\delta = \gamma_0$, affermata dal teorema I, segue, per (21), quella di c_{hk} $(h,\ k = 0 \ldots N)$. Per (25) si hanno allora le $(\overline{22})_1$ e le

(26) $\quad c_{ji} = \gamma_{i/} \qquad (i = 0,\ 1 \ldots m) \qquad (j = 0,\ m + 1 \ldots N)$

Derivando opportunamente queste, si ottengono le $(\overline{22})_2$.

Riguardo alla sufficienza osservo che in base alle posizioni (21), la condizione espressa nell'enunciato, consiste nell'indipendenza da $q_1 \ldots q_m$ delle τ_{hk}, $(h,\ k = 1 \ldots N)$ e delle c_{hk}, $(h,\ k = 0,\ 1,\ 2 \ldots N)$ e nella validità delle (22), (8) e (9). Le due ultime equivalgono per $(\overline{11})$ alle

(27) $\quad a_{hk/l} + a_{kl/h} + a_{lh/k} = 0 \qquad (h,\ k,\ l = 0,\ 1 \ldots N).$

Per $(\overline{21})$ e $(\overline{22})_2$ $(8)_2$, segue di conseguenza

(28) $\quad c_{hk/l} + c_{kl/h} + c_{lh/k} = 0 \quad c_{hk} + c_{kh} = 0 \quad (h,\ k=0,\ 1 \ldots N)$

Esistono allora delle $\gamma_{m+1} \ldots \gamma_N$, γ_0 dipendenti da $q_{m+1} \ldots q_N$, $t = q_0$, e risolventi le equazioni

(25) $\quad c_{hk} = \gamma_{k/h} - \gamma_{h/k} \qquad (h,\ k = m + 1 \ldots N).$

Per $(i = 1 \ldots m)$, $(j,\ l = m + 1 \ldots N)$ è, per $(\overline{22})_1$

$$c_{lj/i} = 0,$$

onde, per $(28)_1$ e $(28)_2$) si ha

(28') $\quad c_{il/j} = c_{ij/l} \qquad (l,\ j = m + 1 \ldots N,\ 0) \qquad (i = 1 \ldots m).$

Si deduce che per ogni $i = 1, \ldots m$ esiste una $\gamma_i(q_{m+1} \ldots q_N,\ q_0)$ soddisfacente l'eguaglianza

(29) $\quad c_{il} = - \gamma_{i/l} \qquad (l = m + 1 \ldots N,\ 0),$

le $\gamma_0 \ldots \gamma_N$ sono indipendenti da $q_1 \ldots q_m$ e risolvono le (25).

Ricavate le $U = \alpha_0$, $\alpha_1 \dots \alpha_N$ dalle (24), esse, per (25) e $(\overline{21})$ risolvono le $(\overline{10})$, cioè (10) e (11). Onde la V costruita con esse mediante la (6), è un potenziale generalizzato della considerata sollecitazione $\mathfrak{Q}_h(q \mid \dot{q} \mid t)$, espressa da (7).

Valendo le (24), con $\tau = \gamma_0$, $\gamma_1 \dots \gamma_N$ indipendenti da $q_1 \dots q_m$ al pari delle $\tau_{h,k}$, pel teorema I sussistono gli integrali dei momenti rispetto a $q_1 \dots q_m$.

* * *

N. 3. Dal teorema dimostrato segue:

COROLLARIO I - *Se per il considerato sistema C, i vincoli e la sollecitazione* $\mathfrak{Q}_h(q \mid \dot{q})$ *data da* (7), *non dipendono dal tempo, la validità degli integrali dei momenti rispetto a* $q_1 \dots q_m$, è caratterizzata dall'indipendenza da $q_1 \dots q_m$ (*oltre che da* t), *delle* $a_{hk}, b_h, \tau_{hk}, (h, k = 1 \dots N)$, *dalla costanza delle* $b_1 \dots b_m$, *dalle* (8) *e dalle uguaglianze*

$$b_{j/l} = b_{l/j} = 0 \qquad (j, \ l = m + 1 \dots N) \tag{30}$$

$$a_{is} = 0 \qquad (i, \ s = 1 \dots m). \tag{31}$$

Infatti ora è

$$\tau = \tau_h = \alpha_{h/t} = c_{hk/t} = 0 \qquad (h, \ k = 1 \dots N) \tag{32}$$

onde per (21) è

$$c_{hk} = a_{hk} \qquad c_{0h} = - b_h \qquad (h, \ k = 1 \dots N) \tag{32}$$

Allora le $(22)_1$ equivalgono le (31), e per (32) e (33), le $(22)_2$ divengono

$$0 = c_{0i/j} = - b_{i/j} \quad (i = 1 \dots m) \quad (j = m + 1 \, . \, . N),$$

equivalenti alla costanza delle $b_1 \dots b_m$, stante l'indipendenza di tutte le b_h da $q_1 \dots q_m$, t.

COROLLARIO II - *Se,* più in particolare, *la sollecitazione* $Q_h(q \mid \dot{q})$ *ha potenza nulla,* valgon le (12') onde è $b_h = 0$ e quindi valgon certo le (30). In tal caso ***basta*** dunque *verificare le* (8) *e* (31) *e l'indipendenza da* $q_1 \dots q_m$ *delle* τ_{hk} *e* a_{hk} $(h, \ k = 1 \dots N)$.

Osservo infine che, riguardo all'espressione (6), *gli integrali dei momenti sussistono in tale caso particolare se e solo se le* $\mathcal{Q}_h$ hanno la forma

$$\mathcal{Q}_h(q_{m+1} \dots q_N) = \sum_{k \neq h}^{m+1 \dots N} \left[\frac{\partial \alpha_k(q_{m+1} \dots q_N)}{\partial q_h} - \frac{\partial \alpha_h(q_{m+1} \dots q_N)}{\partial q_k} \right] \dot{q}_k \qquad (h = 1 \dots N). \tag{34}$$

Alle (34) infatti si riducono le (12) per (32) e (10).

* * *

È ovvio che:

OSSERVAZIONE Iª - *Se le* $\mathcal{Q}_h$ *hanno potenziale ordinario* U, *questo è per esse anche potenziale generalizzato.*

OSSERVAZIONE IIª - *Le sollecitazioni indipendenti dalle* $\dot{q}$ *ed a potenziale generalizzato sono quelle a potenziale ordinario.* Infatti in tal caso nella (7) è $a_{hk} = 0$ onde le (10) sono risolte da $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

OSSERVAZIONE IIIª - *Se il considerato sistema* C *ha la* $\mathcal{T}$ *indipendente da* $q_1 \dots q_m$, *esistono sollecitazioni* $\mathcal{Q}_h(q \mid t)$ *indipendenti dalle* $\dot{q}$, *per le quali gli integrali dei momenti rispetto a* $q_1 \dots q_m$ *sussistono usando il potenziale generalizzato* $V(q \mid \dot{q} \mid t)$ *mentre non sussistono usando quello ordinario* $U(q \mid t)$. *La generica di tali sollecitazioni ha la forma*

$$\mathcal{Q}_h(q \mid t) = \begin{cases} \alpha_h(t) & (h = 1 \dots m) \\ \dfrac{\partial \beta(q_{m+1} \dots q_N\, t)}{\partial q_h} & (h = m+1 \dots N). \end{cases} \tag{35}$$

Infatti per l'Osservazione IIª il potenziale ordinario U è un potenziale generalizzato delle $\mathcal{Q}_h(q \mid t)$. Per l'Osservazione IIª del § 2 il generico potenziale generalizzato delle $\mathcal{Q}_h$ è quindi

$$V = U + \sum_{i=1}^{N} v_{/i}(q \mid t)\dot{q}_i + v_t'(q \mid t) \tag{36}$$

Le

$$V_{/k}(q \mid \dot{q} \mid t) \equiv 0 \qquad (k = 1 \dots m) \tag{37}$$

equivalgono le

$$(38)\quad \begin{cases} v_{/ik} = & (k = 1 \dots m) \qquad (i = 1 \dots N) \\ \left(U + \dfrac{\partial v}{\partial t}\right)_{/k} = 0 & (k = 1 \,..\, m). \end{cases}$$

Le (38) equivalgono all'esistenza di certe $v_0(q_{m+1} \dots q_N, t)$, $v_1(t), \dots v_m(t)$ e $a(q_{m+1} \dots q_N | t)$ con

$$(39)\quad \begin{cases} v(q_1 \dots q_N \mid t) = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i(t) q_i + v_0(q_{m+1} \dots q_N \mid t) \\ U(q_1 \dots q_N \mid t) = a(q_{m+1} \dots q_N \mid t) - \dfrac{\partial v}{\partial t} = a(q_{m+1} \dots q_N \mid t) - \\ \qquad - \dfrac{\partial v_0(q_{m+1} \dots q_N \mid t)}{\partial t} - \sum\limits_{i=1}^{m} v_i'(t) q_i . \end{cases}$$

Per $(39)_2$ valgono allora le (35) con

$$(40)\quad \begin{cases} \alpha_h(t) = - v_h'(t) & (h = 1 \dots m) \\ \beta(q_{m+1} \dots q_N \mid t) = a(q_{m+1} \dots q_N \mid t) - \dfrac{\partial v_0(q_{m+1} \dots q_N \mid t)}{\partial t} & (h = m + 1 \dots N) \end{cases}$$

Viceversa, date le (35), le (40) sono certo solubili in $v_h(t)$ e $a(q_{m+1} \dots q_N | t)$ magari assumendo $v_0 \equiv 0$.

La presenza delle $q_1 \dots q_m$ a 2° membro delle $(39)_2$, e le (37) provano l'asserto.

Osservo esplicitamente che (36) per (39) diviene

$$V = a - \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{m} v_i(t) \dot{q}_i + \sum_{j=m+1}^{N} \frac{\partial v_0}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial v}{\partial t}$$

onde, fatto $v_0 \equiv 0$, per (40)

$$(41)\quad V(q_{m+1} \dots q_N) = \beta(q_{m+1} \dots q_N \mid t) - \sum_{i=1}^{m} \dot{q}_i \int_0^t \alpha_i(\xi) d\xi ,$$

è un potenziale generalizzato della (35) per cui sussistono gli integrali dei momenti.

§ 4. - Applicazione al caso di un corpo rigido soggetto a forze del tipo di quelle centrifughe composte.

Suppongo che C sia un corpo rigido, eventualmente fissato per un punto, il cui generico elemento $d\mathcal{C}$, sia soggetto alla forza

$$fd\mathcal{C} = \mu^* \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{v} d\mathcal{C} \tag{42}$$

ove $\boldsymbol{H}$ è un vettore costante, μ^* funzione del punto solidale P di $\mathcal{C}$ e $\boldsymbol{v}$ la velocità di P.

Intendendo che O sia un punto fisso di C o il suo baricentro G, se C è libero, dico $T \equiv (O, \boldsymbol{c}_r)$ una terna fissa di versori $\boldsymbol{c}_r$ e $\mathcal{T} \equiv (O, \boldsymbol{i}_r)$ una terna solidale in cui siano $\xi_1\, \xi_2\, \xi_3$ le coordinate di P.

Detta π la dilatazione solidale a C, avente

$$\left\| \int_{\mathcal{C}} \mu \xi_i \xi_k \, d\mathcal{C} \right\| \qquad (i,\ k = 1 \dots N) \tag{43}$$

per matrice delle componenti in $\mathcal{T}$, il momento rispetto ad O della sollecitazione (42), è

$$\boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{\omega} \wedge \pi \boldsymbol{H} \tag{44}$$

$\boldsymbol{\omega}$ essendo la velocità angolare di C.

Assunte come coordinate lagrangiane q_i di C (nel suo moto attorno ad O) gli angoli di precessione ψ, rotazione propria φ, e nutazione ϑ della $\mathcal{T}$ rispetto alla T che si suppone orientata in modo che riesca

$$\boldsymbol{c}_3 \upuparrows \boldsymbol{H}, \tag{45}$$

la sollecitazione (42) è a potenziale generalizzato, e sussiste l'integrale dei momenti rispetto a $q_1 = \psi$.

Infatti, posto

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{c}_3 = \sin\vartheta(\sin\varphi \boldsymbol{i}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{i}_2) + \cos\vartheta \boldsymbol{i}_3 = \sin\vartheta(\boldsymbol{i}_3 \wedge \boldsymbol{N} + \cos\vartheta \boldsymbol{i}_3) \\ \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{i}_3 \\ \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{N} = \cos\varphi \boldsymbol{i}_1 - \sin\varphi \boldsymbol{i}_2 = \text{versore della linea dei nodi} \end{cases} \tag{46}$$

onde

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{c}_3\dot{\psi} + \underline{i}_3\dot{\varphi} + \underline{N}\dot{\vartheta} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{u}_i \dot{q}_i \,, \tag{47}$$

segue che il lavoro virtuale nel moto di C relativo ad O è

$$\delta\mathfrak{L} = \sum_{h=1}^{3} \mathfrak{Q}_h \delta q_h = \sum_{h=1}^{3} \boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{u}_h \delta q_h$$

da cui, per (44) e (47)

$$\mathfrak{Q}_h = \boldsymbol{u}_h \times \boldsymbol{\omega} \wedge \pi \boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^{3} \boldsymbol{u}_h \wedge \boldsymbol{u}_i \dot{q}_i \times \pi \boldsymbol{H} = \sum_{i=1}^{3} a_{hi} \dot{q}_i \quad (h=1,2,3) \tag{48}$$

con

$$a_{hi} = \pi \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{u}_h \wedge \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{H} \times \pi(\boldsymbol{u}_h \wedge \boldsymbol{u}_i) = -a_{ih} \quad (i,\ h=1,\ 2,\ 3). \tag{49}$$

Vale cioè $(8)_2$.

Essendo $\boldsymbol{H}$ un vettore costante, è anche

$$\frac{\partial a_{hi}}{\partial q_l} = \boldsymbol{H} \times \frac{\partial}{\partial q_h} \pi(\boldsymbol{u}_h \wedge \boldsymbol{u}_i) \qquad (i,\ h,\ l=1,\ 2,\ 3) \tag{50}$$

Pongo

$$\left\{ \begin{array}{l} h + 2 = k + 1 = l \\ \boldsymbol{u}_h = \sum_{r=1}^{3} u_{hr} \boldsymbol{i}_r \\ \boldsymbol{w}_l = \boldsymbol{u}_h \wedge \boldsymbol{u}_k = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i}_1 & \boldsymbol{i}_2 & \boldsymbol{i}_3 \\ u_{h1} & u_{h2} & u_{h3} \\ u_{k1} & u_{k2} & u_{k3} \end{vmatrix} = \sum_{r=1}^{3} w_{lr} \boldsymbol{i}_r\,. \end{array} \right. \tag{51}$$

Osservo innanzi tutto che per ogni vettore solidale $\boldsymbol{v}$ si ha

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_l} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}_l \wedge \boldsymbol{v} \qquad l = 1,\ 2,\ 3) \tag{52}$$

Infatti, per ogni fissato $l=1,\ 2,\ 3$, nel moto caratterizzato da

$$q_l(t) \equiv t,\ \ q_{l+1}(t) \equiv q_{l+2}(t) \equiv 0$$

è $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \dfrac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_l}$ e, per (47), $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{u}_l$.

Da (51) segue allora

$$(53) \qquad \frac{\partial \pi \boldsymbol{w}_l}{\partial q_l} = \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial w_{lr}}{\partial q_l} \pi \boldsymbol{i}_r + \sum_{r=1}^{3} w_{lr} \boldsymbol{u}_l \wedge \pi \boldsymbol{i}_r =$$

$$= \sum_{r=1}^{3} \frac{\partial w_{lr}}{\partial q_l} \pi \boldsymbol{i}_r + \boldsymbol{u}_l \wedge \pi \boldsymbol{w} \, .$$

Detta x l'omografia avente π per aggiunta, per $(51)_{1,3}$ è

$$(54) \quad \begin{cases} \boldsymbol{u}_l \wedge \pi \boldsymbol{w}_l = \boldsymbol{u}_l \wedge (x\boldsymbol{u}_h \wedge x\boldsymbol{u}_k) = \boldsymbol{u}_l \times x\boldsymbol{u}_k \cdot x\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}_l \times x\boldsymbol{u}_h \cdot x\boldsymbol{u}_k \\ \boldsymbol{u}_h \wedge \pi \boldsymbol{w}_h = \boldsymbol{u}_h \wedge (x\boldsymbol{u}_k \wedge x\boldsymbol{u}_l) = \boldsymbol{u}_h \times x\boldsymbol{u}_l \cdot x\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{u}_h \times x\boldsymbol{u}_k \cdot x\boldsymbol{u}_l \, . \end{cases}$$

Essendo anche x una dilatazione, è

$$\boldsymbol{u}_l \times x\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}_h \times x\boldsymbol{u}_l \, ,$$

onde

$$(55) \qquad \sum_{l=1}^{3} \boldsymbol{u}_l \wedge \pi \boldsymbol{w}_l = 0 \, .$$

Indicando con $\left(\frac{\partial}{\partial q_h}\right)_{\text{rel}}$ la derivata relativa alla terna mobile $\mathcal{T}$, per un generico vettore $\boldsymbol{w}$, anche variabile, è per (52),

$$(56) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial q_l} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial q_l}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{u}_l' \wedge \boldsymbol{w} \, .$$

Di conseguenza per (49) la costanza di $\boldsymbol{H}$ e $(51)_3$, si ha

$$\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial a_{l-2,l-1}}{\partial q_l} = \sum_{l=1}^{3} \boldsymbol{H} \times \frac{\partial \pi(\boldsymbol{u}_{l-2} \wedge \boldsymbol{u}_{l-1})}{\partial q_l} = \sum_{l=1}^{3} \boldsymbol{H} \times \frac{\partial \pi \boldsymbol{w}}{\partial q_l} \, .$$

Per (56) l'esser π solidale a $\mathcal{T}$ e $(51)_3$, si deduce

$$\sum_{l=1}^{3} \boldsymbol{H} \times \frac{\partial \pi \boldsymbol{w}_l}{\partial q_l} = \sum_{l=1}^{3} \boldsymbol{H} \times \left(\frac{\partial \pi \boldsymbol{w}_l}{\partial q_l}\right)_{\text{rel}} + \sum_{l=1}^{3} \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{u}_l \wedge \pi \boldsymbol{w}_l =$$

$$= \boldsymbol{H} \times \sum_{,r=}^{3} \frac{\partial w_{lr}}{\partial q_l} \pi \boldsymbol{i}_r = \boldsymbol{H} \times \pi \sum_{l,r=1}^{3} \frac{\partial w_{lr}}{\partial q_l} \boldsymbol{i}_r = \boldsymbol{H} \times \pi \sum_{l=1}^{3} \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}_l}{\partial q_l}\right)_{\text{rel}}$$

onde

$$7) \qquad \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial a_{l-2,l-1}}{\partial q_l} = \boldsymbol{H} \times \pi \sum_{l=1}^{3} \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}_l}{\partial q_l}\right)_{\text{rel}} \, .$$

Poichè per (46), $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ variano rispetto alla $\mathcal{T}$ solidale, solo tramite $q_2 = \varphi$, $q_3 = \vartheta$, in (57) è certo $\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}_1}{\partial q_1}\right)_{\text{rel}} = 0$ onde basta considerare

$$\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_3 \wedge \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{N} \wedge (\sin\vartheta \boldsymbol{i}_3 \wedge \boldsymbol{N}) + \cos\vartheta \boldsymbol{N} \wedge \boldsymbol{i}_3 =$$
$$= \sin\vartheta \boldsymbol{i}_3 - \cos\vartheta(\sin\varphi \boldsymbol{i}_1 + \cos\varphi \boldsymbol{i}_2)$$
$$\boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{u}_1 \wedge \boldsymbol{u}_2 = \sin\vartheta(\boldsymbol{i}_3 \wedge \boldsymbol{N} + \cos\vartheta \boldsymbol{i}_3) \wedge \boldsymbol{i}_3 = \sin\vartheta \boldsymbol{N}$$

da cui

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}_2}{\partial \varphi}\right)_{\text{rel}} = -\cos\vartheta(\boldsymbol{i}_1 \cos\varphi - \boldsymbol{i}_2 \sin\varphi) = -\cos\vartheta \boldsymbol{N}$$
$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{w}_3}{\partial \vartheta}\right)_{\text{rel}} = \cos\vartheta \boldsymbol{N},$$

onde

$$\sum_{l=1}^{3} \left(\frac{\partial \boldsymbol{w}_l}{\partial \varphi_l}\right)_{\text{rel}} = 0. \tag{58}$$

Dunque, qualunque siano la dilatazione π solidale a $\mathcal{T}$ e il vettore costante $\boldsymbol{H}$, per (57) e (58), oltre le $(8)_2$ anche le $(8)_1$ sono verificate. Allora, essendo inoltre la sollecitazione (42) a potenza nulla ed i vincoli fissi, per il teorema III di § 2, essa ammette potenziale generalizzato.

Scelta poi la terna fissa T in modo da soddisfare (45), risulta

$$\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{C}_3 = H\boldsymbol{u}_1$$

e poichè per (46) $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ si esprimono per $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$, φ e ϑ, le a_{hi} date da (49) risultano dipendere solo da $q_2 = \varphi$ e $q_3 = \vartheta$. Per il Corollario II del § 3, sussiste allora l'integrale dei momenti rispetto a $q_1 = \psi$.