RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GABRIELE DARBO

Teoria dell'omologia in una categoria di mappe plurivalenti ponderate

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 188-220

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__188_0>

TEORIA DELL'OMOLOGIA IN UNA CATEGORIA DI MAPPE PLURIVALENTI PONDERATE

Memoria (*) *di* Gabriele Darbo (*a Padova*)

In questo lavoro mi propongo di costruire una teoria dell'omologia in una categoria costituita dagli spazi di Hausdorff e da certe trasformazioni tra questi spazi, che generalizzano le ordinarie trasformazioni continue e che verranno chiamate *mappe ponderate*. Una mappa ponderata è in sostanza una trasformazione che a ciascun punto di uno spazio X, associa una combinazione lineare (formale) di punti di uno spazio Y con coefficienti in un anello commutativo unitario. Nella definizione di mappa ponderata si dovranno naturalmente imporre certe condizioni di semicontinuità del *supporto* e di conservazione locale dei coefficienti.

Semplici esempi di mappe ponderate si ottengono volendo, dalla considerazione di funzioni algebriche sulla sfera complessa.

La teoria dell'omologia qui costruita soddisfa agli assiomi di Eilenberg-Steenrod e pertanto essa restituisce la teoria classica nel caso di spazi triangolabili e applicazioni continue (mappe univalenti).

1. - Alcune nozioni preliminari.

Sia Λ un anello commutativo con elemento unità: 1 $(\neq 0)$. Supporremo Λ fissato una volta per tutte.

(*) Pervenuta in Redazione il 25 aprile 1958.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

DEF. 1. - *Indicheremo con* $\mathfrak{F}(X)$, *X essendo un insieme arbitrario* [1]*, il* Λ*-modulo libero generato dagli elementi di X.* Ogni elemento $\xi \in \mathfrak{F}(X)$ è dunque rappresentabile mediante una somma formale finita del tipo

$$(1) \qquad \xi = \Sigma_i \lambda_i x_i , \quad \lambda_i \in \Lambda, \quad x_i \in X, \qquad (i = 1, \dots, s).$$

Identificheremo gli elementi $x \in X$ con $1x \in \mathfrak{F}(X)$ così che X costituirà una base per $\mathfrak{F}(X)$. E se A è un sottoinsieme di X sarà allora $\mathfrak{F}(A)$ un sottomodulo di $\mathfrak{F}(X)$.

DEF. 2. - *Ci converrà porre, per ogni sottoinsieme* $A \subset X$

$$A * x = 1 \quad \text{se} \quad x \in A$$
$$A * x = 0 \quad \text{se} \quad x \in X - A$$

e

$$A * \Sigma_i \lambda_i x_i = \Sigma_i \lambda_i (A * x_i) \quad \text{se} \quad \lambda_i \in \Lambda, \ x_i \in X; \quad (i = 1, \dots, s).$$

In tal modo $A *$ potrà pensarsi come un Λ-omomorfismo di $\mathfrak{F}(X)$ in Λ.

DEF. 3. - *Se* $\xi \in \mathfrak{F}(X)$, *una rappresentazione del tipo* (1) *è univocamente determinata da* ξ *qualora i punti* x_i *siano distinti e i* $\lambda_i \neq 0$. *L'insieme dei punti* x_i *determinato da* ξ *lo indicheremo con la notazione* $|\xi|$.

DEF. 4. - *Se X e Y sono spazi topologici, una trasformazione t che associa ad ogni punto* $x \in X$ *un sottoinsieme* $t(x)$ *di Y dicesi semicontinua superiormente se per ogni* $x_0 \in X$ *e per ogni insieme aperto* $\mathfrak{U}$ *contenente* $t(x_0)$ *esiste un intorno W di* x_0 *tale da aversi*

$$t(x) \subset \mathfrak{U}$$

allorchè x varia in W. Noi avremo bisogno in seguito del seguente

---

[1]) In seguito X potrà rappresentare uno spazio topologico. Con $\mathfrak{F}(X)$ si intenderà ancora il Λ-modulo libero generato dai punti di X, senza peraltro attribuire a $\mathfrak{F}(X)$ alcuna struttura topologica.

LEMMA 1. - *Se X e Y sono spazi topologici e Y è di Hausdorff e se $\{t_\alpha\}_{\alpha \in M}$ è una arbitraria famiglia di trasformazioni semicontinue superiormente e tali che $t_\alpha(x)$ sia un sottoinsieme finito di Y per ogni $x \in X$ e per $\alpha \in M$, allora la trasformazione t definita da*

$$t(x) = \bigcap_{\alpha \in M} t_\alpha(x) \qquad \text{per } x \in X,$$

è anch'essa semicontinua superiormente.

DIM. - Per un fissato $x_0 \in X$ essendo i $t_\alpha(x_0)$ insiemi finiti, potremo estrarre un certo numero finito d'indici $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in M$ in modo che si abbia

$$t(x_0) = t_{\alpha_1}(x_0) \cap t_{\alpha_2}(x) \cap \dots \cap t_{\alpha_n}(x_0)$$

Prendiamo ad arbitrio un insieme aperto $\mathfrak{U}$ contenente $t(x_0)$ e consideriamo l'insieme finito

$$t_{\alpha_1}(x_0) \cup t_{\alpha_2}(x_0) \cup \dots \cup t_{\alpha_n}(x_0);$$

se $y_1, y_2, \dots, y_N$ sono i suoi punti distinti, scegliamo gli intorni $u_1, u_2, \dots, u_N$ di detti punti in modo che siano a due a due disgiunti. Supponiamo di aver numerato i punti y_i in modo che i primi k ($k \leq N$) siano proprio quelli appartenenti a $t(x_0)$. Potremo altresì supporre di aver scelto gli intorni $u_1, u_2, \dots, u_k$ in modo che siano contenuti in $\mathfrak{U}$, altrimenti basterebbe prendere l'intersezione di questi con $\mathfrak{U}$. Se indichiamo allora con $\mathfrak{U}_j$ l'intersezione di quelli $u_i (i = 1, \dots, N)$ che contengono un punto di $t_{\alpha_j}(x_0)$, risulta $t_{\alpha_j}(x_0) \subset \mathfrak{U}_j$ ed è evidentemente

$$\bigcap_{j=1}^{N} \mathfrak{U}_j = u_1 \cup u_2 \cup \dots \cup u_k \subset \mathfrak{U}.$$

D'altra parte per ogni $j = 1, 2, \dots, N$ e per la semicontinuità superiore di t_{α_j} si potrà trovare un intorno W_j di x_0 tale che sia

$$t_{\alpha_j}(x) \subset \mathfrak{U}_j ,$$

quando x varia in W_j e quindi anche

$$t(x) \subset \bigcap_{j=1}^{N} t_{\alpha_j}(x) \subset \bigcap_{j=1}^{N} \mathfrak{U}_j \subset \mathfrak{U}$$

per ogni x appartenente all'intorno $W = \bigcap_{j=1}^{N} W_j$ del punto x_0. Da ciò la semicontinuità superiore di t.

2. - Mappe ponderate.

DEF. 5. - *Siano X e Y spazi topologici di Hausdorff e sia f un Λ-omomorfismo di $\mathfrak{F}(X)$ in $\mathfrak{F}(Y)$. Noi diremo che f è una mappa ponderata (o semplicemente una mappa) di X in Y quando esiste (almeno) una trasformazione t che associa ad ogni punto $x \in X$ un sottoinsieme $t(x) \subset Y$, tale da soddisfare alle seguenti condizioni:*

T. 1) *$t(x)$ sia un insieme finito per ogni $x \in X$;*

T. 2) *t sia superiormente semicontinua;*

T. 3) *per ogni $x \in X$ sia $|f(x)| \subset t(x)$, in altri termini $f(x)$ sia suscettibile di una rappresentazione del tipo $f(x) = \sum_i \lambda_i y_i$ con $y_i \in t(x)$ e $\lambda_i \in \Lambda$;*

T. 4) *per ogni sottoinsieme aperto $B \subset Y$ e per ogni punto $x_0 \in X$ tale che $t(x_0)$ sia disgiunto dalla frontiera di B, si abbia*

$$B * f(x) = B * f(x_0)$$

quando x varia in un conveniente intorno di x_0.

DEF. 6. - *Una trasformazione t che soddisfi alle condizioni* T. 1), T. 2), T. 3), T. 4), *precedenti, la chiameremo un* **supporto** *della f.* Evidentemente una mappa f può ammettere più supporti, ma tra questi vi è uno che potremo chiamare **supporto minimale** della f e che indicheremo con $\mathcal{T}_f$, definito dalla

$$\mathcal{T}_f(x) = \bigcap_t t(x), \qquad x \in X$$

dove l'intersezione si intende estesa a tutti i supporti t della f. Per giustificare questa definizione è opportuno dimostrare il seguente

TEOREMA 1. - *$\mathcal{T}_f$ è un supporto della f.*

Infatti le condizioni T. 1) e T. 3) sono soddisfatte in modo evidente; la T. 2) è diretta conseguenza del lemma 1. Per quanto riguarda la condizione T. 4) si osservi che se B è un insieme aperto la cui frontiera è disgiunta da $\mathcal{C}_f(x_0)$, scelto un qualunque supporto t della f e un intorno aperto u di $t(x_0)$ si ha che $B \cap u$ ha la frontiera disgiunta da $t(x_0)$ ed è quindi

$$(B \cap u) * f(x) = (B \cap u) * f(x_0)$$

quando x appartiene a un conveniente intorno W_1 di x_0. Poichè in un intorno opportuno W_2 di x_0 vale pure la

$$(B \cap u) * f(x) = B * f(x)$$

e ciò in virtù della T. 2) e della T. 3), se ne deduce che per $x \in W_1 \cap W_2$ è

$$B * f(x) = B * f(x_0)$$

e cioè che $\mathcal{C}_f$ soddisfa anche la condizione T. 4).

OSSERVAZIONE 1. - Si noti che il supporto minimale $\mathcal{C}_f$ di una mappa f, in virtù della condizione T. 3 è tale che per ogni $x \in X$ è $|f(x)| \subset \mathcal{C}_f(x)$; tuttavia può accadere che non risulti $|f(x)| = \mathcal{C}_f(x)$. Se in un punto x_0, $\mathcal{C}_f(x)$ non è vuoto, detti $y_1 y_2 \dots y_s$ i suoi punti distinti, restano determinati i coefficienti $\lambda_i \in \Lambda$ tali che $f(x) = \sum_1^s{}_i \lambda_i y_i$ allora alcuni (o anche tutti) i λ_i possono esser nulli; i corrispondenti punti y_i si diranno punti di *annichilamento* di f in x_0.

3. - La categoria $\mathfrak{S}$

Se X e Y sono spazi di Hausdorff, per indicare che f è una mappa ponderata di X in Y scriveremo smplicemente $f : X \to Y$. Se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ sono mappe, X, Y, Z spazi di Hausdorff allora il Λ-omomorfismo composto gf è una mappa di X in Z; infatti non è difficile riconoscere che la trasformazione t data da $t(x) = t_g[t_f(x)]$ per $x \in X$ è un supporto di gf se t_f e t_g sono supporti rispettivamente di f e di g. Si constata pure immediatamente che la totalità degli spazi di Hausdorff e delle mappe tra questi costituisce una *categoria* nel senso di Eilenberg-MacLane [2]) che indicheremo con

[2]) Vedi: EILENBERG and MACLANE; [Trans. Amer. Math. Soc., 58 (1945), 231-294].

$\mathfrak{S}$ (oppure con $\mathfrak{S}_\Lambda$ se non si vuol sottointendere l'anello Λ dei coefficienti).

OSSERVAZIONE 2. - Poichè X è una base per $\mathfrak{F}(X)$, una mappa $f: X \rightharpoonup Y$ è univocamente determinata dalla corrispondenza che essa subordina tra X e $\mathfrak{F}(Y)$. In particolare una trasformazione continua g (univoca) tra due spazi di Hausdorff X e Y determina una mappa $\tilde{g}: X \rightharpoonup Y$ che potremo senza pericolo di confusione in seguito indicare con lo stesso simbolo g.

In tal senso si può affermare che la categoria $\mathfrak{S}$ contiene la sottocategoria degli spazi di Hausdorff e delle ordinarie trasformazioni continue. In seguito le trasformazioni continue, considerate come mappe in $\mathfrak{S}$ saranno chiamate **mappe univalenti.**

OSSERVAZIONE 3. - Date le mappe $f_i: X \rightharpoonup Y$ in un numero finito, ha senso parlare di somma o, più in generale, di combinazione lineare con coefficienti $\lambda_i \in \Lambda$, definita come somma o, rispettivamente, combinazione lineare di Λ-omomorfismi di $\mathfrak{F}(X)$ in $\mathfrak{F}(Y)$, ed è

$$f = \sum_i \lambda_i f_i$$

una mappa $f: X \rightharpoonup Y$, per la quale un supporto t è dato da

$$t(x) = \bigcup_i t_i(x) \qquad \text{per } x \in X,$$

essendo i t_i supporti delle f_i.

È del tutto ovvia la proprietà bilineare del prodotto di mappe: Se $f_i: X \rightharpoonup Y$, $g_j: Y \rightharpoonup Z$; λ_i, $\mu_j \in \Lambda$ $(i = 1, \dots, r;$ $j = 1, \dots, s)$ si ha, tenendo presente che Λ è commutativo

$$\sum_j \mu_j g_j \cdot \sum_i \lambda_i f_i = \sum_{ij} \mu_i \lambda_j g_i f_j .$$

La categoria $\mathfrak{S}$ si arricchisce così di una struttura additiva che la rende particolarmente maneggevole, come avremo occasione di constatare in seguito.

Ci converrà ora introdurre la seguente definizione:

DEF. 7. - *Se X e Y sono spazi di Hausdorff, indicheremo con* $\mathrm{Map}_\Lambda(X, Y)$ *o semplicemente con* $\mathrm{Map}(X, Y)$ *l'insieme delle mappe di X in Y.*

Ovviamente $\mathrm{Map}(X, Y)$ costituisce un Λ-modulo e diviene un funtore[3]), covariante in Y e controvariante in X se si indica con

$$\mathrm{Map}(f, g) : \mathrm{Map}(X, Y) \to \mathrm{Map}(X', Y')$$

il Λ-omomorfismo definito da

$$\mathrm{Map}(f, g)h = ghf$$

per $h \in \mathrm{Map}(X, Y)$, essendo $f : X' \to X$ e $g : Y \to Y'$.

4. - Prodotti topologici.

Se X e Y sono spazi di Hausdorff, con $X \times Y$ indichiamo l'ordinario prodotto topologico e con $x \times y$ il punto di $X \times Y$ di coordinate $x \in X$ e $y \in Y$. Il prodotto $(\times)$ di un elemento di $\mathcal{F}(X)$ per un elemento di $\mathcal{F}(Y)$ resta definito dalla relazione

$$(\sum_i \lambda_i x_i) \times (\sum_j \mu_j y_j) = \sum_{ij} \lambda_i \mu_j (x_i \times y_j)$$

in cui $x_i \in X$, $y_j \in Y$; λ_i e μ_j coefficienti arbitrari in Λ.

DEF. 8. - *Il prodotto $(\times)$ di due mappe $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$ è una mappa*

$$f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$$

definita dalla relazione

$$(f \times g)(x \times y) = f(x) \times g(y) \qquad \text{per } x \in X \text{ e } y \in Y.$$

Naturalmente questa definizione è giustificata dal fatto che un supporto di $f \times g$ è dato dal prodotto (con ovvio significato) di un supporto di f per un supporto di g.

---

[3]) Vedi loc. cit. in [2]).

È inoltre chiaro che, il prodotto $(\times)$ rappresenta un *funtore* covariante in entrambe le variabili, valendo le relazioni:

$$(f'f) \times (g'g) = (f' \times g')(f \times g)$$

quando è $X \xrightarrow{f} X' \xrightarrow{f'} X''$, $\quad Y \xrightarrow{g} Y' \xrightarrow{g'} Y''$.

$$idX \times idY = id(X \times Y)$$

allorchè con idX, ecc. si denoti la mappa identica rispettivamente in X, ecc.

Osserviamo infine che il prodotto $(\times)$ è bilineare, ossia se $f_i : X \to X'$, $g_j : Y \to Y'$ sono mappe e λ_i, $\mu_j \in \Lambda$, si ha

$$(\sum_i \lambda_i f_i) \times (\sum_j \mu_j g_j) = \sum_{ij} \lambda_i \mu_j (f_i \times g_j),$$

Se W è uno spazio (di Hausdorff) ed $f : X \to Y$ una mappa qualsiasi, spesso scriveremo $W \times f$ in luogo di $idW \times f$ oppure $f \times W$ in luogo di $f \times idW$. Ciò equivale a considerare $W \times$ o $\times W$ come funtori in una variabile operanti rispettivamente a sinistra o a destra.

5. - σ-omotopia.

Indichiamo con I l'intervallo unitario $[0,1]$ e se X è uno spazio (di Hausdorff) definiamo per ogni $\tau \in I$ la mappa univalente

$$m_X^\tau : X \to X \times I$$

mediante la assegnazione

$$m_X^\tau(x) = x \times \tau \qquad \text{per } x \in X.$$

Poniamo inoltre

$$m_X = m_X^0 - m_X^1 .$$

Se con $p_X : X \times I \to X$ si indica la proiezione cononica, si ha evidentemente, per ogni $\tau \in I$

$$p_X m_X^\tau = id\, X$$

nonchè

$$p_X m_X = 0.$$

Ugualmente ovvia è la commutatività dei diagrammi

$$\begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "f \times I"] & Y \times I \\ X \arrow[u, "m_X^\tau"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "m_Y^\tau"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times I \arrow[r, "f \times I"] & Y \times I \\ X \arrow[u, "m_X"] \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[u, "m_Y"'] \end{tikzcd}$$

qualunque sia la mappa $f: X \to Y$.

Osserviamo che la nozione di omotopia tra due applicazioni continue f_0, $f_1: X \to Y$ (considerate come mappe univalenti) è espressa dalla commutatività di un diagramma del tipo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "m_X^0"'] \arrow[dr, "f_0"] & \\ X \times I \arrow[r, "h"] & Y \\ X \arrow[u, "m_X^1"] \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd}$$

in cui h è una mappa univalente (omotopia).

È naturale dunque, introdurre una nozione analoga per mappe qualsiasi, tralasciando la condizione di univalenza per la h, come nella seguente

DEF. 9. - *Una mappa $h: X \times I \to Y$ si dirà una σ-omotopia tra f_0 ed f_1 se valgono le relazioni*

$$f_0 = h m_X^0 \tag{2}$$
$$f_1 = h m_X^1 .$$

Quando esiste una σ-omotopia tra f_0 ed f_1, diremo che f_0 è σ-omotopa a f_1: useremo in tal caso la notazione $f_0 \simeq f_1$.

OSSERVAZIONE 4. - È evidente che se due mappe univalenti f_0 ed f_1 sono omotope esse sono anche σ-omotope. Non vale però in generale il reciproco, come si può vedere da qualche esempio. La relazione di σ-omotopia è quindi una relazione più debole dell'omotopia tra mappe univalenti: essa conserva tuttavia alcune proprietà fondamentali dell'omotopia. Vedremo in particolare che la relazione di σ-omotopia è una relazione di congruenza in Map(X, Y).

Premettiamo a tale scopo il seguente

LEMMA 2. - *Una mappa f_0 è σ-omotopa ad una mappa f_1 ($f_0, f_1 : X \to Y$) se e solo se esiste una mappa $h : X \times I \to Y$, tale che*

$$f_0 - f_1 = hm_X . \tag{3}$$

Poichè la (3) si ottiene per differenza dalle (2) la necessità di quest'ultima condizione è manifesta. Supponiamo dunque che esista una $h : X \times I \to Y$ per cui valga la (3). Allora si ha

$$f_0 - hm_X^0 = f_1 - hm_X^1 .$$

Se si pone $r = f_0 - hm_X^0 (= f_1 - hm_X^1)$ si avrà

$$f_0 = r + hm_X^0 = (rp_X + h)m_X^0$$

$$f_1 = r + hm_X^1 = (rp_X + h)m_X^1$$

da cui segue che $rp_X + h$ è una σ-omotopia tra f_0 ed f_1.

TEOREMA 3. - *Le mappe $f \in$ Map(X, Y), σ-omotope alla mappa nulla costituiscono un sottomodulo di* Map(X, Y).

Infatti siano $f_i \in$ Map(X, Y), mappe σ-omotope alla mappa nulla ($i = 1, 2, \ldots, n$). Esistono allora mappe $h_i : X \times I \to Y$ tali che

$$f_i = h_i m_X \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

se $\lambda_i \in \Lambda$ sono arbitrari coefficienti, si ha

$$\sum_i \lambda_i f_i = \sum_i \lambda_i h_i m_X = (\sum_i \lambda_i h_i) m_X$$

da cui $\Sigma \lambda_i f_i \simeq 0$.

Per quanto riguarda la composizione di mappe si hanno i seguenti teoremi:

TEOREMA 4. - *Siano f e g mappe consecutive:*

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

allora la composizione $gf : X \to Z$ è σ-omotopa alla mappa nulla se tale è almeno uno dei fattori.

Infatti se è $f \simeq 0$ allora si può scrivere $f = hm_X$ con $h : X \times I \to Y$ e quindi $gf = (gh)m_X$ ossia $gf \simeq 0$. Se invece è $g \simeq 0$ sarà $g = km_Y$ con $k : Y \times I \to Z$; si avrà allora $gf = km_Y f = k(f \times I)m_X$ come risulta dalla commutatività del diagramma seguente

$$\begin{tikzcd} & X \times I \arrow[rr, "f \times I"] & & Y \times I \arrow[dr, "k"] & \\ X \arrow[ur, "m_X"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \arrow[ur, "m_Y"] \arrow[rr, "g"'] & & Z \end{tikzcd}$$

e dunque anche in tal caso $gf \simeq 0$.

TEOREMA 5. - *Siano $f_0, f_1 : X \to Y$ e $g_0, g_1 : Y \to Z$: allora se è $f_0 \simeq f_1$ e $g_0 \simeq g_1$, si ha pure $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$.*

Si può infatti scrivere

$$g_0 f_0 - g_1 f_1 = g_0(f_0 - f_1) + (g_0 - g_1)f_1$$

e poichè è $f_0 - f_1 \simeq 0$, $g_0 - g_1 \simeq 0$, dai teoremi 3 e 4 segue $g_0 f_0 - g_1 f_1 \simeq 0$ e quindi l'asserto.

6. - Sequenza fondamentale.

DEF. 10. - *Indichiamo con Δ_q $(q = 0, 1, \ldots)$ il simplesso (lineare) q-dimensionale di vertici $v^0, v^1, \ldots, v^q$. Sia $(t_0, t_1, \ldots, t_q) \in \Delta_q$ un punto di coordinate baricentriche t_i $(\sum_i t_i = 1,\ t_i \geq 0,\ i = 0, \ldots, q)$ e definiamo per ogni $q > 0$ le mappe univalenti*

$$d_q^i : \Delta_{q-1} \to \Delta_q, \qquad (i = 0, 1, \ldots, q)$$

ponendo

$$d_q^i(t_0, \ldots, t_{q-1}) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{q-1}).$$

Definiamo quindi la mappa

$$d_q : \Delta_{q-1} \to \Delta_q \qquad (q = 1, 2, \ldots)$$

mediante la combinazione lineare

$$d_q = \sum_{0}^{q}{}_i (-1)^i d_q^i . \tag{4}$$

Avremo così una sequenza

$$\Delta_0 \xrightarrow{d_1} \Delta_1 \rightarrow \ldots \rightarrow \Delta_{q-1} \xrightarrow{d_q} \Delta_q \rightarrow \ldots$$

che chiameremo sequenza fondamentale [4]).

TEOREMA 6. - *La composizione di due mappe consecutive della sequenza fondamentale è nulla.*

DIM. - Si osservi intanto che per $q \geq 1$ sussiste la relazione

$$d_q^i d_{q-1}^j = d_q^j d_{q-1}^{i-1} \qquad \text{per } 0 \leq j < i \leq q \tag{5}$$

la cui verifica è ovvia.
Si ha quindi

$$d_q d_{q-1} = \sum_{0}^{q}{}_i \sum_{0}^{q-1}{}_j (-1)^i (-1)^j d_q^i d_{q-1}^j = \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} d_q^i d_{q-1}^j + \tag{6}$$

$$+ \sum_{0 \leq i \leq j < q} (-1)^{i+j} d_q^i d_{q-1}^j$$

e in virtù della (5)

$$\sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} d_q^i d_{q-1}^j = - \sum_{0 \leq i \leq j < q} (-1)^{i+j} d_q^i d_{q-1}^j$$

per cui le due somme nella (6) si elidono.

7. - Il complesso cononico.

DEF. 11. - *Una mappa ponderata*

$$c : \Delta_q \rightarrow X$$

---

[4]) Spesso sarà opportuno prolungare la sequenza fondamentale ponendo $\Delta_q = \emptyset$ (simplesso vuoto) per $q < 0$ e quindi $d_q = 0$ per $q \leq 0$. In tal caso varie proposizioni del seguito conserveranno la loro validità anche per $q \leq 0$, ovvio essendo il significato dei simboli.

del q-simplesso Δ_q in uno spazio di Hausdorff X si dirà una q-catena in X. Il Λ-modulo delle q-catene in X, che indicheremo con $\mathcal{C}_q(X)$ sarà dunque per definizione se $q \geq 0$

$$\mathcal{C}_q(X) = \mathrm{Map}(\Delta_q, X)$$

e se è $q < 0$ porremo convenzionalmente

$$\mathcal{C}_q(X) = 0.$$

Per ogni $q > 0$, la mappa $d_q : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ induce un Λ-omomorfismo

$$\partial_q^X : \mathcal{C}_q(X) \to \mathcal{C}_{q-1}(X)$$

mediante la

$$\partial_q^X(c) = cd_q, \qquad c \in \mathcal{C}_q(X),\ q > 0. \tag{7}$$

Per $q \leq 0$, porremo

$$\partial_q^X = 0 \tag{8}$$

Dalle (7) e (8) e dal teorema 6, segue

$$\partial_{q-1}^X \partial_q^X = 0$$

quindi $\{\mathcal{C}_q(X), \partial_q^X\}$ è un Λ-complesso che chiameremo *complesso cononico* dello spazio X e lo indicheremo con $\mathcal{C}(X)$.

Una mappa $f : X \to Y$, induce per ogni q un omomorfismo

$$\mathcal{C}_q(f) : \mathcal{C}_q(X) \to \mathcal{C}_q(Y)$$

definito dalle relazioni

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_q(f)c = fc \qquad \text{se} \quad c \in \mathcal{C}_q(X) \quad \text{e} \quad q \geq 0 \\ &\mathcal{C}_q(f) = 0 \qquad \text{se} \quad q < 0. \end{aligned}$$

Dalla proprietà associativa della composizione di mappe segue la commutatività del diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_q(X) \arrow[r, "\mathcal{C}_q(f)"] \arrow[d, "\partial_q^X"'] & \mathcal{C}_q(Y) \arrow[d, "\partial_q^Y"] \\ \mathcal{C}_{q-1}(X) \arrow[r, "\mathcal{C}_{q-1}(f)"'] & \mathcal{C}_{q-1}(Y) \end{tikzcd}$$

Immediate sono le proposizioni seguenti:
siano $f_i : X \to Y$, $\lambda_i \in \Lambda$, $i = 1, \ldots, n$; allora si ha

$$\mathcal{C}_q(\Sigma_i \lambda_i f_i) = \Sigma_i \lambda_i \mathcal{C}_q(f_i);$$

se f e g sono mappe consecutive $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ si ha

$$\mathcal{C}_q(gf) = \mathcal{C}_q(g)\mathcal{C}_q(f);$$

e inoltre la mappa identica in X induce isomorfismo identico in $\mathcal{C}_q(X)$. Se A è un sottospazio di X, la mappa d'inclusione $i : A \to X$ induce un *monomorfismo* $\mathcal{C}_q(i) : \mathcal{C}_q(A) \to \mathcal{C}_q(X)$; il chè permette di considerare $\mathcal{C}(A)$ come sottocomplesso di $\mathcal{C}(X)$ purchè ciò non dia luogo ad equivoci.

8. - Categoria delle coppie.

DEF. 12. - *Una coppia di spazi di Hausdorff* (X, A) *con* $A \subset X$ *chiameremo semplicemente* **coppia**. *Se* (X, A) *e* (Y, B) *sono coppie, una mappa (ponderata) tra tali coppie* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *sarà, per definizione, una coppia di mappe* $f = (f', f'')$ *con* $f' : X \to Y$ *e* $f'' : A \to B$, *tali che il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f'} & Y \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow[f'']{} & B \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono inclusioni, sia commutativo.

Notiamo che in tal caso, la mappa f'' è subordinata da f' tra A e B. In generale affinchè una mappa $f' : X \to Y$ subordini una mappa $f'' : A \to B$ è sufficiente che sia

$$\mathcal{T}_{f'}(A) \subset B$$

essendo $\mathcal{T}_{f'}$ il supporto minimale della mappa f'. La f'' se esiste è univocamente determinata da f', A e B.

Definendo in modo ovvio le combinazioni lineari (con coefficienti in Λ) di mappe tra coppie e la composizione di mappe consecutive si ottiene una categoria additiva che indicheremo con $\mathcal{S}^*_\Lambda$ (o semplicemente $\mathcal{S}^*$ quando Λ può rimanere sottinteso).

Se identifichiamo ogni spazio di Hausdorff X con la coppia $(X, \emptyset)$ ($\emptyset$ è il sottospazio vuoto) e consideriamo le mappe di $\mathfrak{S}$ come mappe di $\mathfrak{S}^*$, potremo ritenere $\mathfrak{S}$ una sottocategoria di $\mathfrak{S}^*$.

Varie nozioni già introdotte nella categoria $\mathfrak{S}$ si potranno estendere a $\mathfrak{S}^*$. In particolare la nozione di σ-omotopia.

Definiamo per ogni coppia (X, A) le mappe

$$m^{\tau}_{X,A},\ m_{X,A} : (X, A) \to (X \times I,\ A \times I), \qquad \tau \in I$$

ponendo

$$m^{\tau}_{X,A} = (m^{\tau}_{X},\ m^{\tau}_{A});$$

$$m_{X,A} = m^{0}_{X,A} - m^{1}_{X,A}.$$

DEF. 13. - *Le mappe f_0 e $f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ si diranno σ-omotope* (in simboli: $f_0 \simeq f_1$) *se esiste una mappa $h : (X \times I,$ $A \times I) \to (Y, B)$ tale che risulti simultaneamente*

$$f_0 = hm^{0}_{X,A}, \qquad f_1 = hm^{1}_{X,A}$$

sussiste allora la ovvia estensione del lemma 5 nonchè quella dei teoremi 3-4-5.

9. - La teoria dell'omologia.

DEF. 14. - *Per una generica coppia (X, A) siano $i : A \to X$ e $j : X \to (X, A)$ mappe d'inclusione; si avrà allora la sequenza esatta di complessi*

$$0 \to \mathfrak{C}(A) \to \mathfrak{C}(X) \to \mathfrak{C}(X)/\mathfrak{C}(A) \to 0$$

che chiameremo sequenza «standard» della coppia (X, A). Indicando con H il funtore omologico nella categoria dei complessi, definiremo il q-esimo modulo d'omologia della coppia (X, A) ponendo

$$\mathcal{H}_q(X, A) = H_q(\mathfrak{C}(X)/\mathfrak{C}(A)).$$

In tal modo ad ogni coppia (X, A) resta associata una sequenza esatta d'omologia

$$\dots \to \mathcal{H}_q(A) \xrightarrow{i_*} \mathcal{H}_q(X) \xrightarrow{j_*} \mathcal{H}_q(X, A) \xrightarrow{\partial} \mathcal{H}_{q-1}(A) \to \dots$$

che chiameremo sequenza d'omologia della coppia (X, A).

Sussistono allora le seguenti proposizioni:

H. 0) Se $f, g: (X, A) \to (Y, B)$ sono mappe e $\lambda, \mu \in \Lambda$, si ha per ogni q

$$(\lambda f + \mu g)_* = \lambda f_* + \mu g_* \quad : \quad \mathcal{H}_q(X, A) \to \mathcal{H}_q(Y, B)$$

H. 1) Se $i:(X, A) \to (X, A)$ è la mappa identica, $i_* : \mathcal{H}_q(X, A) \to \to \mathcal{H}_q(X, A)$ è l'omomorfismo identico.

H. 2) Se $f:(X, A) \to (Y, B)$ e $g:(Y, B) \to (Z, C)$ sono mappe consecutive si ha per ogni q

$$(gf)_* = g_* f_* \quad : \quad \mathcal{H}_q(X, A) \to \mathcal{H}_q(Z, C)$$

H. 3) Se $f = (f', f''):(X, A) \to (Y, B)$ il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_q(X, A) & \xrightarrow{f_*} & \mathcal{H}_q(Y, B) \\ \partial \downarrow & & \downarrow \partial \\ \mathcal{H}_{q-1}(A) & \xrightarrow[f'_*]{} & \mathcal{H}_{q-1}(B) \end{array}$$

è commutativo.

H. 4) La sequenza d'omologia di ogni coppia (X, A) è esatta.

H. 5) Se le mappe $f_0, f_1:(X, A) \to (Y, B)$ sono σ-omotope, esse inducono lo stesso omomorfismo (per ogni q)

$$f_{0*} = f_{1*} : \mathcal{H}_q(X, A) \to \mathcal{H}_q(Y, B)$$

H. 6) Se (X, A) è una coppia e U è un sottoinsieme di A la cui chiusura è contenuta nell'interno di A (chiusura e interno essendo intese relativamente a X), allora la mappa d'inclusione

$$i : (X - U, A - U) \to (X, A)$$

induce isomorfismi

$$i_* : \mathcal{H}_q(X - U, A - U) \approx \mathcal{H}_q(X, A)$$

in ogni dimensione q.

H. 7) Se P_0 è uno spazio costituito da un sol punto, è

$$\mathcal{H}_q(P_0) \approx 0 \qquad \text{se} \quad q \neq 0$$

$$\mathcal{H}_0(P_0) \approx \Lambda.$$

La dimostrazione delle proposizioni H. 0) H. 1) H. 2) H. 3) H. 4) scaturisce dalle seguenti osservazioni:

1ª - Il complesso cononico definisce in $\mathfrak{S}^*$ un funtore $\mathfrak{C}$ covariante, *lineare* cioè distributivo rispetto alla somma di mappe e commutativo col prodotto per un elemento di Λ. Il suo codominio è la categoria dei Λ-complessi algebrici (complessi di Mayer).

2ª - Le proposizioni *corrispondenti* alle H. 0) H. 1) H. 2) H. 3) H. 4) sono verificate nella teoria dell'omologia dei Λ-complessi algebrici.

Ci limiteremo quindi a dimostrare le proposizioni H. 5) H. 6) H. 7) e ciò verrà fatto nei numeri seguenti.

Le proposizioni H. 1) ... H. 7) implicano ovviamente gli assiomi di Eilenberg-Steenrod nella sottocategoria (ammissibile) di $\mathfrak{S}^*$ costituita dalle coppie e mappe univalenti. Notiamo a tal proposito che la proposizione H. 5) (invarianza delle σ-omotopie) è più restrittiva del corrispondente assioma di omotopia in quanto la relazione di omotopia tra le mappe univalenti implica la σ-omotopia ma non viceversa. La H. 6) equivale ad un assioma di excisione più forte di quello richiesto nella teoria assiomatica dell'omologia in quanto non si richiede che l'insieme U sia aperto; un tale tipo di excisione si riscontra anche nella teoria dell'omologia singolare. La H. 7) fissa nell'anello Λ, l'anello dei coefficienti su cui è basata la teoria dell'omologia da noi costruita.

È stata aggiunta la proposizione H. 0), la quale non fa riscontro ad alcuno degli assiomi anzidetti in quanto è formulabile solo in una categoria dotata di una struttura lineare come avviene nel caso attuale per la $\mathfrak{S}^*$.

10. - Invarianza delle σ-omotopie.

DEF. 15. - *Per ogni intero $q \geq 0$ definiamo le mappe univalenti*

$$\begin{aligned} r_q^j &: \Delta_{q+1} \to \Delta_q \\ n_q^j &: \Delta_{q+1} \to I \end{aligned} \qquad j = 0, 1, \dots, q$$

mediante le assegnazioni

$$(9)\qquad \begin{aligned} r_q^j(t_0, \dots, t_{q+1}) &= (t_0, \dots, t_j + t_{j+1}, \dots, t_{q+1}) \\ n_q^j(t_0, \dots, t_{q+1}) &= (t_0 + t_1 + \dots + t_j) \end{aligned}$$

essendo $(t_0, \dots, t_{q+1})$ *un punto variabile in* Δ_{q+1}.

Indichiamo inoltre con

$$\mathrm{diag}_q : \Delta_q \to \Delta_q \times \Delta_q$$

la mappa diagonale e poniamo

$$D_q^j = (r_q^j \times n_q^j)\,\mathrm{diag}_{q+1}, \qquad j = 0, 1, \dots, q$$

nonchè

$$(10)\qquad D_q = \sum_0^q {}_j (-1)^j D_q^j,$$

così che sarà

$$D_q^j,\ D_q : \Delta_{q+1} \to \Delta_q \times I.$$

Noi dimostreremo la seguente fondamentale relazione

$$(11)\qquad D_q d_{q+1} + (d_q \times I) D_{q-1} = m_{\Delta q}$$

valida per ogni $q > 0$, e anche per $q = 0$ qualora si convenga di porre $\Delta_{-1} = \emptyset$, $d_0 = 0$, $D_{-1} = 0$.

DIM. - Osserviamo intanto che dalle (9) si ricavano le seguenti relazioni

$$(12)\qquad \begin{aligned} r_q^j d_{q+1}^i &= d_q^i r_{q-1}^{j-1} && \text{se } 0 \leq i < j \leq q, \\ r_q^j d_{q+1}^i &= d_q^{i-1} r_{q-1}^j && \text{se } 0 \leq j < i - 1 \leq q, \\ r_q^j d_{q+1}^j &= r_q^{j-1} d_{q+1}^j && \text{se } 1 \leq j \leq q; \end{aligned}$$

$$(13)\qquad \begin{aligned} n_q^j d_{q+1}^i &= n_{q-1}^{j-1} && \text{se } 0 \leq i < j \leq q, \\ n_q^j d_{q+1}^i &= n_{q-1}^j && \text{se } 0 \leq j < i - 1 \leq q, \\ n_q^j d_{q+1}^j &= n_{q-1}^{j-1} d_{q+1}^j && \text{se } 1 \leq j \leq q. \end{aligned}$$

Infatti se è ad esempio $0 \leq i < j \leq q$, si ha per un generico punto $(t_0, \ldots, t_q) \in \Delta_q$

$$r_q^j d_{q+1}^i(t_0, \ldots, t_q) = r_q^j(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_q) =$$
$$= (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_j + t_{j+1}, \ldots, t_q)$$
$$d_q^i r_{q-1}^{j-1}(t_0, \ldots, t_q) = d_q^i(t_0, \ldots, t_j + t_{j+1}, \ldots, t_q) =$$
$$= (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_j + t_{j+1}, \ldots, t_q)$$

da cui, per confronto, la prima delle (12). In modo del tutto analogo si ottengono le rimanenti relazioni (12) e (13).

Dalle (12) e (13), tenendo presente la relazione

$$\mathrm{diag}_{q+1} d_{q+1}^i = (d_{q+1}^i \times d_{q+1}^i)\, \mathrm{diag}_q$$

si trae

$$\begin{aligned} &D_q d_{q+1}^i = (d_q^i \times I) D_{q-1}^{j-1} && \text{se } 0 \leq i < j \leq q, \\ (14) \qquad &D_q^j d_{q+1}^i = (d_q^{i-1} \times I) D_{q-1}^j && \text{se } 0 \leq j < i - 1 \leq q, \\ &D_q^j d_{q+1}^j = D_q^{j-1} d_{q+1}^j && \text{se } 1 \leq j \leq q. \end{aligned}$$

Limitiamoci a considerare il caso in cui è $0 \leq i < j \leq q$ gli altri due essendo pressochè analoghi; si ha

$$D_q^j d_{q+1}^i = (r_q^j \times n_q^j)\, \mathrm{diag}_{q+1} d_{q+1}^i = (r_q^j \times n_q^j)(d_{q+1}^i \times d_{q+1}^i)\, \mathrm{diag}_q =$$
$$= (r_q^j d_{q+1}^i \times n_q^j d_{q+1}^i)\, \mathrm{diag}_q = (d_q^i r_{q-1}^{j-1} \times n_{q-1}^{j-1})\, \mathrm{diag}_q =$$
$$= (d_q^i \times I)(r_{q-1}^{j-1} \times n_{q-1}^{j-1})\, \mathrm{diag}_q = (d_q^i \times I) D_{q-1}^{j-1}.$$

Dalle (14), tenendo presenti le (4) e (10) si ha successivamente

$$D_q d_{q+1} = \sum_0^q{}_j \sum_0^{q+1}{}_i (-1)^{j+i} D_q^j d_{q+1}^i = \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{j+i} D_q^j d_{q+1}^i +$$
$$+ \sum_{0 \leq j < i-1 \leq q} (-1)^{j+i} D_q^j d_{q+1}^i + \sum_0^q{}_j D_q^j d_{q+1}^j - \sum_1^{q+1}{}_j D_q^{j-1} d_{q+1}^j =$$
$$= \sum_{0 \leq i < j \leq q} (-1)^{j+i} (d_q^i \times I) D_{q-1}^{j-1} + \sum_{0 \leq j < i-1 \leq q} (-1)^{j+i} (d_q^{i-1} \times I) D_{q-1}^j +$$

$$+ D_q^0 d_{q+1}^0 - D_q^q d_{q+1}^{q+1} = \sum_{0 \leq i \leq j \leq q-1} (-1)^{j+i+1} (d_q^i \times I) D_{q-1}^j +$$

$$+ \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{j+i+1} (d_q^i \times I) D_{q-1}^j + D_q^0 d_{q+1}^0 - D_q^q d_{q+1}^{q+1} =$$

$$= - \sum_{0}^{q}{}_i \sum_{0}^{q-1}{}_j (-1)^{i+j} (d_q^i \times I) D_{q-1}^j + D_q^0 d_{q+1}^0 - D_q^q d_{q+1}^{q+1} =$$

$$= - (d_q \times I) D_{q-1} + D_q^0 d_{q+1}^0 - D_q^q d_{q+1}^{q+1} .$$

Per giungere alla (11) ci basterà dunque far vedere che è

$$D_q^0 d_{q+1}^0 = m_{\Delta_q}^0 ,$$

$$D_q^q d_{q+1}^{q+1} = m_{\Delta_q}^1 .$$

E infatti, se $(t_0, \dots, t_q)$ è un punto generico di Δ_q, abbiamo

$$D_q^0 d_{q+1}^0 (t_0, \dots, t_q) = (r_q^0 \times n_q^0) \operatorname{diag}_{q+1} d_{q+1}^0 (t_0, \dots, t_q) =$$

$$= (r_q^0 \times n_q^0) \operatorname{diag}_{q+1} (0, t_0, \dots, t_q) = (r_q^0 \times n_q^0)(0, t_0, \dots, t_q) \times$$

$$\times (0, t_0, \dots, t_q) = r_q^0 (0, t_0, \dots, t_q) \times n_q^0 (0, t_0, \dots, t_q) =$$

$$= (t_0, \dots, t_q) \times (0) = m_{\Delta_q}^0 (t_0, \dots, t_q) ;$$

$$D_q^q d_{q+1}^{q+1} (t_0, \dots, t_q) = (r_q^q \times n_q^q) \operatorname{diag}_{q+1} d_{q+1}^{q+1} (t_0, \dots, t_q) =$$

$$= (r_q^q \times n_q^q) \operatorname{diag}_{q+1} (t_0, \dots, t_q, 0) = (r_q^q \times n_q^q)(t_0, \dots, t_q, 0) \times$$

$$\times (t_0, \dots, t_q, 0) = r_q^q (t_0, \dots, t_q, 0) \times n_q^q (t_0, \dots, t_q, 0) =$$

$$= (t_0, \dots, t_q) \times (1) = m_{\Delta_q}^1 (t_0, \dots, t_q).$$

Possiamo ora dimostrare la proposizione H. 5).

Siano $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ mappe σ-omotope; per dimostrare che esse inducono lo stesso omomorfismo $f_{0*} = f_{1*} : \mathcal{H}_q(X, A) \to \mathcal{H}_q(Y, B)$, basterà far vedere che la mappa $f = f_0 - f_1$ induce l'omomorfismo nullo. E infatti in tale ipotesi si potrà scrivere

$$f = h m_{X, A}$$

e cioè

$$f' = h' m_X$$
$$f'' = h'' m_A$$

essendo $h = (h', h''): (X \times I,\ A \times I) \to (Y,\ B)$ una mappa conveniente. Osserviamo che un q-ciclo relativo $z \in \mathcal{Z}_q(X,\ A)$ si può sempre rappresentare mediante una mappa $z': \Delta_q \to X$ tale che sussista una relazione del tipo

$$z' d_q = i z''$$

per una conveniente mappa $z'': \Delta_{q-1} \to A$, avendo indicato con $i: A \to X$ la mappa d'inclusione. I q-bordi relativi $\mathcal{B}_q(X,\ A)$ sono allora rappresentati da mappe $z': \Delta_q \to X$ della forma

$$z' = c_{q+1} d_{q+1} + i a_q$$

con $c_{q+1}: \Delta_{q+1} \to X$ e $a_q: \Delta_q \to A$.

Avremo allora, conservando le solite notazioni e indicando con $j: B \to Y$ la mappa d'inclusione,

$$\begin{aligned} f'z' = h' m_X z' = h'(z' \times I) m_{\Delta_q} = h'(z' \times I) D_q d_{q+1} + \\ + h'(z' \times I)(d_q \times I) D_{q-1} = h'(z' \times I) D_q d_{q+1} + h'(z' d_q \times I) D_{q-1} = \\ = h'(z' \times I) D_q d_{q+1} + h'(iz'' \times I) D_{q-1} = h'(z' \times I) D_q d_{q+1} + \\ + h'(i \times I)(z'' \times I) D_{q-1} = h'(z \times I) D_q d_{q+1} + j h''(z'' \times I) D_{q-1}. \end{aligned}$$

La q-catena $f'z'$ rappresenta dunque un q-bordo relativo $\mathcal{B}_q(Y,\ B)$. Possiamo quindi affermare che f muta ogni q-ciclo relativo in un q-bordo relativo e perciò sarà nullo l'omomorfismo

$$f_* : \mathcal{H}_q(X,\ A) \to \mathcal{H}_q(Y,\ B)$$

per ogni q.

11. - Suddivisioni baricentriche.

In questo numero si introdurranno alcune definizioni e si proveranno alcuni lemmi che serviranno, più avanti, a dimostrare la proposizione H. 6) (Assioma di excisione).

DEF. 16. - *Per ogni* $q \geq 0$ *sia*

$$\varkappa_q : \Delta_q \times I \to \Delta_{q+1}$$

la mappa univalente definita dalla

$$\varkappa_q(t_0, \dots, t_q) \times (\tau) = (1 - \tau, \tau t_0, \dots, \tau t_q)$$

dove $(t_0, \dots, t_q) \times (\tau)$ *è un punto generico di* $\Delta_q \times I$. Tale mappa $\varkappa_q$ è sostanzialmente una mappa di identificazione della base inferiore $\Delta_q \times (0)$ del prisma $\Delta_q \times I$, in quanto trasforma tutti i punti di $\Delta_q \times (0)$ in un unico vertice $v^0 = (1, 0, \dots, 0) \in \in \Delta_{q+1}$, subordinando un omeomorfismo tra le rimanenti porzioni $\Delta_q \times I - \Delta_q \times (0)$ e $\Delta_{q+1} - v^0$.

DEF. 17. - *Per ogni mappa* $\varphi : \Delta_p \to \Delta_q$, $p, q \geq 0$ *indichiamo con*

$$\widehat{\varphi} : \Delta_{p+1} \to \Delta_{q+1}$$

la mappa per cui risulta commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Delta_p \times I & \xrightarrow{\varphi \times I} & \Delta_q \times I \\ \varkappa_p \downarrow & & \downarrow \varkappa_q \\ \Delta_{p+1} & \xrightarrow[\widehat{\varphi}]{} & \Delta_{q+1} \end{array} \tag{15}$$

Si osservi che la seconda riga del diagramma è sostanzialmente ottenuta dalla prima mediante la simultanea identificazione delle basi inferiori dei due primi, operata dalle mappe $\varkappa_p$ e $\varkappa_q$. Ciò è lecito in quanto la mappa $\varphi \times I$ subordina una mappa tra queste basi ed essendo Δ_p connesso, risulta costante la somma dei coefficienti (elementi di Λ) dell'immagine $\varphi(x)$ di un punto $x \in \Delta_p$. Tale somma dovrà essere il coefficiente di $\widehat{\varphi}(v^0)$. Ne segue che la $\widehat{\varphi}$ è univocamente determinata dalla φ.

Dalla commutatività del diagramma (15) seguono le relazioni

$$(id\Delta_q)^\frown = id\Delta_{q+1}$$

$$(\psi\varphi)^\frown = \widehat{\psi}\widehat{\varphi} \qquad \text{se } \varphi : \Delta_p \to \Delta_q,\ \psi : \Delta_q \to \Delta_r. \tag{16}$$

$$\Big(\sum_1^n{}_i \lambda_i\varphi_i\Big)^\frown = \sum_1^n{}_i \lambda_i\widehat{\varphi}_i \qquad \text{se } \lambda_i \in \Lambda,\ \varphi_i : \Delta_p \to \Delta_q \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Vale inoltre pure la relazione

$$d_q = d_q^0 - \widehat{d}_{q-1} \tag{17}$$

per $q \geq 2$.

Infatti, un punto generico di Δ_{q-1} può sempre porsi nella forma $(1-\tau,\ \tau t_0,\ \dots,\ \tau t_{q-2})$ con $(t_0,\ \dots,\ t_{q-2}) \in \Delta_{q-2}$ e $\tau \in I$. Allora si ha

$$\begin{aligned}\widehat{d}_{q-1}^{\,i}(1-\tau,\ \tau t_0, \dots,\ \tau t_{q-2}) &= \varkappa_{q-1}(d_{q-1}^i \times I)\{(t_0, \dots,\ t_{q-2}) \times (\tau)\} = \\ &= \varkappa_{q-1}\{(t_0, \dots,\ t_{i-1},\ 0,\ t_i, \dots,\ t_{q-2}) \times (\tau)\} = \\ &= (1-\tau,\ \tau t_0, \dots,\ \tau t_{i-1},\ 0,\ \tau t_i, \dots,\ \tau t_{q-2}) = d_q^{i+1}(1-\tau,\ \tau t_0, \dots,\ \tau t_{q-2})\end{aligned}$$

cioè

$$\widehat{d}_{q-1}^{\,i} = d_q^{i+1} \qquad (i = 0, \dots,\ q-1)$$

da cui segue, per la terza delle (16), la (17).

Qualunque sia la mappa $\varphi : \Delta_p \to \Delta_q$, il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \Delta_p & \xrightarrow{\varphi} & \Delta_q \\ {\scriptstyle d_{p+1}^0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d_{q+1}^0} \\ \Delta_{p+1} & \xrightarrow[\widehat{\varphi}]{} & \Delta_{q+1} \end{array} \tag{18}$$

è commutativo.

Posto infatti, per un generico punto $(t_0,\ \dots,\ t_p) \in \Delta_p$

$$\varphi(t_0, \dots,\ t_p) = \sum_1^n {}_j\, \lambda_j(t_0^{(j)}, \dots,\ t_q^{(j)})$$

con $\lambda_j \in \Lambda$ e $(t_0^{(j)}, \dots,\ t_q^{(j)}) \in \Delta_q$ $(j = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$, si ha

$$\begin{aligned}\varphi\, d_{p+1}^0(t_0, \dots,\ t_p) &= \widehat{\varphi}(0,\ t_0, \dots,\ t_p) = \varkappa_q\ \{\varphi(t_0, \dots,\ t_p) \times (1)\} = \\ &= \varkappa_q\{\sum_1^n {}_j\, \lambda_j(t_0^{(j)}, \dots,\ t_q^{(j)}) \times (1)\} = \sum_1^n {}_j\, \lambda_j(0,\ t_0^{(j)}, \dots,\ t_q^{(j)});\end{aligned}$$

d'altra parte è

$$d_{q+1}^0\varphi(t_0, \dots,\ t_p) = d_{q+1}^0\{\sum_1^n {}_j\, \lambda_j(t_0^{(j)}, \dots,\ t_q^{(j)})\} = \sum_1^n {}_j\, \lambda_j(0,\ t_0^{(j)}, \dots,\ t_q^{(j)})$$

che confrontata colla precedente porge $d_{q+1}^0\varphi = \varphi\, d_{p+1}^0$.

DEF. 18. - *Per ogni $q \geq 0$ definiamo la mappa univalente*

$$\pi_q : \Delta_{q+1} \to \Delta_q$$

ponendo

$$\pi_q(t_0, \dots, t_{q+1}) = \left(t_1 + \frac{t_0}{q+1}, \dots, t_{q+1} + \frac{t_0}{q+1}\right)$$

per un generico punto $(t_0, \dots, t_{q+1}) \in \Delta_{q+1}$.

Si verifica allora facilmente che è

$$\pi_q d^0_{q+1} = id\, \Delta_q \qquad (q \geq 0). \tag{19}$$

DEF. 19. - *Indicheremo con*

$$s_q : \Delta_q \to \Delta_q \qquad (q \geq 0)$$

le mappe definite induttivamente dalle relazioni

$$\begin{aligned} s_0 &= id\, \Delta_0 \\ s_q &= \pi_q \widehat{d}_q \widehat{s}_{q-1} \qquad \text{per } q > 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Le mappe s_q verranno chiamate *mappe di suddivisione baricentrica*: la ragione di tale denominazione apparirà nel seguito.

DEF. 20. - *Definiremo ancora per induzione le mappe*

$$R_q : \Delta_{q+1} \to \Delta_q$$

ponendo

$$\begin{aligned} R_0 &= 0 \\ R_q &= \pi_q - \pi_q \widehat{s}_q - \pi_q \widehat{d}_q \widehat{R}_{q-1} \qquad \text{per } q > 0. \end{aligned}$$

TEOREMA 7. - *Per ogni* $q > 0$ *si ha*

$$s_q d_q = d_q s_{q-1} \tag{21}$$

DIM. - Infatti, per la terza delle (16) e (17) (19) (20) è

$$s_1 d_1 = \pi_1 \widehat{d}_1 \widehat{s}_0 d_1 = \pi_1 \widehat{d}_1 d_1 = \pi_1(d^0_2 - d_2) d_1 = \pi_1 d^0_2 d_1 = d_1 = d_1 s_0$$

ammessa la (21) per un certo $q > 0$ si ha, tenendo presente anche la seconda delle (16) e la commutatività del diagramma (18)

$$\begin{aligned} s_{q+1} d_{q+1} &= \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} \widehat{s}_q d_{q+1} = \pi_{q+1} d_{q+1} \widehat{s}_q (d^0_{q+1} - \widehat{d}_q) = \\ &= \pi_{q+1} (d_{q+1} s_q)^\frown d^0_{q+1} - \pi_{q+1} (d_{q+1} s_q d_q)^\frown = \\ &= \pi_{q+1} d^0_{q+2} (d_{q+1} s_q) - \pi_{q+1} d_{q+1} d_q s_{q-1} = d_{q+1} s_q . \end{aligned}$$

TEOREMA 8. - *Per ogni $q > 0$ si ha*

$$R_q d_{q+1} = id\,\Delta_q - s_q - d_q R_{q-1}. \tag{22}$$

DIM. - Tenendo presente le (16) (17) (19) (20) nonchè la relazione di commutazione (18) si ha:

$$R_1 d_2 = (\pi_1 - \pi_1 \widehat{s}_1 - \pi_1 \widehat{d}_1 \widehat{R}_0)(d_2^0 - \widehat{d}_1) = \pi_1 d_2^0 - \pi_1 \widehat{d}_1 -$$
$$- \pi_1 \widehat{s}_1 d_2^0 + \pi_1 \widehat{s}_1 \widehat{d}_1 = id\,\Delta_1 - \pi_1 \widehat{d}_1 - \pi_1 d_2^0 s_1 + \pi_1 \widehat{d}_1 \widehat{s}_0 =$$
$$= id\,\Delta_1 - s_1 = id\,\Delta_1 - s_1 - d_1 R_0 .$$

Inoltre ammessa la (22) per un certo $q > 0$ si ha successivamente

$$R_{q+1} d_{q+2} = (\pi_{q+1} - \pi_{q+1} \widehat{s}_{q+1} - \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} \widehat{R}_q)(d_{q+2}^0 - \widehat{d}_{q+1}) =$$
$$= \pi_{q+1} d_{q+2}^0 - \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} - \pi_{q+1} \widehat{s}_{q+1} d_{q+2}^0 + \pi_{q+1} \widehat{s}_{q+1} \widehat{d}_{q+1} -$$
$$- \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} \widehat{R}_q d_{q+2}^0 + \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} \widehat{R}_q \widehat{d}_{q+1} = id\,\Delta_{q+1} - \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} -$$
$$- \pi_{q+1} d_{q+2}^0 s_{q+1} + \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} \widehat{s}_q - \pi_{q+1} d_{q+2}^0 d_{q+1} R_q +$$
$$+ \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} (R_q d_{q+1})^\frown = id\,\Delta_{q+1} - \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} - s_{q+1} + s_{q+1} -$$
$$- d_{q+1} R_q + \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} (id\,\Delta_q - s_q - d_q R_{q-1})^\frown = id\,\Delta_{q+1} -$$
$$- \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} - d_{q+1} R_q + \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} - \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} \widehat{s}_q -$$
$$- \pi_{q+1} (d_{q+1} d_q R_{q-1})^\frown = id\,\Delta_{q+1} - \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} \widehat{s}_q - d_{q+1} R_q =$$
$$= id\,\Delta_{q+1} - s_{q+1} - d_{q+1} R_q ,$$

il che prova la (22) per ogni $q > 0$.

Definiamo la potenza s_q^n di s_q ponendo $s_q = id\Delta_q$ e $s_q^n = s_q \cdot s_q^{n-1}$ per $n > 0$. Allora moltiplicando ambo i membri della (22) per s_q^i a destra e sommando rispetto a i, tenendo presente la (21) si ottiene la relazione

$$\Big(\sum_{0}^{n-1}{}_i\, R_q s_{q+1}^i\Big) d_{q+1} = id\,\Delta_q - s_q^n - d_q\Big(\sum_{0}^{n-1}{}_i\, R_{q-1} s_q^i\Big), \tag{23}$$

valida per ogni $q > 0$.

DEF. 21. - *Sia* $(i_0, \dots, i_q)$ *una generica* $(q+1)$*-upla di interi soddisfacenti alle limitazioni* $0 \leq i_r \leq r$ *per* $r = 0, 1, \dots, q$; *indichiamo con* M_q *l'insieme di tali* $(q+1)$*-uple e definiamo per ciascuna di esse e per ogni* $q \geq 0$ *la mappa univalente*

$$S^{(i_0 \dots i_q)} : \Delta_q \to \Delta_q$$

mediante le relazioni ricorrenti

$$\begin{aligned} S^{(0)} &= id\,\Delta_0 \\ S^{(i_0, \dots, i_q)} &= \pi_q \widehat{d_q^{i_q}} S^{(i_0, \dots, i_{q-1})} . \end{aligned} \tag{24}$$

Allora la mappa di suddivisione baricentrica s_q si decompone nella somma seguente:

$$s_q = \sum_{(i_0, \dots, i_q) \in M_q} (-1)^{i_0 + \dots + i_q} S^{(i_0, \dots, i_q)} . \tag{25}$$

Infatti la (25) è ovvia per $q = 0$. Ammessa la sua validità per un certo $q \geq 0$, si ottiene

$$s_{q+1} = \pi_{q+1} \widehat{d}_{q+1} \widehat{s}_q = \pi_{q+1} \sum_0^{q+1}{}_i (-1)^i \widehat{d_q^i} \cdot \sum_{(i_0 \dots i_q) \in M_q} (-1)^{i_0 + \dots + i_q} S^{(i_0, \dots, i_q)} =$$

$$= \sum_{(i_0, \dots, i_q, i) \in M_{q+1}} (-1)^{i_0 + \dots + i_q + i} \pi_{q+1} \widehat{d_{q+1}^i} S^{(i_0, \dots, i_q)} =$$

$$= \sum_{(i_0, \dots, i_{q+1}) \in M_{q+1}} (-1)^{i_0 + \dots + i_{q+1}} S^{(i_0, \dots, i_{q+1})} .$$

Osservando che π_q e d_q^i sono mappe univalenti *lineari* [5]) e che l'operazione $(\ )^\frown$ trasforma mappe univalenti lineari in mappe univalenti lineari, dalla definizione ricorrente (24) segue che tali dovranno essere tutte le $S^{(i_0, \dots, i_q)}$. Inoltre la mappa $S^{(i_0, \dots, i_q)}$ trasforma i vertici di Δ_q nei vertici di un q-simplesso appartenente alla prima suddivisione baricentrica di Δ_q. Ciò si riconosce pure con procedimento induttivo, partendo dalle (24), e giustifica la denominazione di *mappa di suddivisione baricentrica* attribuita alla s_q. In base alle precedenti considerazioni e in virtù di note proprietà delle suddivisioni baricentriche [6]) potremo enunciare il seguente

---

[5]) Lineari nel senso che trasformano linearmente le coordinate baricentriche dei punti di Δ_q.

[6]) Cfr. S. EILENBERG and V. STEENROD, *Foundations of algebraic Topology* (Princeton University Press) (1952), pp. 61-64.

TEOREMA 9. - *Fissato ad arbitrio un numero positivo* ε, *se* n *è un intero sufficientemente grande la mappa* s_q^n *si può decomporre in una somma*

$$(26) \qquad s_q^n = \sum_1^N{}_j \, \sigma_j \quad , \quad N = \{(q+1)!\}^n$$

in cui le mappe $\sigma_j : \Delta_q \to \Delta_q$ *sono tali che gli insiemi* $\mathcal{C}_{\sigma_j}(\Delta_q)$ *abbiano diametro inferiore a* ε.

Infine dimostriamo l'ulteriore

TEOREMA 10. - *Se* $F = \{F_\alpha\}$ *è un ricoprimento dello spazio* X *tale che ogni punto di* X *sia interno ad almeno un* F_α *e se* $\varphi : \Delta_q \to X$ *è una mappa arbitraria, si può trovare un intero* n *e un sistema finito di mappe* $\varphi_\beta : \Delta_q \to X$ *tali che*

$$(27) \qquad \varphi s_q^n = \sum_\beta \varphi_\beta$$

e che ogni insieme $\mathcal{C}_{\varphi_\beta}(\Delta_q)$ *sia contenuto in almeno un insieme* $F_\alpha \in F$.

DIM. - Sia $t \in \Delta_q$ un punto arbitrario. Posto $\mathcal{C}_\varphi(t) = x_1 \cup \ldots \cup x_k$ essendo x_i punti distinti di X, esistono insiemi $F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_k}$ in $\{F_\alpha\}$ tali che $x_i \in \operatorname{int} F_{\alpha_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$. Scegliamo gli intorni $u_1, u_2, \ldots, u_k$ dei rispettivi punti $x_1, \ldots, x_k$ in modo che siano *disgiunti* (X è di Hausdorff!) e tali che $u_i \subset F_{\alpha_i}$. Allora esiste un intorno aperto W_t di t, tale che

$$\mathcal{C}_\varphi(W_t) \subset u_1 \cup \ldots \cup u_k .$$

Osserviamo che se $\sigma : \Delta_q \to \Delta_q$ è una mappa tale che $\mathcal{C}_\sigma(\Delta_q) \subset W_t$, $\varphi\sigma$ sarà decomponibile in una somma

$$(28) \qquad \varphi\sigma = \sum_1^k{}_i \, \varphi_i$$

di mappe $\varphi_i : \Delta_q \to X$, tali che $\mathcal{C}_{\varphi_i}(\Delta_q) \subset u_i \subset F_{\alpha_i}$ per $i = 1, \ldots, k$. Al variare di t in Δ_q, gli intorni W_t descrivono un ricoprimento aperto di Δ_q, dal quale si può estrarre un ricoprimento finito. Diciamo ε il numero di Lebesgue di tale ricoprimento e sia n un intero abbastanza grande affinchè valga la (27). In tal modo gli insiemi $\mathcal{C}_{\sigma_j}(\Delta_q)$ saranno contenuti in convenienti intorni W_t e per l'osservazione fatta più sopra potremo scrivere le relazioni analoghe alla (28)

$$\varphi\sigma_j = \sum_{1}^{k_j}{}_i \varphi_{ji}, \qquad (j = 1, \ldots, N)$$

con $\mathcal{C}_{\varphi_{ji}}(\Delta_q)$ insiemi contenuti in convenienti F_α. Sommando rispetto a j e ricordando la (26) si ottiene

$$\varphi s_q^n = \sum_{1}^{N}{}_j \sum_{1}^{k_j}{}_i \varphi_{ji}$$

che è, in sostanza, la (27).

12. - Un teorema di copertura.

Sia $F = \{F_\alpha\}$ una famiglia di sottoinsiemi di uno spazio X. Una q-catena $c \in \mathcal{C}_q(X)$ diremo appartenente a F se è possibile decomporla in una somma (finita) di q-catene

$$c = \Sigma_i c_i$$

tali che ciascun insieme $\mathcal{C}_{c_i}(\Delta_q)$ sia contenuto in almeno un F_α. Ovviamente, se c appartiene a F anche la catena derivata cd_q appartiene a F. Se indichiamo con $\mathcal{C}(X)$ il complesso cononico dello spazio X, l'insieme delle catene appartenenti a F costituisce un sottocomplesso di $\mathcal{C}(X)$ che si indicherà con $\mathcal{C}(X, F)$. Se A è un qualunque sottoinsieme di X, considerando per comodità $\mathcal{C}(A)$ come sottocomplesso di $\mathcal{C}(X)$ determinato dall'inclusione $A \to X$, definiremo $\mathcal{C}(A, F)$ mediante la

$$\mathcal{C}(A, F) = \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(X, F).$$

Le inclusioni $\mathcal{C}(X, F) \subset \mathcal{C}(X)$, $\mathcal{C}(A, F) \subset \mathcal{C}(A)$ definiscono un omomorfismo

$$\eta : \mathcal{C}(X, F)/\mathcal{C}(A, F) \to \mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(A)$$

che, per un teorema d'isomorfismo di Noether, ha nucleo nullo.

TEOREMA 11. - *Se $F = \{F_\alpha\}$ è una famiglia di sottoinsiemi dello spazio X tale che ogni punto di X sia interno a qualche F, allora, l'omomorfismo*

$$\eta_* : H_q(\mathcal{C}(X, F)/\mathcal{C}(A, F)) \to H_q(\mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(A))$$

è un isomorfismo per ogni q.

DIM. - Poichè la traslazione (χ, ξ, η) (χ e ξ sono inclusioni) tra le sequenze « standard » di complessi

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{C}(A, F) & \to & \mathcal{C}(X, F) & \to & \mathcal{C}(X, F)/\mathcal{C}(A, F) & \to & 0 \\ & & \downarrow \chi & & \downarrow \xi & & \downarrow \eta & & \\ 0 & \to & \mathcal{C}(A) & \to & \mathcal{C}(X) & \to & \mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(A) & \to & 0 \end{array}$$

induce una traslazione tra le corrispondenti sequenze (esatte) d'omologia

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \to & H_q(\mathcal{C}(A, F)) & \to & H_q(\mathcal{C}(X, F)) & \to & H_q(\mathcal{C}(X, F)/\mathcal{C}(A, F)) & \to \\ & \downarrow \chi_* & & \downarrow \xi_* & & \downarrow \eta_* & \\ \ldots \to & H_q(\mathcal{C}(A)) & \to & H_q(\mathcal{C}(X)) & \to & H_q(\mathcal{C}X)/\mathcal{C}(A)) & \to \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \to H_{q-1}(\mathcal{C}(X, F)) & \to & H_{q-1}(\mathcal{C}(X, F)) & \to \ldots \\ \downarrow \chi_* & & \downarrow \xi_* & \\ \to H_{q-1}(\mathcal{C}(A)) & \to & H_{q-1}(\mathcal{C}(X)) & \to \ldots \end{array}$$

basterà dimostrare che χ_* e ξ_* sono isomorfismi (per ogni q) perchè tale sia anche η_*, in virtù di un noto lemma [7]). Per l'esattezza delle sequenze d'omologia

$$\ldots \to H_q(\mathcal{C}(A, F)) \xrightarrow{\chi_*} H_q(\mathcal{C}(A)) \to H_q(\mathcal{C}(A)/\mathcal{C}(A, F)) \to \ldots$$

$$\ldots \to H_q(\mathcal{C}(X, F)) \xrightarrow{\xi_*} H_q(\mathcal{C}(X)) \to H_q(\mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(X, F)) \to \ldots$$

ciò equivarrà a dimostrare che per ogni q è

(29) $$H_q(\mathcal{C}(A)/\mathcal{C}(A, F)) = 0 \quad , \quad H_q(\mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(X, F)) = 0.$$

E infatti un q-ciclo di $\mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(X, F)$ è rappresentato da una q-catena $c \in \mathcal{C}_q(X)$ tale che $cd_q \equiv 0 \bmod \mathcal{C}(X, F)$. Per il teorema 10 si potrà trovare un intero n abbastanza grande in modo che la q-catena cs_q^n appartenga a F ossia $cs_q^n \equiv \equiv 0 \bmod \mathcal{C}(X, F)$. La relazione (23) porge in tal caso

$$c \equiv (\sum_{0}^{n-1}{}_i\, cs_q^i R_q) d_{q+1} \qquad \bmod \mathcal{C}(X, F)$$

---

7) Cfr. loc. cit. 6), Lemma 4.3, pag. 16.

vale a dire, c rappresenta un bordo in $\mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(X, F)$. Ciò prova la seconda delle (29) e quindi, sostanzialmente, anche la prima.

13. - Il teorema di excisione.

Siamo ora in grado di dimostrare la proposizione H. 6):

TEOREMA 12. - *La mappa d'inclusione*

$$i : (X - U,\ A - U) \to (X,\ A)$$

con $\overline{U} \subset \operatorname{int} A$, *induce isomorfismi*

$$i_* : H_q(\mathcal{C}(X - U)/\mathcal{C}(A - U)) \approx H_q(\mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(A))$$

in tutte le dimensioni q

DIM. - Si consideri la famiglia F consistente di due insiemi A e $X - U$. La condizione $\overline{U} \subset \operatorname{int} A$ implica $\operatorname{int}(X - U) \cup \operatorname{int} A = X$. Quindi si può applicare il teorema 11. Osservando che

$$\mathcal{C}(A - U) = \mathcal{C}(X - U) \cap \mathcal{C}(A)$$

$$\mathcal{C}(X,\ F) = \mathcal{C}(X - U) \cup \mathcal{C}(A),\quad \mathcal{C}(A,\ F) = \mathcal{C}(A)$$

ne segue che l'omomorfismo $\mathcal{C}(i) : \mathcal{C}(X - U)/\mathcal{C}(A - U) \to \mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(A)$ può essere fattorizzato in

$$\mathcal{C}(X - U)/\mathcal{C}(A - U) \xrightarrow{\iota} \mathcal{C}(X,\ F)/\mathcal{C}(A,\ F) \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}(X)/\mathcal{C}(A).$$

L'omomorfismo ι coincide con l'omomorfismo cononico

$$\iota : \mathcal{C}(X - U)/\mathcal{C}(X - U) \cap \mathcal{C}(A) \to \mathcal{C}(X - U) \cup \mathcal{C}(A)/\mathcal{C}(A)$$

che, per un teorema d'isomorfismo di Noether è un isomorfismo. Per il teorema 11, η induce isomorfismi per ogni q e quindi anche i_* sarà un isomorfismo, qualunque sia q.

14. - Spazi puntiformi.

Dimostriamo la proposizione H. 7) ovvero il

TEOREMA 13. - *Se P_0 è uno spazio costituito da un sol punto, è*

$$(30)\qquad \begin{aligned} &\mathcal{H}_q(P_0) \approx 0 \qquad && \text{per } q \neq 0 \\ &\mathcal{H}_0(P_0) \approx \Lambda. && \end{aligned}$$

DIM. - Indichiamo, per ogni $q \geq 0$ con

$$\varepsilon_q : \Delta_q \to P_0$$

la mappa univalente. Ogni q-catena $\mathcal{C}_q(P_0)$ sarà quindi della forma

$$c = \lambda \varepsilon_q$$

con $\lambda \in \Lambda$. Ciò è immediata conseguenza della definizione di mappa ponderata e del fatto che Δ_q è uno spazio connesso. La $(q-1)$-catena derivata sarà allora

$$\partial_q(c) = cd_q = \lambda \varepsilon_q \sum_0^q{}_i (-1)^i d_q^i = \sum_0^q{}_i (-1)^i \cdot \lambda \cdot \varepsilon_{q-1} = \nu_q \lambda \varepsilon_{q-1}$$

dove è

$$\begin{aligned} \nu_q &= 0 \qquad && \text{se } q \text{ è dispari} \\ \nu_q &= 1 && \text{se } q \text{ è pari (non nullo).} \end{aligned}$$

La sequenza

$$\mathcal{C}_0(P_0) \xleftarrow{\partial_1} \mathcal{C}_1(P_0) \xleftarrow{\partial_2} \dots \xleftarrow{\partial_{q-1}} \mathcal{C}_{q-1}(P_0) \xleftarrow{\partial_q} \mathcal{C}_q(P_0) \xleftarrow{\partial_{q+1}} \dots$$

è dunque esatta essendo costituita alternativamente da isomorfismi e omomorfismi nulli. Ne segue la prima delle (30) per $q > 0$ (e ovviamente per $q < 0$). Essendo inoltre $\partial_1 = 0$, $\partial_0 = 0$ si ha

$$\mathcal{Z}_0(P_0) = \mathcal{C}_0(P_0), \quad \mathcal{B}_0(P_0) = 0$$

da cui

$$\mathcal{H}_0(P_0) \approx \mathcal{C}_0(P_0) \approx \Lambda.$$

15. - Relazione con l'omologia singolare.

Nella sottocategoria di $\mathcal{S}^*$ costituita dalle coppie di spazi di Hausdorff e dalle mappe univalenti, che come si è già osservato si possono identificare con le ordinarie applicazioni continue, indichiamo con

$$\{ H_q(X, A; \Lambda), \star, \bar{\partial}_q \}$$

la teoria dell'omologia singolare con coefficienti in Λ. Se

$$T : \Delta_q \to X$$

è un q-simplesso singolare, esso, in quanto mappa univalente, è altresì una particolare q-catena $\mathcal{C}_q(X)$. L'insieme dei q-simplessi singolari di X costituisce una base per il modulo libero delle q-catene singolari intere che indicheremo con $C_q(X)$. Esiste allora un unico omomorfismo (per ogni q)

$$\beta_q(X) : \Lambda \otimes C_q(X) \to \mathcal{C}_q(X)$$

tale che trasformi l'elemento $\lambda \otimes T \in \Lambda \otimes C_q(X)$ nella q-catena $\lambda T \in \mathcal{C}_q(X)$. Tale omomorfismo soddisfa alla condizione di commutazione

$$\beta_{q-1}\bar{\partial}_q = \partial_q \beta_q \tag{31}$$

in quanto è per ogni $\lambda \in \Lambda$ e per ogni q-simplesso singolare T

$$\beta_{q-1}\bar{\partial}_q(\lambda \otimes T) = \beta_{q-1} \sum_0^q{}_i (-1)^i \lambda \otimes (Td_q^i) = \sum_0^q{}_i (-1)^i \lambda T d_q^i =$$
$$= \lambda T d_q = \partial_q(\lambda T) = \partial_q \beta_q(\lambda \otimes T).$$

Ne segue che $\beta_q(X)$ induce omomorfismi

$$\tilde{\beta}_q(X) : H_q(X; \Lambda) \to \mathcal{H}_q(X)$$

per ogni q.

Se (X, A) è una coppia, resta determinato (per ogni q) un unico omomorfismo $\beta_q(X, A) : \Lambda \otimes \{ C_q(X)/C_q(A) \} \to \mathcal{C}_q(X)/\mathcal{C}_q(A)$ in modo che il diagramma a righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \Lambda \otimes C_q(A) & \to & \Lambda \otimes C_q(X) & \to & \Lambda \otimes \{C_q(X)/C_q(A)\} & \to 0 \\
& \downarrow \beta_q(A) & & \downarrow \beta_q(X) & & \downarrow \beta_q(X, A) & \\
0 \to & \mathcal{C}_q(A) & \to & \mathcal{C}_q(X) & \to & \mathcal{C}_q(X)/\mathcal{C}_q(A) & \to 0
\end{array}$$

risulti commutativo. Anche $\beta_q(X, A)$, al pari di $\beta_q(X)$, soddisfa alla condizione di commutazione (31) e perciò induce omomorfismi

$$\tilde{\beta}_q(X, A) : H_q(X, A; \Lambda) \rightarrow \mathcal{H}_q(X, A)$$

tra i corrispondenti moduli d'omologia.

Per ogni coppia (X, A) è commutativo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A; \Lambda) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_q(X, A)} & \mathcal{H}_q(X, A) \\ \bar{\partial}\downarrow & & \downarrow\partial \\ H_{q-1}(A; \Lambda) & \xrightarrow[\tilde{\beta}_{q-1}(A)]{} & \mathcal{H}_{q-1}(A) \end{array}$$

come risulta da fatti noti nella teoria dei complessi di Mayer [8]). Da semplici considerazioni segue altresì la commutatività del diagramma

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A; \Lambda) & \xrightarrow{\tilde{\beta}_q(X, A)} & \mathcal{H}_q(X, A) \\ f_*\downarrow & & \downarrow f_* \\ H_q(Y, B; \Lambda) & \xrightarrow[\tilde{\beta}_q(Y, B)]{} & \mathcal{H}_q(Y, B) \end{array}$$

per ogni mappa *univalente* $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$.

Dunque $\tilde{\beta}$ rappresenta un naturale omomorfismo tra le due teorie dell'omologia, nella categoria delle coppie di spazi di Hausdorff e delle mappe univalenti. Inoltre, poichè

$$\tilde{\beta}_0(P) : H_0(P_0; \Lambda) \rightarrow \mathcal{H}_0(P_0)$$

si riduce a un isomorfismo se P_0 è uno spazio puntiforme, tale sarà pure $\tilde{\beta}_q(X, A)$ per ogni coppia triangolabile (X, A) e per ogni q, a norma del teorema di unicità di Eilenberg-Steenrod [9]).

---

[8]) Cfr. loc. cit. in [6]), pag. 127, Theorem 3.6.

[9]) Cfr. loc. cit. in [6]), pag. 100, Theorem 10.1.