Rendiconti *del* Seminario Matematico *della* Università di Padova

Renato Nardini

Sui fronti d'onda nella magneto-elasticità

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 225-243

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__225_0>

SUI FRONTI D'ONDA NELLA MAGNETO-ELASTICITÀ

Nota (*) *di* RENATO NARDINI (*a Bologna*)

1. Introduzione. - In margine alle sempre più estese ricerche riguardanti l'idromagnetismo sono apparsi recentemente anche dei lavori di magneto-elasticità [1], riguardanti cioè il comportamento di un mezzo solido, elettricamente conduttore, le cui vibrazioni di tipo elastico siano influenzate da un campo magnetico. Segnaliamo, in particolare, una ricerca sistematica svolta da A. Baños Jr. [2] sulla possibilità di *modi* costituiti da onde magneto-elastiche sinusoidali, piane ed omogenee, in un solido illimitato avente caratteristiche elettromagnetiche costanti: nel caso in cui la conducibilità elettrica del mezzo è finita, si riscontrano cinque possibili modi, di cui un primo gruppo di due modi corrisponde ad onde che, in assenza di campo magnetico, diventano di distorsione e un secondo gruppo di tre modi corrisponde ad onde aventi caratteristiche in parte delle onde di condensazione e in parte di quelle di distorsione; tutti questi modi presentano un'attenuazione più o meno accentuata ed un più o meno accentuato influsso del campo magnetico; quando la conducibilità elettrica può essere considerata infinita, i modi possibili si riducono a tre, dato che in ciascuno dei due gruppi suddetti viene a mancare un modo, dotato di forte attenuazione ed avente, più che altro, le caratteristiche di un'onda elettro-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 15 giugno 1958.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

magnetica, leggermente modificata, in modo anisotropo, dalla mutua influenza fra fenomeni magnetici e fenomeni elastici.

Nel presente lavoro si affronta la questione sotto un punto di vista più generale, in quanto ci si propone di indagare, mediante il metodo delle caratteristiche relative ai sistemi di equazioni differenziali, sull'esistenza di *fronti d'onda* di natura magneto-elastica, valutandone la corrispondente velocità di propagazione.

2. Schema del lavoro. - A tale scopo si introducono anzitutto le equazioni generali del problema (n. 3), dedotte dall'abbinamento delle equazioni di Maxwell per i mezzi in moto con l'equazione delle oscillazioni elastiche, nella quale si tenga conto anche della forza ponderomotrice che, in presenza di un campo magnetico, agisce su un elemento di corrente elettrica. Dalle dette equazioni si rileva subito che, nel caso di conducibilità elettrica finita, non esistono fronti d'onda di mutua influenza, ma solo i noti fronti d'onda di tipo elastico (condensazione o distorsione) e l'abituale fronte d'onda elettromagnetico. Si passa allora al caso dell'infinita conducibilità (n. 4): le corrispondenti equazioni si possono linearizzare nell'ipotesi che tanto la velocità $\boldsymbol{v}$ delle particelle del mezzo, quanto il campo magnetico indotto risultino sufficientemente piccoli; se ne può dedurre un'unica equazione vettoriale nella sola velocità $\boldsymbol{v}$.

Dopo avere ricavato le corrispondenti equazioni scalari relative alle condizioni di compatibilità dinamica (n. 5), si dimostra (n. 6) che sono possibili tre valori per la velocità di propagazione di un fronte d'onda, inteso quale superficie di discontinuità per le derivate seconde delle grandezze scalari del problema; uno di tali valori ha forma particolarmente semplice e corrisponde alla sovrapposizione di fenomeni di distorsione e fenomeni idromagnetici; gli altri due valori manifestano, in forma più complessa, mutua influenza fra fenomeni elettromagnetici e fenomeni elastici, sia di condensazione che di distorsione; i detti tre valori, esclusi casi particolari in cui due di essi (o, eccezionalmente, tutti e tre) coincidono, sono generalmente distinti e corrispondono alle velocità di fase dei tre modi relativi ad onde sinusoidali messe in evidenza da Baños nel caso dell'infinita conducibilità, da lui trattato marginalmente come caso limite; qui, invece, dato che, come si è detto prima, sotto l'attuale punto di vista, il caso della conducibilità finita non presenta interesse, si tratta direttamente ed estesamente il caso limite, fornendo occasionalmente qualche maggiore dettaglio applicabile anche ai risultati già conseguiti da Baños.

Per mettere in evidenza dei casi particolari in cui è possibile realizzare praticamente i tre tipi di onde ricavati in via teorica, si passa a trattare (n. 7) due casi di onde piane: onde che si propagano in direzione ortogonale al campo magnetico primario e che danno luogo a due tipi misti (uno di compressione ed uno di distorsione) e ad uno puramente elastico (di distorsione) ed onde che si propagano parallelamente al campo magnetico primario e che danno luogo ad un solo tipo misto (di distorsione) e ad un tipo puramente elastico (di compressione); nei detti casi è possibile ottenere la soluzione completa per le equazioni scalari del problema (relative alle componenti della velocità), che assumono l'aspetto dell'equazione delle corde vibranti.

Si studiano poi casi particolari di onde a divergenza nulla (n. 8) e a rotazione nulla (n. 9), ciascuno dei quali dà luogo ad un tipo di onde miste, riguardante le componenti della velocità normali al campo magnetico primario, e ad uno di onde puramente elastiche, relativo alle componenti della velocità parallele a quello; in entrambi i casi si accenna a soluzioni particolari del problema che mostrano la concreta possibilità di realizzare i tipi suddetti di onde.

Si indica infine (n. 10) come, dopo aver calcolato la velocità $\boldsymbol{v}$, si può calcolare il campo elettrico e, a meno di un inessenziale termine statico, il campo magnetico; entrambi i campi mantengono lo stesso carattere di propagazione rilevato per la velocità, mentre, com'è noto, in un mezzo di conducibilità elettrica infinita i fenomeni puramente elettromagnetici non possono essere altro che statici. Forse proprio per questo può sorgere qualche interesse pratico per i fenomeni magneto-elastici: pare invece assodato [2], in base ai pochi dati sperimentali disponibili, che, dal punto di vista dell'elasticità — come fin'ora, a quanto mi consta, è stata considerata la questione — i detti fenomeni abbiano importanza prevalentemente concettuale.

3. Equazioni generali del problema. - Consideriamo un solido illimitato, omogeneo ed isotropo; siano λ e ν le costanti di Lamè, ρ la densità, ε la costante dielettrica, μ la permeabilità magnetica e γ la condubilità elettrica (tutte supposte costanti). Data la piccola velocità di cui praticamente sono dotate le particelle del mezzo, oltre a trascurare ovviamente qualunque effetto relativistico, sostituiremo l'accelerazione euleriana a quella lagrangiana; inoltre, poichè tutta la trattazione seguente è basata sulla linearizzazione delle equazioni che reggono il fenomeno, trascureremo fin d'ora gli effetti dell'eventuale densità di carica elettrica che darebbe luogo a termini non lineari. Introduciamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $O\,x_1\,x_2\,x_3$, rispetto al quale sia $\boldsymbol{v}(P,\ t)$ la velocità del generico punto P del solido: riferendosi a tale sistema ed usando le abituali notazioni, le equazioni che reggono i fenomeni elettromagnetici si scrivono nella forma

$$\text{rot}\,\boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \varepsilon\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\text{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{j} = \gamma(\boldsymbol{E} + \mu\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H}) \tag{3}$$

$$\text{div}\,\boldsymbol{H} = 0. \tag{4}$$

Per descrivere le oscillazioni elastiche introdurremo le costanti

$$V_c = \sqrt{(\lambda + 2\nu)/\rho}\,, \quad V_d = \sqrt{\nu/\rho} \tag{5}$$

che, in assenza di fenomeni elettromagnetici, rappresentano notoriamente la velocità di propagazione rispettivamente delle onde di condensazione e delle onde di distorsione. Allora l'equazione delle oscillazioni elastiche si può scrivere

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2} - \rho(V_c^2 - V_d^2)\,\text{grad div}\,\boldsymbol{v} - \rho V_d^2\Delta\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t}\,, \tag{6}$$

dove $\boldsymbol{F}$ rappresenta la forza totale che agisce sull'unità di volume: nel nostro caso sarà opportuno distinguere la forza ponderomotrice che agisce su un elemento di corrente dalle rimanenti forze di massa assegnate $\boldsymbol{f}$, ponendo

$$\boldsymbol{F} = \mu \boldsymbol{j} \wedge \boldsymbol{H} + \boldsymbol{f}. \tag{7}$$

Una constatazione immediata che sorge dall'esame di queste equazioni è la seguente: intendendo, secondo il metodo delle caratteristiche, per fronte d'onda una superficie di discontinuità per le derivate di ordine massimo delle funzioni incognite, si può osservare che il termine di mutua azione $\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}$ contenuto nella (3) compare nella (1) non derivato.

Ne consegue che, se si costruisce il determinante relativo alle condizioni di compatibilità dinamica dedotto dalle equazioni (1), completata dalla (3), (2) e (6), completata dalla (7), questo si spezza nel prodotto del determinante relativo alle sole derivate prime di $\boldsymbol{E}$ ed $\boldsymbol{H}$ che compaiono nelle equazioni (1) e (2) e nel determinante relativo alle sole derivate seconde di $\boldsymbol{v}$ che compaiono nell'equazione (6); dunque i termini di mutua azione non influiscono su eventuali fronti d'onda, che perciò sono o di tipo puramente elettromagnetico (con velocità di propagazione data da $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$) o di tipo puramente elastico (con velocità di propagazione data V_c o da V_d). Se ne deduce che attraverso le eventuali superfici di discontinuità delle derivate seconde di $\boldsymbol{v}$, risultano continue le derivate prime di $\boldsymbol{H}$ che, per mezzo della (7), compaiono a secondo membro dell'equazione (6).

4. Caso della conducibilità elettrica infinita. - Se invece si considera infinita la conducibilità elettrica γ del solido, la (3) ci dà

$$\boldsymbol{E} = - \mu \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}, \tag{8}$$

mentre la (2) diventa

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{H}); \tag{9}$$

la (7), per mezzo della (1) e della (8), assume la forma

$$(10) \qquad \boldsymbol{F} = \mu\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{H} + \varepsilon\mu\,\frac{\partial \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H}}{\partial t}\right)\wedge\boldsymbol{H} + \boldsymbol{f}.$$

Le equazioni del problema sono ora rappresentate dalla (6), specificata dalla (10), e dalla (9). Per linearizzarle supponiamo che il campo magnetico $\boldsymbol{H}$ sia composto da un campo magnetico primario assegnato $\boldsymbol{H}_0$ costante e, per fissare le idee, diretto come l'asse delle x_3, e di un campo indotto incognito $\boldsymbol{h}$. Supporremo inoltre che la velocità $\boldsymbol{v}$ e il campo indotto $\boldsymbol{h}$ siano molto piccoli nei confronti del campo magnetico primario $\boldsymbol{H}_0$: trascureremo quindi i termini di ordine superiore al primo in $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{v}$ e loro derivate.

Allora si può porre

$$(11) \qquad \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H} = \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{v}_t\wedge\boldsymbol{H}_0$$

$$(12) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{H}}{\partial t}\wedge\boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}\wedge\boldsymbol{H}_0\right)\wedge\boldsymbol{H}_0 = -H_0^2\,\frac{\partial \boldsymbol{v}_t}{\partial t}$$

dove $\boldsymbol{v}_t$ sta ad indicare la componente della velocità parallela al piano $x_1\,x_2$ (e perciò normale al campo magnetico primario $\boldsymbol{H}_0$).

Dalla (10) si può allora ricavare,

$$(13) \qquad \mu\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\wedge\boldsymbol{H} = \varepsilon\mu^2 H_0^2\,\frac{\partial \boldsymbol{v}_t}{\partial t} + \boldsymbol{F} - \boldsymbol{f}.$$

Introducendo nell'equazione (9) il risultato fornito dalla (11) e, attraverso la (10), nell'equazione (6) quelli forniti dalle (12) e (13), si vede che, dal punto di vista matematico, le incognite sono $\boldsymbol{v}$ e $\dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$; ci si può però ridurre alla sola incognita $\boldsymbol{v}$: infatti se si applica l'operatore rot all'equazione (9) e la si moltiplica poi vettorialmente per $\mu\boldsymbol{H}_0$, tenendo conto della (11) e della (13) si ricava

$$(14) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\mu^2 H_0^2\,\frac{\partial \boldsymbol{v}_t}{\partial t} + \boldsymbol{F} - \boldsymbol{f}\right) = \mu[\operatorname{rot}\operatorname{rot}(\boldsymbol{v}_t\wedge\boldsymbol{H}_0)]\wedge\boldsymbol{H}_0$$

che può scriversi anche nella forma

$$\mu H_0^2\left(\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta\right)\boldsymbol{v}_t-\mu\,[\mathrm{grad\,div}\,(\boldsymbol{v}_t\wedge\boldsymbol{H}_0)]\wedge\boldsymbol{H}_0+\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t}=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial t}. \tag{15}$$

Tenendo conto che $\boldsymbol{H}_0$ è parallelo all'asse x_3 si può verificare che vale l'identità vettoriale

$$H_0^2\Delta\boldsymbol{v}_t+[\mathrm{grad\,div}\,(\boldsymbol{v}_t\wedge\boldsymbol{H}_0)]\wedge\boldsymbol{H}_0=H_0^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+\mathrm{grad}_t\,\mathrm{div}\right)\boldsymbol{v}_t$$

dove è

$$\mathrm{grad}_t=\frac{\partial}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_1+\frac{\partial}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_2,$$

essendo $\boldsymbol{i}_1$ ed $\boldsymbol{i}_2$ i versori fondamentali relativi agli assi x_1 e x_2. Segue che, posto [1])

$$V_a^2=\mu H_0^2/\rho, \tag{16}$$

la (15), combinata con la (6) dà, in definitiva, l'equazione nella sola incognita $\boldsymbol{v}$

$$\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial t^2}+V_a^2\left(\varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\mathrm{grad}_t\,\mathrm{div}\right)\boldsymbol{v}_t-$$
$$-(V_c^2-V_d^2)\,\mathrm{grad\,div}\,\boldsymbol{v}-V_d^2\Delta\boldsymbol{v}=\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial t}. \tag{17}$$

Tale equazione, per $\frac{\partial\boldsymbol{f}}{\partial t}\equiv 0$, si può anche ricavare, al limite per $\gamma\to\infty$, dall'equazione del quinto ordine, più generale e più complessa, da cui prende le mosse Baños per la sua trattazione, ma abbiamo preferito ricavarla direttamente, senza trascurare la forza di massa $\boldsymbol{f}$.

5. Condizioni di compatibilità dinamica. - Per applicare il metodo delle caratteristiche proiettiamo l'equazione (17)

---

1) È noto che il secondo membro della (16) rappresenta la velocità di propagazione in un mezzo fluido delle onde di Alfvén.

sugli assi cartesiani ottenendo

$$
(18)\quad \begin{cases}
(1+\varepsilon\mu V_a^2)\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = V_a^2\left[\dfrac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div} v_t + \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2}\right] + \\
\qquad\qquad + (V_c^2 - V_d^2)\dfrac{\partial}{\partial x_1}\operatorname{div} v + V_d^2 \Delta v_1 + \dfrac{\partial f_1}{\partial t} \\
(1+\varepsilon\mu V_a^2)\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} = V_a^2\left[\dfrac{\partial}{\partial x_2}\operatorname{div} v_t + \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}\right] + \\
\qquad\qquad + (V_c^2 - V_d^2)\dfrac{\partial}{\partial x_2}\operatorname{div} v + V_d^2 \Delta v_2 + \dfrac{\partial f_2}{\partial t} \\
\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = (V_c^2 - V_d^2)\dfrac{\partial}{\partial x_3}\operatorname{div} v + V_d^2 \Delta v_3 + \dfrac{\partial f_3}{\partial t}.
\end{cases}
$$

È da rilevare che, essendo praticamente $V_a^2 << \dfrac{1}{\varepsilon\mu}$, i coefficienti dei primi membri delle (18_1) e (18_2) sono praticamente uguali ad uno; dal punto di vista fisico ciò significa che è praticamente trascurabile l'apporto della corrente di spostamento $\varepsilon(\partial E/\partial t)$.

Seguendo Levi-Civita [3], indicato con σ un eventuale fronte d'onda sia

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \varphi_0$$

con φ_0 costante l'equazione della superficie σ in funzione del tempo; tale equazione, com'è noto, rappresenta nello spazio cinematico x_1, x_2, x_3, t la varietà caratteristica Σ del fenomeno. Ricordiamo inoltre che, fissato un istante determinato, nello spazio geometrico $x_1\, x_2\, x_3$ i valori

$$p_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

sono legati alle componenti $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ del versore n, normale, in quell'istante, alla superficie σ, dalle relazioni

$$\alpha_i = \frac{p_i}{g} \quad (i = 1,\ 2,\ 3) \qquad \text{con} \qquad g = \pm\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2};$$

inoltre, detta a la velocità di avanzamento del fronte d'onda rispetto al sistema $O\, x_1\, x_2\, x_3$ e posto

$$p_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

si ha la formula

$$a = -\frac{p_0}{g}. \tag{19}$$

Nel problema rappresentato dalle equazioni (18), attraverso la varietà caratteristica Σ si potranno pensare discontinue le derivate parziali seconde delle funzioni incognite $v_1\, v_2\, v_3$, mentre saranno continue le funzioni e le loro derivate prime. Si convenga di indicare con la lettera δ premessa ad un simbolo il salto attraverso la Σ della quantità rappresentata da tale simbolo. È noto che nello spazio cinematico le discontinuità delle derivate

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i\, \partial x_j} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,;\ i,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3\,;\ x_0 = t) \tag{20}$$

soddisfano alle relazioni, di tipo geometrico-cinematico.

$$\delta \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i\, \partial x_j} = l_k p_i p_j \qquad (k = 1,\ 2,\ 3;\ i,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ 3;\ x_0 = t) \tag{21}$$

dove gli l_k, uno per ognuna delle funzioni scalari incognite, rappresentano i parametri, a priori indeterminati, che caratterizzano le discontinuità in questione.

Il fatto che le derivate seconde (20), per rappresentare il fenomeno fisico, debbano soddisfare alle equazioni (18), dà luogo alle cosidette condizioni di compatibilità dinamica relative alle discontinità delle derivate stesse: introducendo la (19) e le (21), dopo qualche immediato passaggio, le dette condizioni si scrivono

$$\left\{\begin{aligned} &[(1 + \varepsilon\mu V_a^2)a^2 - V_d^2 - \alpha_3^2 V_a^2 - \alpha_1^2 \chi]l_1 - \\ &\qquad\qquad - \alpha_1\alpha_2\chi l_2 - \alpha_1\alpha_3(V_c^2 - V_d^2)l_3 = 0 \\ &- \alpha_1\alpha_2\chi l_1 + [(1 + \varepsilon\mu V_a^2)a^2 - V_d^2 - \alpha_3^2 V_a^2 - \alpha_2^2\chi]l_2 - \\ &\qquad\qquad - \alpha_2\alpha_3(V^2 - V_d^2)l_3 = 0 \\ &- \alpha_1\alpha_3(V_c^2 - V_d^2)l_1 - \alpha_2\alpha_3(V_c^2 - V_d^2)l_2 + \\ &\qquad\qquad + [a^2 - V_d^2 - (V_c^2 - V_d^2)\alpha_3^2]l_3 = 0 \end{aligned}\right. \tag{22}$$

dove, per brevità, si è posto

$$\chi = V_a^2 + V_c^2 - V_d^2. \tag{23}$$

6. Valori della velocità di propagazione. - I possibili valori per la velocità di avanzamento di un eventuale fronte d'onda sono forniti dall'equazione in a^2 ottenuta uguagliando a zero il determinante del sistema (22), lineare ed omogeneo nei parametri $l_1\, l_2\, l_3$. Tale equazione, calcolata esplicitamente, si scinde nelle due seguenti

$$a^2 - (V_d^2 + \alpha_3^2 V_a^2)/(1 + \varepsilon\mu V_a^2) = 0 \tag{24}$$

$$(1 + \varepsilon\mu V_a^2)a^4 - \{ V_a^2 + V_c^2(1 + \varepsilon\mu\alpha_3^2 V_a^2) + \tag{25}$$

$$+ V_d^2[1 + (1 - \alpha_3^2)\varepsilon\mu V_a^2] \} a^2 + \alpha_3^2 V_a^2 V_c^2 + (1 - \alpha_3^2) V_a^2 V_d^2 + V_c^2 V_d^2 = 0.$$

Giova rilevare che in entrambe le equazioni compare il solo coseno direttore α_3 [2]) e quindi la presenza del campo magnetico $\boldsymbol{H}_0$, parallelo all'asse x_3, determina un'evidente anisotropia nei valori della velocità di propagazione di un eventuale fronte d'onda.

L'equazione (24) dà immediatamente uno dei possibili valori per tale velocità (in ciascuno dei due versi, dato il doppio segno che compete ad a): si tratta di un'onda magneto-elastica dovuta alla sovrapposizione di fenomeni di distorsione e fenomeni idromagnetici.

Quanto all'equazione (25), si può osservare che, indicandone con $f(a^2)$ il primo membro, si ha

$$f(V_d^2) = \alpha_3^2 V_a^2 (V_c^2 - V_d^2)(1 - \varepsilon\mu V_d^2).$$

Dato che nei casi concreti è

$$V_c^2 > V_d^2 \qquad \text{e} \qquad 1 >> \varepsilon\mu V_d^2,$$

è certamente

$$f(V_d^2) \geq 0,$$

---

[2]) Si è ricorso, ove necessario, all'ovvia relazione $\sum_1^3 \alpha_i^2 = 1$.

dove il segno uguale si ha solo per $\alpha_3 = 0$; in questo caso particolare le due radici della (25) sono V_d^2, che rappresenta un tipo di onde puramente elastiche, e $(V_a^2 + V_c^2)/(1 + \varepsilon\mu V_a^2)$, che rappresenta invece onde di tipo misto e che, praticamente, è maggiore di V_c^2. Per $\alpha_3 = 0$, d'altra parte, la radice fornita dalla (24) diventa $V_d^2/(1 + \varepsilon\mu V_a^2)$, che risulta inferiore ma, praticamente, molto prossima alla V_d^2.

Inoltre si ha, per analogo ragionamento,

$$f(V_c^2) = -(1 - \alpha_3^2)V_a^2(V_c^2 - V_d^2)(1 - \varepsilon\mu V_c^2) \leq 0,$$

dove il segno uguale si ha solo per $\alpha_3^2 = 1$; in questo caso particolare le due radici della (25) sono V_c^2, che corrisponde ad onde puramente elastiche e $(V_a^2 + V_d^2)/(1 + \varepsilon\mu V_a^2)$; quest'ultima radice coincide con quella fornita dalla (24) ed è relativa ad onde di tipo misto; in via eccezionale entrambe le radici possono coincidere e precisamente quando si verifica la relazione

$$V_c^2 = (V_a^2 + V_d^2)/(1 + \varepsilon\mu V_a^2),$$

cioè, ricordando la (16), per un campo magnetico primario tale che sia

$$H_0^2 = \frac{\rho}{\mu} \frac{V_c^2 - V_d^2}{1 - \varepsilon\mu V_c^2}; \tag{26}$$

in tale caso esiste un solo fronte d'onda magneto-elastico avente velocità di propagazione uguale a quella delle onde di condensazione.

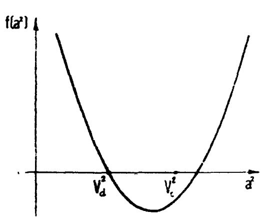

Fig. 1

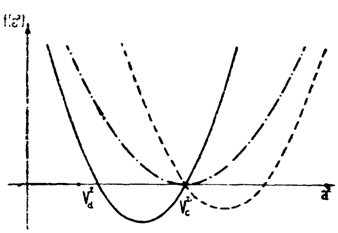

Fig. 2

L'andamento della funzione $f(a^2)$ nel caso $\alpha_3 = 0$ è, in via puramente indicativa, rappresentato in fig. 1, mentre nel caso

$\alpha_3^2 = 1$, può, a seconda dei valori di V_a^2 (e cioè di H_0^2), seguire uno dei tre diagrammi che, sempre in via puramente indicativa, sono riportati in fig. 2.

Se si esclude il caso particolare che si presenta quando sussiste la relazione (26), resta allora provato che l'equazione (25) ha sempre due radici reali distinte, di cui, generalmente, la minore è compresa fra V_d^2 e V_c^2, mentre l'altra è superiore a V_c^2; entrambe rappresentano possibili fronti d'onda che, in forma un po' complicata, manifestano mutua influenza fra fenomeni elettromagnetici e fenomeni elastici, sia di condensazione che di distorsione.

7. Casi di onde piane. - Supponendo che sia

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{27}$$

tratteremo ora due casi di onde piane, nei quali è possibile calcolare esplicitamente la soluzione del problema:

a) caso in cui la velocità delle particelle dipende dal tempo e da una sola coordinata spaziale secondo uno degli assi normali al campo magnetico primario, per esempio la x_1; i fronti d'onda sono allora piani normali all'asse x_1. Le equazioni (18) si riducono alle seguenti

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \{ (V_a^2 + V_c^2)/(1 + \varepsilon\mu V_a^2) \} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} \\ &\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} + \{ V_d^2/(1 + \varepsilon\mu V_a^2) \} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \\ &\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = V_d^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2}, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

che sono indipendenti fra loro, immediatamente risolubili e da cui risulta un fronte di onde puramente elastiche (di distorsione), riguardante la componente v_3 della velocità (trasversa rispetto alla direzione di propagazione e parallela al campo H_0), un fronte d'onde di distorsione, leggermente modificate dal campo magnetico, relativo alla componente v_2 della velocità (normale ad $\boldsymbol{H}_0$ e alla direzione di propagazione) ed un fronte d'onde magneto-elastiche (di compressione) riguardante la componente longitudinale v_1. Le corrispondenti velocità di propagazione sono tutte e tre distinte.

b) caso in cui la velocità delle particelle dipende dal tempo e dalla sola variabile x_3: i fronti d'onda sono allora piani normale all'asse x_3. Le equazioni (18) si riducono alle seguenti

$$
(29) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = \{ (V_a^2 + V_d^2)/(1 + \varepsilon\mu V_a^2) \} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2} \qquad (i = 1,\ 2) \\ &\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = V_c^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}, \end{aligned} \right.
$$

che sono indipendenti e immediatamente risolubili; se ne ottiene un fronte d'onda relativo ad onde puramente elastiche (di compressione) e riguardante la componente della velocità v_3, longitudinale e parallela al campo magnetico primario, mentre nei riguardi delle componenti della velocità che risultano trasverse sia rispetto alla direzione di propagazione che rispetto ad $\boldsymbol{H}_0$ si ha un fronte relativo ad onde magneto-elastiche (di distorsione). Per il particolare campo $\boldsymbol{H}_0$ espresso dalla formula (26) si ha un unico fronte d'onda che ha la velocità delle comuni onde di condensazione.

Giova rilevare che per onde piane aventi direzione di propagazione generica, i possibili valori per la velocità di avanzamento del fronte d'onda sono ancora forniti dalle equazioni (24) e (25): non è infatti restrittivo scegliere gli assi x_1 e x_2 in modo che il versore $\boldsymbol{n}$ normale al fronte d'onda giaccia nel piano $x_1\, x_3$ e sia quindi

$$
\boldsymbol{n} = \alpha_1 \boldsymbol{i}_1 + \alpha_3 \boldsymbol{i}_3, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1^2 + \alpha_3^2 = 1\,;
$$

dato che le componenti $v_1\, v_2\, v_3$ della velocità si esprimeranno in funzione dell'argomento $t - \dfrac{\alpha_1 x_1 + \alpha_3 x_3}{a}$, nelle equazioni generali (18) sarà

$$
\frac{\partial}{\partial x_2} = 0
$$

e quindi esse si semplificano nel seguente modo

$$
(30)\quad \begin{cases}
(1+\varepsilon\mu V_a^2)\dfrac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}=(V_a^2+V_d^2)\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)v_1+ \\
\qquad\qquad +(V_c^2-V_d^2)\dfrac{\partial}{\partial x_1}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) \\
(1+\varepsilon\mu V_a^2)\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}=V_a^2\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x_3^2}+V_d^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)v_2 \\
\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}=(V_c^2-V_d^2)\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}\right)+V_d^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)v_3;
\end{cases}
$$

da qui è immediatamente ricavabile v_2, che è trasversa rispetto alla direzione di propagazione e che risulta indipendente dalle altre due: la relativa velocità di propagazione è quella data dall'equazione (24), mentre è facile ricavare che, se si calcola l'equazione delle varietà caratteristiche relativa alle incognite v_1 e v_3 si ottiene esattamene la (25).

8. Onde a divergenza nulla. - Se si impone l'ulteriore condizione

$$
(31)\qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v}=0,
$$

prendiamo in considerazione solo il caso particolare in cui sia anche

$$
(32)\qquad \operatorname{div} \boldsymbol{v}_t=0
$$

e cioè, in forma cartesiana,

$$
(33)\qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0,\qquad \frac{\partial v_3}{\partial x_3}=0.
$$

Ritenendo sempre valida la (27), le equazioni (18) si riducono allora alle seguenti

$$
(34)\quad \begin{cases}
(1+\varepsilon\mu V_a^2)\dfrac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}=V_a^2\dfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2}+V_d^2\Delta v_i \qquad (i=1,\ 2) \\
\dfrac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}=V_d^2\Delta_t v_3\,;
\end{cases}
$$

i possibili valori per la velocità di propagazione sono quindi solo due e riguardano onde puramente elastiche relative alla componente v_3 della velocità, parallela al campo magnetico $\boldsymbol{H}_0$, ed onde di tipo misto relative alle componenti v_1 e v_2 della velocità, normali ad $\boldsymbol{H}_0$. La (34_2) contiene la sola incognita v_3 ed è risolubile indipendentemente dalle prime due, con la sola restrizione imposta dalla (33_2) [3].

Le (34_1) sono soddisfatte, per esempio, da onde piane di direzione generica espresse da

$$v_i = F_i\left(t - \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{a}\right) + G_i\left(t + \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{a}\right) \qquad (i = 1,\ 2) \tag{35}$$

con

$$a^2 = (\alpha_3^2 V_a^2 + V_d^2)/(1 + \varepsilon\mu V_a^2), \quad \sum_1^3 \alpha_i^2 = 1, \tag{36}$$

dove F_i e G_i sono simboli di funzioni arbitrarie condizionate dalla relazione

$$\alpha_1(-F_1' + G_1') + \alpha_2(-F_2' + G_2') = 0 \tag{37}$$

imposta dalla (33_1); tale relazione è soddisfatta, per esempio, se è

$$\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 = 0, \quad \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 = 0,$$

il che significa che $\boldsymbol{v}_t$ è perpendicolare al versore $\boldsymbol{n}$ che individua la normale al fronte d'onda.

Altra soluzione particolare delle (34_1) è fornita da

$$\begin{cases} v_1 = F_1\left(t - \dfrac{\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{a_1}\right) + G_1\left(t + \dfrac{\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3}{a_1}\right) \\ v_2 = F_2\left(t - \dfrac{\beta_1 x_1 + \beta_3 x_3}{a_2}\right) + G_2\left(t + \dfrac{\beta_1 x_1 + \beta_3 x_3}{a_2}\right) \end{cases} \tag{38}$$

---

[3]) Una forma molto generale per la soluzione di (34_2) è, notoriamente

$$v_3 = A(x_1,\ x_2)\varphi[f(x_1,\ x_2) + V_d t],$$

accompagnata da opportune condizioni sulle funzioni A ed f.

con

$$(39) \qquad a_1^2 = (\alpha_3^2 V_a^2 + V_d^2)/(1 + \varepsilon\mu V_a^2), \; a_2^2 = (\beta_3^2 V_a^2 + V_d^2)/(1 + \varepsilon\mu V_a^2)$$
$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad \beta_1^2 + \beta_3^2 = 1,$$

dove le funzioni $F_1\, F_2\, G_1\, G_2$ sono completamente arbitrarie; dal punto di vista fisico la propagazione delle componenti v_1 e v_2 avviene separatamente.

9. Onde a rotazione nulla. - Nel caso in cui il moto delle particelle del mezzo sia irrotazionale si avrà

$$(40) \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = 0\,;$$

prendiamo in considerazione solo il caso particolare in cui sia anche

$$(41) \qquad \operatorname{rot} \boldsymbol{v}_t = 0$$

cioè, in forma cartesiana,

$$(42) \qquad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0.$$

Ritenendo sempre valida la (27), le equazioni (18) si riducono allora alle seguenti

$$(43) \qquad \begin{cases} (1 + \varepsilon\mu V_a^2)\dfrac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = (V_a^2 + V_c^2)\Delta_t v_i & (i = 1,\ 2) \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} = V_c^2 \dfrac{\partial^2 v_3}{\partial x_3^2}\,, \end{cases}$$

di cui la terza, immediatamente risolubile, dà luogo ad onde di tipo puramente elastico.

Le prime due equazioni danno luogo ad onde di tipo misto e, per esempio, sono risolubili mediante le espressioni

$$(44) \qquad v_i = F_i\left(t - \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{a}\right) + G_i\left(t + \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{a}\right) \quad (i = 1,\ 2)$$

con

$$a^2 = (V_a^2 + V_c^2)/(1 + \varepsilon\mu V_a^2), \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1,$$

dove F_i e G_i sono simboli di funzioni arbitrarie condizionate dalla relazione

$$\alpha_2(-F_1' + G_1') = \alpha_1(-F_2' + G_2') \tag{45}$$

imposta da (41_1). Tale relazione è soddisfatta se è

$$\alpha_1 F_2 - \alpha_2 F_1 = 0, \quad \alpha_1 G_2 - \alpha_2 G_1 = 0, \tag{46}$$

il che significa che il vettore $\boldsymbol{v}_t$ è parallelo al versore $\boldsymbol{n}$ di componenti α_1, α_2, 0 che individua la normale al fronte d'onda.

10. Calcolo del campo elettromagnetico. - Dopo avere calcolato le componenti della velocità — come è stato possibile nei casi particolari trattati ai nn. 7, 8, 9 — si può calcolare immediatamente il campo elettrico per mezzo della formula (8), che, linearizzata, dà

$$\boldsymbol{E} = -\mu \boldsymbol{v}_t \wedge \boldsymbol{H}_0 . \tag{47}$$

Il campo magnetico si può ottenere, a meno di un inessenziale campo statico, integrando rispetto al tempo l'equazione (9) che, linearizzata, diventa

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{v}_t \wedge \boldsymbol{H}_0) = H_0 \left| -\operatorname{div} \boldsymbol{v}_t \boldsymbol{i}_3 + \frac{\partial \boldsymbol{v}_t}{\partial x_3} \right| . \tag{48}$$

Per esempio nel caso delle onde piane fornite dalle (28) si ha dalla (48)

$$\frac{\partial H_1}{\partial t} = \frac{\partial H_2}{\partial t} = 0 \tag{49}$$

e quindi le componenti H_1 ed H_2 danno luogo ad un campo statico, mentre è

$$\frac{\partial H_3}{\partial t} = -H_0 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \tag{50}$$

ed essendo

$$v_1 = F\left(t - \frac{x_1}{a}\right) + G\left(t + \frac{x_1}{a}\right), \quad a^2 = (V_a^2 + V_c^2)/(1 + \varepsilon\mu V_a^2) \tag{51}$$

con F e G arbitrarie, si può ricavare, tenendo conto anche del campo magnetico primario $\boldsymbol{H}_0$,

$$H_3 = H_0 + \frac{H_0}{a}\left[F\left(t - \frac{x_1}{a}\right) - G\left(t + \frac{x_1}{a}\right)\right] \tag{52}$$

Invece, nel caso delle onde piane fornite dalle (29), si ha dalla (48)

$$\frac{\partial H_3}{\partial t} = 0 \tag{53}$$

per cui si potrà porre $H_3 = H_0$, mentre in corrispondenza degli assi x_1 ed x_2 si ha

$$\frac{\partial H_i}{\partial t} = H_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \qquad (i = 1,\ 2); \tag{54}$$

essendo

$$v_i = F_i\left(t - \frac{x_3}{a}\right) + G_i\left(t + \frac{x_3}{a}\right), \qquad a^2 = (V_a^2 + V_d^2)/(1 + \varepsilon\mu V_a^2) \tag{55}$$

con F_i e G_i arbitrarie si ricava

$$H_i = -\frac{H_0}{a}\left[F_i\left(t - \frac{x_3}{a}\right) - G_i\left(t + \frac{x_3}{a}\right)\right] \qquad (i = 1,\ 2). \tag{56}$$

Risulta quindi evidente che le operazioni richieste dalle (47) e (48) mantengono anche per il campo elettromagnetico le caratteristiche di propagazione insite nelle soluzioni dei casi particolari citati: segue che, mentre, com'è noto, in un mezzo di conducibilità elettrica infinita i fenomeni puramente elettromagnetici non possono essere altro che statici, nel caso delle onde magneto-elastiche si può ottenere, nello stesso mezzo, la propagazione di fronti d'onda relativi anche a campi elettromagnetici. Concludiamo allora rilevando che, se dal punto di vista dell'elasticità i fenomeni magneto-elastici hanno importanza prevalentemente concettuale (in quanto la velocità di propagazione ad essi relativa, in base ai pochi dati sperimentali disponibili [4]), appare molto prossima a quella delle onde elastiche pure), non è da escludere che i detti fenomeni possano presentare qualche interesse pratico dal punto di vista dell'elettromagnetismo.

---

[4]) Si veda, ad esempio, [2], n. 6.

BIBLIOGRAFIA

[1] D. H. ROBEY, *Magnetic Dispersion of Sound in Electrically Conducting Plates*, J. Acoust. Soc. Am., *25*, 1953, 603-609.
R. A. ALPHER and R. J. RUBIN, *Magnetic Dispersion and Attenuation of Sound in Conducting Fluids and Solids*, id., *26*, 1954, 452-453.

[2] A. BAÑOS Jr., *Normal Modes Characterizing Magneto-elastic Plane Waves*, Phys. Rev., 104, 1956, 300-305.

[3] T. LEVI CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Zanichelli, Bologna, 1931.