

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

**Sul problema di Cauchy per una equazione lineare
alle derivate parziali del primo ordine**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 28 (1958), p. 153-187

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__153_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUL PROBLEMA DI CAUCHY PER UNA EQUAZIONE LINEARE ALLE DERIVATE PARZIALI DEL PRIMO ORDINE

Memoria () di MARIO VOLPATO (a Ferrara)*

In una precedente Memoria ¹⁾ ho stabilito alcuni teoremi sulla derivazione, rispetto ai dati iniziali e ad un parametro, delle soluzioni assolutamente continue di un sistema di equazioni differenziali ordinarie che, nell'ambito della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue sono da ritenersi presso che definitivi.

Alla luce dei risultati di quella Memoria, che per semplicità d'ora in avanti verrà ricordata con \mathfrak{M}_1 , studio in questa il problema di Cauchy per l'equazione differenziale lineare alle derivate parziali

$$(I) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_1^n f_r(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) \frac{\partial z}{\partial y_r} = f_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda),$$

nella quale x, y_1, \dots, y_n sono variabili indipendenti, λ è un parametro, ξ è l'ascissa che individua il piano portante i dati iniziali e z è l'incognita.

Per il problema di Cauchy relativo all'equazione (I) distinguo tre classi di soluzioni:

appartengono alla CLASSE A

le funzioni $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ che risultano lipschitziane rispetto ad y_1, \dots, y_n, λ , continue in S'_ : $a \leq x, \xi \leq b$,*

(*) Pervenuta in Redazione il 14 giugno 1958.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Ferrara.

¹⁾ M. VOLPATO, *Sulla derivabilità rispetto a valori iniziali ed a parametri, delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie del primo ordine*, questa rivista, questo volume, pp. 71-106.

— $\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty$, assolutamente continue rispetto ad x e rispetto a ξ , le derivate parziali z'_x e z'_ξ riuscendo sommabili in S'_* ; che soddisfanno l'equazione (I) in quasi tutti i punti di S'_* e che si identificano col dato iniziale per $x = \xi$;

appartengono alla CLASSE B

le funzioni della classe A che posseggono le derivate parziali $z'_{y_1}, \dots, z'_{y_n}$ continue in S'_* , che soddisfanno l'equazione (I) in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* coi piani $x = \text{cost.}$ e che su quasi tutte queste sezioni hanno la derivata parziale z'_x continua;

appartengono alla CLASSE C

le funzioni della classe B per le quali le derivate parziali $z'_{y_1}, \dots, z'_{y_n}$ risultano assolutamente continue, separatamente, rispetto ad x e ξ e lipschitziane rispetto ad y_1, \dots, y_n, λ , le derivate parziali seconde $z''_{y_j, x}$ e $z''_{y_j, \xi}$, al pari di z''_{y_j, y_ν} e $z''_{y_j, \lambda}$, ($j, \nu = 1, \dots, n$), riuscendo sommabili in S'_* ,

e le ipotesi in cui dimostrerò i corrispondenti teoremi di esistenza ed unicità sono notevolmente generali.

Se i coefficienti ed il termine noto della (I) non dipendono da ξ , cioè se la (I) si riduce alla

$$(II) \quad \frac{\partial z}{\partial x} + \sum_1^n f_r(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) \frac{\partial z}{\partial y_r} = f_{n+1}(y, x_1, \dots, y_n, \lambda),$$

la struttura dell'insieme in cui essa è soddisfatta si può precisare anche quando ci si riferisca ad una soluzione della classe A, nel senso che essa è soddisfatta (almeno) in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* con le parallele all'asse ξ .

Tanto per dare un'idea circa le ipotesi di lavoro, questo risultato relativo alla (II) è stabilito imponendo ai coefficienti e al termine noto dell'equazione soltanto la seguente

IPOTESI H:

le funzioni $f_i(x, u_1, \dots, u_n, \lambda)$, ($i = 1, \dots, n + 1$), definite nello strato

$$S: a \leq x \leq b \quad ; \quad -\infty < u_1, \dots, u_n, \lambda < +\infty,$$

sono sommabili rispetto ad x sulle sezioni di S con le parallele all'asse x , mentre su quasi tutte le sezioni di S coi piani $x = \text{cost.}$ soddisfanno le

$$(1) \quad |f_i(x, u_1, \dots, u_n, \lambda) - f_i(x, U_1, \dots, U_n, \Lambda)| \leq \\ \leq P_i(x) \left\{ \sum_1^n |u_r - U_r| + |\lambda - \Lambda| \right\}, \quad (i = 1, \dots, n + 1),$$

qualunque siano le $(n + 1)$ -uple $(u_1, \dots, u_n, \lambda)$, $(U_1, \dots, U_n, \Lambda)$. $P_i(x)$, $(i = 1, \dots, n + 1)$, essendo funzioni non negative sommabili in $I_x = a \leq x \leq b$ ²⁾.

Faccio rilevare che questa ipotesi implica per le f_r , $(r = 1, \dots, n + 1)$, una maggiorazione del tipo

$$(2) \quad |f_r(x, u_1, \dots, u_n, \lambda)| \leq \\ \leq P_r(x) \left\{ \sum_1^n |u_r - u_r^*| + |\lambda - \lambda^*| \right\} + |f_r(x, u_1^*, \dots, u_n^*, \lambda^*)|,$$

$(u_1^*, \dots, u_n^*, \lambda^*)$ essendo una $(n + 1)$ -upla fissata comunque.

Se le funzioni f_r , $(r = 1, \dots, n + 1)$, non dipendessero dal parametro λ e fossero minori, in modulo, di una funzione sommabile della sola x , se inoltre il piano portante i dati iniziali fosse il piano fisso $x = a$, il teorema di esistenza ed unicit  relative alla (II) rientrerebbe in alcuni risultati, gentilmente comunicatimi dall'Autrice, contenuti in una Memoria, in corso di stampa, di M. CINQUINI CIBRARIO ³⁾.

1. - Per comodit  ci occupiamo dapprima dell'equazione (II). Pertanto nei n.ⁱ da 1 a 8 le funzioni f_r , $(r = 1, \dots, n + 1)$, non dipendono dalla variabile ξ e soddisfano solo l'ipotesi H .

2) Come in \mathfrak{N}_1 , tutte le considerazioni di questa Memoria si svolgono nell'ambito della teoria delle funzioni reali di variabili reali: la misura e la integrazione vanno sempre intese nel senso di LEBESGUE.

Faccio rilevare che in virt  delle (1) le funzioni f_r , $(r = 1 \dots, n + 1)$, risultano sommabili su tutte le sezioni di S con le parallele all'asse x , non appena esse siano sommabili su una e misurabili sulle altre.

3) Per altri risultati sull'argomento e per la bibliografia si veggano i lavori di M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI citati in \mathfrak{N}_1 nella nota ⁵⁾ a pi  di p. 74.

Ciò premesso, introduciamo in questo numero alcune notazioni, mantenendo il significato dei simboli finora considerati.

Siano

$$u_1^*, \dots, u_n^*, \dots, \lambda^*$$

delle costanti qualsiasi, fissate una volta per tutte, e $\gamma(\xi)$, $\delta(\xi)$ siano le funzioni definite, nell'intervallo $I_\xi = a \leq \xi \leq b$, dalle

$$(3) \quad \gamma(\xi) = \sum_1^{n+1} P_i(\xi),$$

$$(4) \quad \delta(\xi) = \sum_1^{n+1} P_i(\xi) \left\{ \sum_1^n |u_r - u_r^*| + |\lambda - \lambda^*| \right\} + \\ + \sum_1^{n+1} |f_i(\xi, u_1^*, \dots, u_n^*, \lambda^*)|,$$

$(u_1, \dots, u_n, \lambda)$ essendo una $(n+1)$ -upla qualsiasi di numeri reali che in $\delta(\xi)$ intervengono come parametri.

Per ogni punto (ξ, x) del quadrato $a \leq \xi, x \leq b$, poniamo ora

$$(5) \quad \Gamma(\xi, x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{\xi}} \int_{\xi}^x \gamma(t) dt & , \text{ per } a \leq \xi \leq x, \\ e^{\frac{x}{x}} \int_x^{\xi} \gamma(t) dt & , \text{ per } x \leq \xi \leq b, \end{cases}$$

$$(6) \quad N(\xi, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) =$$

$$= \begin{cases} e^{\frac{x}{\xi}} \int_{\xi}^x \gamma(t) dt \int_{\xi}^x \delta(t) e^{-\frac{t}{t}} dt, & \text{ per } a \leq \xi \leq x, \\ e^{\frac{x}{x}} \int_x^{\xi} \gamma(t) dt \int_x^{\xi} \delta(t) e^{-\frac{t}{x}} dt, & \text{ per } x \leq \xi \leq b, \end{cases}$$

$$(7) \quad M(\xi, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) =$$

$$= \begin{cases} \gamma(\xi)e^{\int_{\xi}^x \gamma(t)dt} \int_{\xi}^x \delta(t)e^{-\int_t^x \gamma(\tau)d\tau} dt + \delta(\xi), & \text{per } a \leq \xi \leq x, \\ \gamma(\xi)e^{\int_x^{\xi} \gamma(t)dt} \int_x^{\xi} \delta(t)e^{-\int_x^t \gamma(\tau)d\tau} dt + \delta(\xi), & \text{per } x \leq \xi \leq b; \end{cases}$$

e osserviamo che queste posizioni implicano i seguenti fatti:
 la funzione $\Gamma(\xi, x)$ è continua nel quadrato $a \leq \xi, x \leq b$, e soddisfa le

$$(8) \quad 1 \leq \Gamma(\xi, x) = e^{\int_{\xi}^x |\gamma(t)dt|} \leq e^{\int_a^b \gamma(t)dt},$$

$$(9) \quad \left| \int_{\xi}^x \gamma(t)\Gamma(t, x)dt \right| = \Gamma(\xi, x) - 1;$$

per ogni fissata $(n + 1)$ -upla $(u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*)$, la funzione $N(\xi, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*)$ è continua nel quadrato $a \leq \xi, x \leq b$ e soddisfa le

$$(10) \quad 0 \leq N(\xi, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) \leq e^{\int_a^b \gamma(t)dt} \int_a^b \delta(t)dt;$$

per ogni fissata $(n + 1)$ -upla $(u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*)$, la funzione $M(\xi, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*)$, definita nel quadrato $a \leq \xi, x \leq b$, è sommabile rispetto a ξ , continua rispetto ad x , e soddisfa le

$$(11) \quad 0 \leq M(\xi, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) \leq$$

$$\leq \gamma(\xi)e^{\int_a^b \gamma(t)dt} \int_a^b \delta(t)dt + \delta(\xi);$$

le funzioni M ed N sono vincolate dalla

$$(12) \quad N(\xi, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) = \\ = \left| \int_{\xi}^x M(t, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right|.$$

Infine, posto

$$(13) \quad \overline{M}(\xi, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) = \\ = \gamma(\xi) e^{\alpha} \int_{\alpha}^b \delta(t) dt + \delta(\xi),$$

rileviamo che se p è un numero reale positivo ed u_1, \dots, u_n, λ soddisfanno le

$$(14) \quad |u_1 - u_1^*| \leq p; \dots; |u_n - u_n^*| \leq p; |\lambda - \lambda^*| \leq p,$$

allora sussistono le

$$(15) \quad 0 \leq M(\xi, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) \leq \overline{M}(\xi, p, \dots, p, p), \\ \overline{M}(\xi, p, \dots, p, p) \text{ riuscendo sommabile in } \mathfrak{I}_{\xi}.$$

2. - Ricordiamo ora che, a norma dei risultati stabiliti in \mathfrak{N}_1 , l'ipotesi H implica i seguenti fatti ⁴⁾:

⁴⁾ È appena il caso di ricordare che le disuguaglianze che figurano nel lemma 1 di \mathfrak{N}_1 sussistono *a fortiori* qualora si interpretino $\gamma(x)$ e $\delta(x)$ definite dalle

$$\gamma(x) = \sum_1^{n+1} P_i(x),$$

$$\delta(x) = \sum_1^{n+1} P_i(x) \left\{ \sum_1^n |y_r - y_r^*| + |\lambda - \lambda^*| \right\} + \sum_1^{n+1} |f_i(x, y_1^*, \dots, y_n^*, \lambda^*)|,$$

anzichè dalle posizioni fatte nel n. 1 di \mathfrak{N}_1 , f_{n+1} soddisfacendo, naturalmente, all'ipotesi H . Basta infatti osservare che oltre la (29) di \mathfrak{N}_1 sussiste la

$$(29 \text{ bis}) \quad \sum_1^n \left| \frac{d}{dx} \varphi_i(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \eta_i \right| \leq$$

a) fissato comunque un punto $(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$ di S , esiste una ed una sola n -upla

$$\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda),$$

di funzioni assolutamente continue rispetto a ξ in \mathfrak{J}_ξ , soddisfacenti le

$$(16) \quad \psi_i(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) = y_i + \int_x^\xi f_i(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) dt,$$

($i = 1, \dots, n$),

$$(17) \quad \sum_1^n |\psi_i(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) - y_i| \leq N(\xi, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*),$$

$$(18) \quad \sum_1^{n+1} |f_i(\xi, \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)| \leq M(\xi, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*);$$

b) le funzioni ψ_i , ($i = 1, \dots, n$), considerate come funzioni delle $(n + 3)$ variabili $\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda$ definite nell'insieme S'_* : $a \leq \xi, x \leq b$; $-\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty$ soddi-

$$\leq \sum_1^{n+1} |f_i(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda)| \leq \gamma(x) \sum_1^n |\varphi_r(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) - \eta_r| + \delta(x),$$

con $\gamma(x)$ e $\delta(x)$ definite come sopra.

La (29 bis), insieme con la (24), porge allora la

$$(31 \text{ bis}) \quad \sum_1^{n+1} |f_i(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda)| \leq M(x, \xi, \eta_1 - y_1^*, \dots, \eta_n - y_n^*, \lambda - \lambda^*),$$

oltre che la (31).

In questo modo si giustificano le nuove posizioni introdotte nel precedente n. 1 e i fatti che andiamo a riportare in a), b).

sfanno le disuguaglianze

$$(19) \quad \sum_1^n |\psi_i(\xi', x, y_1, \dots, y_n, \lambda) - \psi_i(\xi'', x, y_1, \dots, y_n, \lambda)| \leq \\ \leq \left| \int_{\xi'}^{\xi''} M(t, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right|,$$

$$(20) \quad \sum_1^n |\psi_i(\xi, x', y_1, \dots, y_n, \lambda) - \psi_i(\xi, x'', y_1, \dots, y_n, \lambda)| \leq \\ \leq \Gamma(\xi, x') \left| \int_{x'}^{x''} M(t, x'', y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right|,$$

$$(21) \quad \sum_1^n |\psi_i(\xi, x, y_1, \dots, y_j', \dots, y_n, \lambda) - \psi_i(\xi, x, y_1, \dots, y_j'', \dots, y_n, \lambda)| \leq \\ \leq \Gamma(\xi, x) |y_j' - y_j''|, \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$(22) \quad \sum_1^n |\psi_i(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda') - \psi_i(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda'')| \leq \\ \leq (\Gamma(\xi, x) - 1) |\lambda' - \lambda''|,$$

$$(23) \quad |\psi_i(\xi', x', y_1', \dots, y_n', \lambda') - \psi_i(\xi'', x'', y_1'', \dots, y_n'', \lambda'')| \leq \\ \leq \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \bar{M}(t, y_1' - u_1^*, \dots, y_n' - u_n^*, \lambda' - \lambda^*) dt \right| + \\ + e^\alpha \int_{\gamma(t)}^b dt \left| \int_{x'}^{x''} \bar{M}(t, y_1' - u_1^*, \dots, y_n' - u_n^*, \lambda' - \lambda^*) dt \right| + \\ + e^\alpha \sum_1^n |y_j' - y_j''| + \left(e^\alpha \int_{\gamma(t)}^b dt - 1 \right) |\lambda' - \lambda''|;$$

e in virtù di queste disuguaglianze le $\psi_i(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$, ($i=1, \dots, n$), risultano assolutamente continue rispetto alle singole variabili ξ, x , lipschitziane rispetto alle variabili $(y_1, \dots, y_n, \lambda)$, continue rispetto al complesso delle variabili in S'_* ;

c) la trasformazione \mathcal{T} definita dalle

$$(24) \quad \left. \begin{array}{l} \bar{\xi} = \xi \\ x = x \\ \lambda = \lambda \\ \eta_1 = \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) \\ \dots \\ \eta_n = \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) \end{array} \right\}, (a \leq \xi, x \leq b; -\infty < y_1, \dots, \\ \dots, y_n, \lambda < +\infty) = S'_*$$

è topologica e bismisurabile. La sua inversa \mathcal{T}^{-1} è rappresentata dalle

$$(25) \quad \left. \begin{array}{l} \xi = \bar{\xi} \\ x = x \\ \lambda = \lambda \\ y_1 = \varphi_1(x, \bar{\xi}, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \\ \dots \\ y_n = \varphi_n(x, \bar{\xi}, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \end{array} \right\}, (a \leq \xi, x \leq b; -\infty < \eta_1, \dots, \\ \dots, \eta_n, \lambda < +\infty) = S_*$$

con le funzioni

$$\varphi_1(x, \bar{\xi}, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \bar{\xi}, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda),$$

individuate dalle

$$(26) \quad \varphi_i(x, \bar{\xi}, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \eta_i + \\ + \int_{\bar{\xi}}^x f_i(t, \varphi_1(t, \bar{\xi}, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(t, \bar{\xi}, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt, \\ (i = 1, \dots, n);$$

d) in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* con le parallele all'asse ξ esistono le derivate parziali $\psi'_{i,x}$; ψ'_{i,y_r} ; $\psi'_{i,\lambda}$, ($i, r = 1, \dots, n$), e queste soddisfanno alle

$$(27) \quad \psi'_{i,x}(\bar{\xi}, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) = -f_i(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) + \\ + \int_x^{\bar{\xi}} \sum_1^n f'_{i,y_r}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \\ \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \varphi'_{r,x}(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) dt,$$

$$(28) \quad \begin{aligned} \psi'_{i, y_j}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) = \varepsilon_{i, j} + \\ + \int_x^\xi \sum_1^n f'_{i, u_r}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \\ \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \psi'_{r, y_j}(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) dt, \\ (\varepsilon_{i, j} = 0 \text{ se } i \neq j, \varepsilon_{i, j} = 1 \text{ se } i = j), (i, j = 1, \dots, n), \end{aligned}$$

$$(29) \quad \begin{aligned} \psi'_{i, x}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) + \\ + \sum_1^n f_r(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) \psi'_{i, y_r}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) = 0, \end{aligned}$$

$$(30) \quad \begin{aligned} \psi'_{i, \lambda}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) = \\ = \int_x^\xi \left\{ \sum_1^n f'_{i, u_r}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \cdot \right. \\ \cdot \psi'_{i, \lambda}(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) + \\ \left. + f'_{i, \lambda}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \right\} dt. \end{aligned}$$

in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* con le parallele all'asse ξ .

3. - Ciò premesso, passiamo ad enunciare, mantenendo il significato di tutti i simboli finora considerati, il teorema di esistenza ed unicità per il problema di Cauchy relativo alla equazione (II). Cioè il

TEOREMA 1. - *Le funzioni $f_i(x, u_1, \dots, u_n, \lambda)$, ($i = 1, \dots, n + 1$), soddisfacciano l'ipotesi H. Inoltre, sia $\Phi(u_1, \dots, u_n, \lambda)$ una funzione definita per ogni $(n + 1)$ -upla $(u_1, \dots, u_n, \lambda)$ di numeri reali, soddisfacente la disuguaglianza*

$$(31) \quad \begin{aligned} |\Phi(u_1, \dots, u_n, \lambda) - \Phi(U_1, \dots, U_n, \Lambda)| \leq \\ \leq h \left(\sum_1^n |u_r - U_r| + |\lambda - \Lambda| \right), \end{aligned}$$

qualunque siano le $(n + 1)$ -uple $(u_1, \dots, u_n, \lambda)$, $(U_1, \dots, U_n, \Lambda)$, h essendo una costante non negativa.

In queste condizioni, esiste una ed una sola funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ avente le seguenti proprietà:

I) in S'_* : $a \leq \xi$, $x \leq b$; $-\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty$ soddisfa le disuguaglianze

$$(32) \quad |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - \Phi(y_1, \dots, y_n, \lambda)| \leq \\ \leq (h+1)N(\xi, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*),$$

$$(33) \quad |z(x', y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - z(x'', y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq \\ \leq (h+1)\Gamma(\xi, x') \left| \int_{x''}^{x'} M(t, x'', y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right|,$$

$$(34) \quad |z(x, y_1, \dots, y'_j, \dots, y_n, \xi, \lambda) - z(x, y_1, \dots, y''_j, \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq \\ \leq ((h+1)\Gamma(\xi, x) - 1) |y'_j - y''_j|, \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$(35) \quad |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi', \lambda) - z(x, y_1, \dots, y_n, \xi'', \lambda)| \leq \\ \leq (h+1) \left| \int_{\xi'}^{\xi''} M(t, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right|,$$

$$(36) \quad |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda') - z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda'')| \leq \\ \leq ((h+1)\Gamma(\xi, x) - 1) |\lambda' - \lambda''|;$$

II) per $x = \xi$ si identifica con la funzione $\Phi(y_1, \dots, y_n, \lambda)$;

III) in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* con le parallele all'asse ξ soddisfa l'uguaglianza

$$(37) \quad z'_x(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) + \sum_{r=1}^n f_r(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) z'_{y_r}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = \\ = f_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n, \lambda),$$

le derivate parziali z'_x, z'_{y_r} , ($r=1, \dots, n$), riuscendo sommabili in S'_* . La funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ è data dalla

$$(38) \quad z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = \\ = \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) +$$

$$+ \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) dt.$$

e possiede inoltre le seguenti proprietà:

IV) in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* con le parallele all'asse x , sussiste la

$$(39) \quad \begin{aligned} z'_{\xi}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = & \\ = \sum_1^n \Phi'_{u_r}(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \cdot & \\ \cdot \psi'_{r, \xi}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) - & \\ - f_{n+1}(\xi, \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda); & \end{aligned}$$

V) in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* con le parallele all'asse ξ , sussiste la

$$(40) \quad \begin{aligned} z'_{\lambda}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = & \\ = \sum_1^n \Phi'_{u_r}(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \cdot & \\ \cdot \psi'_{r, \lambda}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) + & \\ + \Phi'_{\lambda}(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) + & \\ + \int_{\xi}^x \left\{ \sum_1^n f'_{n+1, u_r}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \cdot \right. & \\ \cdot \psi'_{r, \lambda}(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) + & \\ \left. + f'_{n+1, \lambda}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \right\} dt. & \end{aligned}$$

Si noti che la (38) porge la formula risolutiva del problema.

4. - Osserviamo intanto che, a norma dell'ipotesi H e della continuità in S'_* delle $\psi_i(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$, la funzione

$$f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)$$

è misurabile rispetto a t e continua rispetto a $(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$; inoltre, per ogni fissata $(n+1)$ -upla $(y_1, \dots, y_n, \lambda)$, essa, attese la (18) e la (15), è maggiorata, in modulo, da una

funzione sommabile della sola variabile t . Pertanto la funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, data dalla (38), è definita in ogni punto di S'_* . Ebbene, per dimostrare il teorema enunciato, noi provremo dapprima che condizione necessaria e sufficiente affinché una funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ soddisfi I), II), III) è che $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ sia data dalla (38), e poi che dalla (38) seguono la IV) e la V).

La sufficienza vien provata nei n.º 5, 6, la necessità nel n. 7 e le proprietà IV), V) nel n. 8.

5. - Dimostriamo qui che la funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, definita dalla (38), soddisfa I), II). A tale scopo osserviamo che (38), (31), e (18) implicano le

$$\begin{aligned}
 (41) \quad & |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - \Phi(y_1, \dots, y_n, \lambda)| \leq |\Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, \\
 & \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) - \Phi(y_1, \dots, y_n, \lambda)| + \\
 & + \left| \int_{\xi}^x |f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)| dt \right| \leq \\
 & \leq h \sum_1^n |\psi_r(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) - y_r| + \\
 & + \left| \int_{\xi}^x M(t, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right|,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (42) \quad & |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi', \lambda) - z(x, y_1, \dots, y_n, \xi'', \lambda)| \leq \\
 & \leq |\Phi(\psi_1(\xi', x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi', x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) - \\
 & - \Phi(\psi_1(\xi'', x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi'', x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)| + \\
 & + \left| \int_{\xi'}^{\xi''} |f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)| dt \right| \leq \\
 & \leq h \sum_1^n |\psi_r(\xi', x, y_1, \dots, y_n, \lambda) - \psi_r(\xi'', x, y_1, \dots, y_n, \lambda)| + \\
 & + \left| \int_{\xi'}^{\xi''} M(t, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right|,
 \end{aligned}$$

e queste disuguaglianze, attese (17), (12), (19), porgono, rispettivamente, (32) e (35). Inoltre: (38), (31), (2), (18), (20) e (9) porgono

$$\begin{aligned}
 (43) \quad & |z(x', y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - z(x'', y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq \\
 & \leq |\Phi(\psi_1(\xi, x', y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x', y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) - \\
 & \quad - \Phi(\psi_1(\xi, x'', y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x'', y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)| + \\
 & + \left| \int_{\xi}^{x'} f_{n+1}(t, \psi_1(t, x', y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x', y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) - \right. \\
 & \quad \left. - f_{n+1}(t, \psi_1(t, x'', y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x'', y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \right| dt + \\
 & + \left| \int_{x''}^{x'} f_{n+1}(t, \psi_1(t, x'', y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x'', y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \right| dt \leq \\
 & \leq h \sum_r^n |\psi_r(\xi, x', y_1, \dots, y_n, \lambda) - \psi_r(\xi, x'', y_1, \dots, y_n, \lambda)| + \\
 & + \left| \int_{\xi}^{x'} \gamma(t) \sum_1^n |\psi_r(t, x', y_1, \dots, y_n, \lambda) - \psi_r(t, x'', y_1, \dots, y_n, \lambda)| dt \right| + \\
 & \quad + \left| \int_{x''}^{x'} M(t, x'', y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right| \leq \\
 & \leq h\Gamma(\xi, x') \left| \int_{x''}^{x'} M(t, x'', y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right| + \\
 & \quad + \left| \int_{x''}^{x'} M(t, x'', y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right| + \\
 & + \left| \int_{\xi}^{x'} \gamma(t) \Gamma(t, x') \left| \int_{x''}^{x'} M(t, x'', y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right| \right| \leq \\
 & \leq (h+1)\Gamma(\xi, x') \left| \int_{x''}^{x'} M(t, x'', y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right|,
 \end{aligned}$$

cioè la (33).

Ancora: (38), (31), (2), (21) e (9) implicano

$$\begin{aligned}
 (44) \quad & |z(x, y_1, \dots, y_j', \dots, y_n, \xi, \lambda) - z(x, y_1, \dots, y_j'', \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq \\
 & \leq |\Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_j', \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_j', \dots, y_n, \lambda), \lambda) - \\
 & - \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_j'', \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_j'', \dots, y_n, \lambda), \lambda)| + \\
 & + \left| \int_{\xi}^x |f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_j', \dots, y_n, \lambda), \dots, \right. \\
 & \quad \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_j', \dots, y_n, \lambda), \lambda) - \\
 & \quad - f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_j'', \dots, y_n, \lambda), \dots, \\
 & \quad \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_j'', \dots, y_n, \lambda), \lambda)| dt \Big| \leq \\
 & \leq h \sum_1^n |\psi_r(\xi, x, y_1, \dots, y_j', \dots, y_n, \lambda) - \\
 & \quad - \psi_r(\xi, x, y_1, \dots, y_j'', \dots, y_n, \lambda)| + \\
 & + \left| \int_{\xi}^x \gamma(t) \sum_1^n |\psi_r(t, x, y_1, \dots, y_j', \dots, y_n, \lambda) - \right. \\
 & \quad \left. - \psi_r(t, x, y_1, \dots, y_j'', \dots, y_n, \lambda)| dt \right| \leq \\
 & \leq h\Gamma(\xi, x) |y_j' - y_j''| + \left| \int_{\xi}^x \gamma(t) \Gamma(t, x) |y_j' - y_j''| dt \right| = \\
 & = ((h + 1)\Gamma(\xi, x) - 1) |y_j' - y_j''|, \quad (j = 1, \dots, n),
 \end{aligned}$$

cioè le (34).

Infine: (38), (31), (2), (22), (9) porgono

$$\begin{aligned}
 (45) \quad & |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda') - z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda'')| \leq \\
 & \leq |\Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda'), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda'), \lambda') - \\
 & - \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda''), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda''), \lambda'')| + \\
 & + \left| \int_{\xi}^x |f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda'), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda'), \lambda') - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda''), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda''), \lambda'') \Big| dt \Big| \leq \\
& \leq h \sum_1^n |\psi_r(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda') - \psi_r(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda'')| + h |\lambda' - \lambda''| + \\
& + \left| \int_{\xi}^x \left\{ \gamma(t) \sum_1^n |\psi_r(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda') - \psi_r(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda'')| + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \gamma(t) |\lambda' - \lambda''| \right\} dt \right| \leq h(\Gamma(\xi, x) - 1) |\lambda' - \lambda''| + h |\lambda' - \lambda''| + \\
& + \left| \int_{\xi}^x \gamma(t) \Gamma(t, x) |\lambda' - \lambda''| dt \right| = ((h + 1)\Gamma(\xi, x) - 1) |\lambda' - \lambda''|,
\end{aligned}$$

vale a dire porgono la (36).

Con ciò abbiamo dimostrato che la funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, definita dalla (38), soddisfa la I). Quanto alla II) poi, essa segue senz'altro dalla (38) e dalla (16).

6. - E passiamo a dimostrare che (38) soddisfa III). A tale scopo facciamo rilevare che con ragionamenti analoghi a quelli di cui ci siamo serviti per stabilire i risultati dei n.ⁱ 5, 6, 7 di \mathfrak{M}_1 , si dimostrano, successivamente, le proposizioni:

e) *la funzione*

$$(46) \quad f_{n+1}(\xi, \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)$$

possiede derivate parziali rispetto ad $x, y_1, \dots, y_n, \lambda$ in quasi tutto S'_ : $a \leq \xi, x \leq b$; $-\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty$. Queste derivate parziali sono fornite dalle relazioni*

$$\begin{aligned}
(47) \quad \frac{\partial}{\partial x} f_{n+1}(\xi, \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) = \\
= \sum_1^n f'_{n+1, u_r}(\xi, \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \\
\dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \psi'_{r, x}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(48) \quad \frac{\partial}{\partial y_j} f_{n+1}(\xi, \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) = \\
= \sum_1^n f'_{n+1, u_r}(\xi, \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \\
\dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \psi'_{r, y_j}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \quad (j = 1, \dots, n),
\end{aligned}$$

$$(49) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} f_{n+1}(\xi, \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) =$$

$$= \sum_1^n f'_{n+1, u_r}(\xi, \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots,$$

$$\dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \psi'_{r, \lambda}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) +$$

$$+ f'_{n+1, \lambda}(\xi, \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda),$$

valide in quasi tutto S'_* , e sono sommabili in S'_* ;

f) fissato comunque il punto (ξ, x) nel quadrato $a \leq \xi, x \leq b$, per quasi tutte le $(n+1)$ -uple $(y_1, \dots, y_n, \lambda)$ sussiste la

$$(50) \quad \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) dt =$$

$$= \int_a^x f_{n+1}(t, y_1, \dots, y_n, \lambda) dt -$$

$$- \int_a^{\xi} f_{n+1}(t, \psi_1(t, a, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, a, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) dt +$$

$$+ \int_a^x d\tau \int_{\xi}^{\tau} \sum_1^n f'_{n+1, u_r}(t, \psi_1(t, \tau, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots,$$

$$\dots, \psi_n(t, \tau, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \psi'_{r, \tau}(t, \tau, y_1, \dots, y_n, \lambda) dt;$$

fissato comunque il punto (ξ, y_j) nella striscia $a \leq \xi \leq b, \infty < y_j < +\infty$, per quasi tutte le $(n+1)$ -uple $(x, y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n, \lambda)$ sussistono le

$$(51) \quad \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) dt =$$

$$= \int_{u_j^*}^{y_j} d\tau \int_{\xi}^x \sum_1^n f'_{n+1, u_r}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_{j-1}, \tau, y_{j+1}, \dots, y_n, \lambda), \dots,$$

$$\dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_{j-1}, \tau, y_{j+1}, \dots, y_n, \lambda), \lambda) dt +$$

$$+ \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_{j-1}, u_j^*, y_{j+1}, \dots, y_n, \lambda), \dots$$

$$\dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_{j-1}, u_j^*, y_{j+1}, \dots, y_n, \lambda), \lambda) dt, \quad (j=1, \dots, n);$$
 fissato comunque il punto (ξ, λ) nella striscia $a \leq \xi \leq b$.
 $-\infty < \lambda < +\infty$, per quasi tutte le $(n+1)$ -uple (x, y_1, \dots, y_n) sussiste la

$$\begin{aligned}
 (52) \quad & \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) dt = \\
 & = \int_{\lambda^*}^{\lambda} d\tau \int_{\xi}^x \left\{ \sum_1^n f'_{n+1, u_r}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \tau), \dots \right. \\
 & \quad \left. \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \tau), \tau) \psi'_{r, \lambda}(t, x, y_1, \dots, y_n, \tau) + \right. \\
 & \quad \left. + f'_{n+1, \lambda}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \tau), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \tau), \tau) \right\} dt + \\
 & + \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda^*), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda^*), \lambda^*) dt;
 \end{aligned}$$

g) in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* con le parallele all'asse ξ , sussistono le uguaglianze

$$\begin{aligned}
 (53) \quad & \frac{\partial}{\partial x} \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots \\
 & \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) dt = f_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n, \lambda) + \\
 & + \int_{\xi}^x \sum_1^n f'_{n+1, u_r}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \cdot \\
 & \quad \cdot \psi'_{r, x}(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) dt,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (54) \quad & \frac{\partial}{\partial y_j} \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots \\
 & \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) dt =
 \end{aligned}$$

$$= \int_{\xi}^x \sum_1^n f_{n+1, u_r}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \psi'_{r, y_j}(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) dt, \quad (j=1, \dots, n),$$

$$(55) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) dt = \\ = \int_{\xi}^x \left\{ \sum_1^n f_{n+1, u_r}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \psi'_{r, \lambda}(t, x_1, \dots, y_n, \lambda) + \right. \\ \left. + f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \right\} dt,$$

nelle quali primi e secondi membri sono sommabili in S_* .

Ebbene, la g) e la (29) porgono la conclusione non appena avremo dimostrato che:

h) in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* con le parallele all'asse ξ , la funzione

$$(56) \quad \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)$$

possiede le derivate parziali rispetto ad $x, y_1, \dots, y_n, \lambda$ date dalle relazioni

$$(57) \quad \frac{\partial}{\partial x} \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) = \\ = \sum_1^n \Phi'_{u_r}(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \psi'_{r, x}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda),$$

$$(58) \quad \frac{\partial}{\partial y_j} \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) = \\ = \sum_1^n \Phi'_{u_r}(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)$$

$$\dots, \psi_n(\xi, x, y, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \psi'_{r, y_j}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \quad (j=1, \dots, n),$$

$$(59) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) = \\ = \sum_1^n \Phi'_{u_r}(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \\ \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \psi_{r,\lambda}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) + \\ + \Phi'_\lambda(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda),$$

tali derivate parziali riuscendo sommabili in S'_ ,*

Allo scopo, a norma della d), esistono le derivate parziali

$$\psi'_{i,x}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda); \quad \psi'_{i,y_j}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda); \\ \psi'_{i,\lambda}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$$

in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* con le parallele all'asse ξ , tali derivate riuscendo inoltre sommabili in S'_* . Pertanto, atteso un noto teorema di derivazione⁵⁾ basta provare che, per $(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$ dato comunque su quasi tutte le sezioni di S'_* con le parallele all'asse ξ , la funzione $\Phi(u_1, \dots, u_n, \lambda)$ è differenziabile rispetto (u_1, \dots, u_n) nei punti

$$(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)$$

⁵⁾ A. SAMBO, *Sulla derivazione delle funzioni composte*, Rendic. Accad. Sc. Fis. Mat. della Soc. Naz. di Sc. Sett. ed Arti, Napoli, s. 4, vol. XIX (1952). Il teorema in discorso è il seguente: *Nell'intervallo $a \leq t \leq b$ le funzioni $\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)$ siano continue e quasi dappertutto derivabili. Nello strato: $a \leq t \leq b, -\infty < y_1, \dots, y_n < +\infty$ la funzione $g(t, y_1, \dots, y_n)$ sia misurabile rispetto a t , continua rispetto ad (y_1, \dots, y_n) e per di più in quasi tutti i punti $(t, \alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ sia derivabile parzialmente rispetto a t e differenziabile rispetto a (y_1, \dots, y_n) . In queste ipotesi la funzione composta*

$$G(t) = g(t, \alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$$

è asintoticamente derivabile in quasi tutto (a, b) con derivata asintotica uguale a

$$g'_t(t, \alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) + \sum_1^n g'_{y_r}(t, \alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \alpha'_r(t),$$

Cfr. anche G. SCORZA DRAGONI, *Un'osservazione sulla derivazione delle funzioni composte*, Rend. Sem. Mat. Un. Padova, vol. XX (1951), pp. 462-467.

e che, in S'_* , le funzioni

$$(60) \quad \Phi'_{u_r}(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda),$$

$$(61) \quad \Phi'_\lambda(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)$$

sono sommabili.

Ora la lipschitzianeità della Φ e un noto risultato di Rademacher ⁶⁾, implicano la differenziabilità di Φ almeno a prescindere, nello spazio $(u_1, \dots, u_n, \lambda)$, dai punti di un insieme e di misura $(n + 1)$ -dimensionale nulla.

Ebbene, indichiamo con e_* l'insieme di quei punti

$$(\xi, x, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$$

per i quali $(\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \in e$. L'insieme e_* ha misura $(n + 3)$ -dimensionale nulla ed è mutato dalla trasformazione \mathcal{T}^{-1} in un insieme e'_* , di S'_* , di misura $(n + 3)$ -dimensionale nulla, il cui complementare è formato dai punti di quasi tutte le sezioni di S'_* con le parallele all'asse ξ (anzi, dai punti di quasi tutte le sezioni di S'_* con i piani paralleli al piano ξ, x). Pertanto il complementare di e può essere pensato come descritto dal punto

$$(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)$$

al variare di $(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$ nel complementare di e_* .

D'onde la conclusione almeno per quello che riguarda la differenzialibilità della funzione $\Phi(u_1, \dots, u_n, \lambda)$. La sommabilità poi delle funzioni (60), (61) in S'_* è immediata se si osserva che esse sono, ovviamente, date in tutto $S'_* - e'_*$, riuscendovi misurabili, e che esse sono ivi limitate in virtù della (31).

7. - Dimostriamo ora che se una funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ possiede, in S'_* , le proprietà espresse in I), II), III), allora sussiste la (38).

⁶⁾ H. RADEMACHER, *Über partielle und totale Differentierbarkeit von Funktionen mehrerer Variablen und über Transformation der Doppelintegrale*, Math. Ann., vol. 79 (1919), pp. 340-359.

A norma dell'unicità delle soluzioni assolutamente continue del sistema differenziale

$$(62) \quad \frac{du_i}{dt} = f_i(t, u_1, \dots, u_n, \lambda) \quad (i = 1, \dots, n),$$

soddisfacenti ad assegnate condizioni iniziali, sussistono le identità

$$(63) \quad \varphi_i(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) \equiv \psi_i(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$$

$$(64) \quad \psi_i(t, \tau, \psi_1(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \equiv \\ \equiv \psi_i(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \quad (i = 1, \dots, n);$$

$$a \leq t, x, \tau \leq b; \quad -\infty < y_1, \dots, y_n, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda < +\infty,$$

e quindi le

$$(65) \quad \psi_i(t, \tau, \varphi_1(\tau, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(\tau, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \equiv \\ \equiv \varphi_i(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda).$$

Ponendo $\tau = x$ nelle (65), si ottiene

$$(66) \quad \psi_i(t, x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \equiv \\ \equiv \varphi_i(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda).$$

Ciò premesso, osserviamo che la (37), soddisfatta in tutti i punti di quasi tutte le sezioni S'_* con le parallele all'asse ξ , vien mutata dalla trasformazione \mathcal{C} nella

$$(67) \quad z'_x(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \xi, \lambda) + \\ + \sum_1^n f_r(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) \cdot \\ \cdot z'_{y_r}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \xi, \lambda) = \\ = f_{n+1}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(\tau, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda),$$

soddisfatta in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* con le parallele all'asse ξ . Allora, poichè in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* coi piani $x = \text{cost.}$ sussiste la

$$(68) \quad \varphi'_{r,x}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \\ = f_r(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda),$$

la (67) porge

$$(69) \quad z'_x(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \xi, \lambda) + \\ + \sum_1^n z'_{y_r}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \\ \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \xi, \lambda) \varphi'_{r,x}(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) = \\ = f_{n+1}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda),$$

sempre in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* con le parallele all'asse ξ , e quindi in quasi tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* con le parallele all'asse x .

La funzione composta

$$(70) \quad z(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \xi, \lambda),$$

è assolutamente continua rispetto ad x per ogni fissata $(n + 1)$ -upla $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ perchè $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ soddisfa la I) e le $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sono assolutamente continue rispetto ad x .

Ebbene, mostriamo che la sua derivata, rispetto ad x , è data dal primo membro della (69) in quasi tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* con le parallele all'asse x .

Allo scopo, a norma del teorema di derivazione citato in ⁵⁾, basta dimostrare che in S_* esiste un insieme di misura $(n + 3)$ -dimensionale nulla, c_* , tale che la funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ sia derivabile rispetto ad x e differenziabile rispetto a (y_1, \dots, y_n) nei punti

$$(71) \quad (x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \xi, \lambda),$$

non appena $(\xi, x, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ appartenga ad $S_* - c_*$.

Ora, in virtù della I), $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ è derivabile rispetto ad x e differenziabile rispetto ad (y_1, \dots, y_n) almeno a prescindere in S'_* da una conveniente porzione c'_* di misura $(n + 3)$ -dimensionale nulla. Ma c'_* viene mutato dalla trasformazione \mathcal{T} in un insieme c_* di misura $(n + 3)$ -dimensionale nulla, di guisa che c'_* può essere pensato descritto dai punti (71) al variare di $(\xi, x, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda)$ in c_* . Ed è quanto si voleva.

Dopo di ciò la (69) può essere scritta nel modo che segue

$$(72) \quad \frac{d}{dx} z(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \xi, \lambda) = \\ = f_{n+1}(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda),$$

valida in quasi tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S_* con le parallele all'asse x . La (72) e la (26) porgono allora

$$(73) \quad z(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \xi, \lambda) = \\ = z(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \xi, \lambda) + \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \varphi_1(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \\ \dots, \varphi_n(t, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda) dt,$$

ovunque in S_* dato che i suoi due membri sono ivi continui.

Attesa l'identità (66) e la II), la (73) diventa

$$(74) \quad z(x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \xi, \lambda) = \\ = \Phi(\eta_1, \dots, \eta_n, \lambda) + \\ + \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \\ \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda), \lambda), \dots \\ \dots, \psi_n(t, x, \varphi_1(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \dots, \varphi_n(x, \xi, \eta_1, \dots, \eta_n, \lambda), \lambda), \lambda) dt,$$

che, trasformata con \mathcal{T}^{-1} , porge la (38).

8. - Completiamo la dimostrazione del teorema provando che la funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \lambda)$, definita dalla (38), soddisfa IV), V).

La V) è immediata conseguenza di (55) e (59). Quanto alla IV), a norma di un noto teorema di G. Scorza Dragoni⁷⁾, in

⁷⁾ G. SCORZA DRAGONI, *Una applicazione della quasi continuità semi-regolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto all'altra variabile*, Rend. Acc. Naz. Lincei, s. XII (1952), pp. 55-61; cfr. anche, dello stesso Autore, *Sulla derivazione degli integrali definiti*, ibidem, vol. XX (1956), pp. 711-714. Il teorema in discorso è stato riportato nella nota ^{s)} a piè di pag. 83 di M_1 .

tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* coi piani $\xi = \text{cost.}$ sussistono le

$$(75) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) dt = \\ = -f_{n+1}(\xi, \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda),$$

$$(76) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \psi_i(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda) = f_i(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \quad (i=1, \dots, n),$$

sicchè per concludere basta dimostrare che

i) *in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* con le parallele all'asse x , la funzione*

$$(77) \quad \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda)$$

è derivabile parzialmente rispetto a ξ e sussiste la

$$(78) \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) = \\ = \sum_1^n \Phi'_{u_r}(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda) \cdot \\ \cdot f_r(\xi, \psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \lambda), \lambda).$$

Ora, utilizzando la (76), la (78) segue con un procedimento analogo a quello tenuto per provare la h). E la dimostrazione del teorema è così completa.

9. - Occupiamoci ora del problema di Cauchy relativo alla equazione (I). E in questo numero indichiamo delle condizioni per l'esistenza ed unicità di soluzioni appartenenti alla classe A. Ai coefficienti e al termine noto dell'equazione imponiamo stavolta la seguente

IPOTESI H_{ξ} :

le funzioni $f_i(x, u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda)$, ($i=1, \dots, n+1$), definite nell'insieme

$$S_{\xi} : a \leq x, \xi \leq b; \quad -\infty < u_1, \dots, u_n, \lambda < +\infty,$$

sono sommabili rispetto ad x sulle sezioni di S_{ξ} con le parallele all'asse x , mentre su quasi tutte le sezioni di S_{ξ} coi piani $x = \text{cost.}$ soddisfanno le

$$(79) \quad |f_i(x, u, \dots, u_n, \xi, \lambda) - f_i(x, U_1, \dots, U_n, \Xi, \Lambda)| \leq \\ \leq P_i(x) \left\{ \sum_1^n |u_r - U_r| + \left| \int_1^{\Xi} \mu(\tau) d\tau \right| + |\lambda - \Lambda| \right\}, \quad (i = 1, \dots, n+1),$$

qualunque siano le $(n+2)$ -uple $(u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda)$, $(U_1, \dots, U_n, \Xi, \Lambda)$, $P_i(x)$, $(i = 1, \dots, n+1)$, e $\mu(x)$ essendo funzioni non negative, sommabili in $I_x = a \leq x \leq b$.

Allora, fissata una $(n+2)$ -upla

$$u_1^*, \dots, u_n^*, \xi^*, \lambda^*,$$

e posto

$$(80) \quad \gamma(t) = \sum_1^{n+1} P_i(t),$$

$$(81) \quad \delta(t) = \gamma(t) \left\{ \sum_1^n |u_r - u_r^*| + \left| \int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau \right| + |\lambda - \lambda^*| \right\} + \\ + \sum_1^{n+1} |f_i(t, u_1^*, \dots, u_n^*, \xi^*, \lambda^*)|,$$

$$(82) \quad \Gamma(t, x) = e^{\int_t^x \gamma(\tau) d\tau},$$

$$(83) \quad N\left(t, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \left| \int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau \right|, \lambda - \lambda^*\right) = \\ = \begin{cases} \int_t^x \int_{\xi}^{\xi^*} \delta(\tau) e^{-\int_{\tau}^x \gamma(\omega) d\omega} d\tau, & \text{per } a \leq t \leq x, \\ \int_x^t \int_{\xi}^{\xi^*} \delta(\tau) e^{-\int_x^{\tau} \gamma(\omega) d\omega} d\tau, & \text{per } x \leq t \leq b, \end{cases}$$

$$(84) \quad M\left(t, x, u_1 - u_1^*, \dots, u_n - u_n^*, \left| \int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau \right|, \lambda - \lambda^*\right) =$$

$$= \begin{cases} \gamma(t) e^{\int_t^x \gamma(\tau) d\tau} \int_t^x \delta(\tau) e^{-\int_t^x \gamma(\omega) d\omega} d\tau + \delta(t), & \text{per } a \leq t \leq x, \\ \gamma(t) e^{\int_x^t \gamma(\tau) d\tau} \int_x^t \delta(\tau) e^{-\int_x^t \gamma(\omega) d\omega} d\tau + \delta(t), & \text{per } x \leq t \leq b, \end{cases}$$

si dimostra, con gli stessi ragionamenti svolti nel paragrafo precedente, il seguente

TEOREMA 2. - *Le funzioni $f_i(x, u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda)$, ($i = 1, \dots, n + 1$), soddisfacciano l'ipotesi H_{ξ} . Inoltre, sia $\Phi(u_1, \dots, u_n, \lambda)$ una funzione definita per ogni $(n + 1)$ -upla $(u_1, \dots, u_n, \lambda)$ di numeri reali, soddisfacente la (31). In queste condizioni, esiste una ed una sola funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ avente le seguenti proprietà:*

I) *in S'_* : $a \leq \xi$, $x \leq b$; $-\infty < y_1, \dots, y_n$, $\lambda < +\infty$ soddisfa le disuguaglianze*

$$(85) \quad |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - \Phi(y_1, \dots, y_n, \lambda)| \leq$$

$$\leq (h + 1)N\left(\xi, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \left| \int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau \right|, \lambda - \lambda^*\right)$$

$$(86) \quad |z(x', y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - z(x'', y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq$$

$$\leq (h + 1)\Gamma(\xi, x') \left| \int_{x'}^{x''} M\left(t, x'', y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \left| \int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau \right|, \lambda - \lambda^*\right) dt \right|,$$

$$(87) \quad |z(x, y_1, \dots, y'_j, \dots, y_n, \xi, \lambda) - z(x, y_1, \dots, y''_j, \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq$$

$$\leq ((h + 1)\Gamma(\xi, x) - 1) |y'_j - y''_j|, \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$(88) \quad |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi', \lambda) - z(x, y_1, \dots, y_n, \xi'', \lambda)| \leq \\ \leq (h+1) \left| \int_{\xi'}^{\xi''} M(t, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \mu(\tau) d\tau \right|, \lambda - \lambda^*) dt \right| + \\ + (h+1) (\Gamma(\xi', x) - 1) \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \mu(\tau) d\tau \right|,$$

$$(89) \quad |z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda') - z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda'')| \leq \\ \leq ((h+1)\Gamma(\xi, x) - 1) |\lambda' - \lambda''|;$$

II) per $x = \xi$ si identifica con la funzione $\Phi(y_1, \dots, y_n, \lambda)$;

III) in quasi tutti i punti di S'_* soddisfa l'uguaglianza

$$(90) \quad z'_x(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) + \sum_1^n f_r(x, y_1, \dots, \\ \dots, y_n, \xi, \lambda) z'_{y_r}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = f_{n+1}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda),$$

le derivate parziali z'_x, z'_{y_r} , ($r = 1, \dots, n$), riuscendo sommabili in S'_* . La funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, che per I), II), III) appartiene alla classe A , è data dalla

$$(91) \quad z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots \\ \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \lambda) + \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots \\ \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \xi, \lambda) dt,$$

ove

$$(92) \quad \psi_i(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = y_i + \int_x^t f_i(\tau, \psi_1(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots \\ \dots, \psi_n(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \xi, \lambda) d\tau, \quad (i = 1, \dots, n),$$

La (91) fornisce quindi la formula risolutiva del problema.

Come abbiamo accennato, la dimostrazione si acquisisce con gli stessi mezzi usati per il teorema 1. Soltanto è il caso di rilevare che nella dimostrazione del teorema 1 si è potuto dedurre che le (53), (54), (55) sussistono in tutti i punti

di quasi tutte le sezioni di S'_* con le parallele all'asse ξ , applicando, nella derivazione dei secondi membri di (50), (51), (52) il noto teorema di Scorza Dragoni. Nel caso attuale, l'applicazione di quel teorema non è possibile perchè la variabile ξ , compare ora, oltre che come estremo di integrazione, anche nelle funzioni integrande. E non è detto che queste siano continue rispetto a ξ . E questa la ragione per cui nell'enunciato del teorema 2 ci siamo limitati a dire che la (90) è soddisfatta in quasi tutti i punti di S'_* . Facciamo ancora notare che la (88) differisce dall'analogia (35) del teorema 1: il fatto è dovuto alla presenza, nella (92), della variabile ξ in qualità di parametro. A norma dell'osservazione a) del n. 9 di \mathfrak{M}_1 sussiste allora la disuguaglianza

$$(93) \quad \sum_1^n |\psi_i(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi', \lambda) - \psi_i(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi'', \lambda)| \leq \\ \leq (\Gamma(t, x) - 1) \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \mu(\tau) d\tau \right|,$$

e quindi la

$$(94) \quad \sum_1^n |\psi_i(\xi', x, y_1, \dots, y_n, \xi', \lambda) - \psi_i(\xi'', x, y_1, \dots, y_n, \xi'', \lambda)| \leq \\ \leq \left| \int_{\xi'}^{\xi''} M \left(t, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \left| \int_{\xi''}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau \right|, \lambda - \lambda^* \right) dt \right| + \\ + (\Gamma(\xi', x) - 1) \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \mu(\tau) d\tau \right|.$$

Di qui e dalla (91) segue allora la (88).

Infine facciamo notare che anche in questo caso, volendo, si possono stabilire delle formule di derivazione della soluzione z , rispetto alle variabili ξ e λ , analoghe alla (39) e (40). Anche queste formule varrebbero in quasi tutto S'_* .

10. - Sempre per il problema di Cauchy relativo all'equazione (I) segnaliamo ora delle condizioni per l'esistenza ed unicità di soluzioni appartenenti alla classe B. I risultati sono espressi dal seguente

TEOREMA 3. - *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 2. Inoltre, le funzioni $f_i(x, u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda)$, ($i=1, \dots, n+1$), e $\Phi(u_1, \dots, u_n, \lambda)$ siano derivabili rispetto ad u_1, \dots, u_n in ogni punto del loro dominio e siano continue insieme con le loro derivate parziali f'_{i, u_r}, Φ'_{u_r} , ($r=1, \dots, n$), rispettivamente, rispetto a $(u_1, \dots, \xi, \lambda)$ e $(u_1, \dots, u_n, \lambda)$. In queste condizioni la funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, data dalle (91), (92) appartiene alla classe B.*

Giacchè la funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ possiede le proprietà I), II) indicate nel teorema 2, basta provare che le derivate parziali

$$(95) \quad z'_{y_1}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, z'_{y_n}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda),$$

sono continue in S'_* , che la (90) è soddisfatta in tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* coi piani $x = \text{cost.}$ e che su quasi tutte queste sezioni la derivata $z'_x(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ è continua.

A questo scopo ricordiamo che, a norma di quanto abbiamo stabilito nel n. 10 di \mathfrak{N}_1 , le funzioni $\psi_i(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, definite dalle (92), posseggono le derivate parziali

$$\psi'_{i, y_1}(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi'_{i, y_n}(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda),$$

continue nell'insieme

$$a \leq x, \xi, t \leq b; \quad -\infty < y_1, \dots, y_n, \lambda < +\infty.$$

Allora le uguaglianze

$$(96) \quad \frac{\partial}{\partial y_j} \int_{\xi}^x f_{n+1}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \xi, \lambda) dt = \\ = \int_{\xi}^x \sum_{r=1}^n f'_{n+1, u_r}(t, \psi_1(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \xi, \lambda) \psi'_{r, y_j}(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) dt,$$

$$\begin{aligned}
 (97) \quad & \frac{\partial}{\partial y_j} \Phi(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \lambda) = \\
 & = \sum_1^n \Phi'_{u_r}(\psi_1(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n(\xi, x, y_1, \dots \\
 & \dots, y_n, \xi, \lambda), \lambda) \psi'_{r, y_j}(\xi, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \quad (j = 1, \dots, n),
 \end{aligned}$$

che nelle ipotesi del teorema 2 valevano in quasi tutto S'_* , valgono ora in tutto S'_* perchè, nelle ipotesi attuali, i secondi membri di (96) e (97) sono continui in S'_* . Di qui e dalla (91) segue la continuità in S'_* delle derivate indicate in (95). Questa circostanza implica che l'uguaglianza

$$\begin{aligned}
 (98) \quad & z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - z(a, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = \\
 & = \int_a^x \left\{ \sum_1^n f_r(t, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) z'_{y_r}(t, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) + \right.
 \end{aligned}$$

valida, a norma della proprietà III) indicata nel teorema 2, per tutti gli x e per quasi tutte le $(n+2)$ -uple $(y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, ha i due membri continui in S'_* e pertanto sussiste in tutto S'_* . Di qui, dalla continuità rispetto ad $(y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ della funzione che sta sotto il segno di integrale nella (98), dal fatto che questa funzione almeno per

$$-p < y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \quad \lambda - \lambda^* < p$$

è maggiorata, in modulo, da una funzione della sola variabile t sommabile nell'intervallo (a, b) , segue, a norma del teorema di Scorza Dragoni e dell'arbitrarietà del numero positivo p , che la (90) sussiste su tutti i punti di quasi tutte le sezioni di S'_* coi piani $x = \text{cost}$. Di qui la conclusione dato che la (90) porge anche la continuità di $z'_x(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$ su quasi tutte le sezioni di S'_* coi piani $x = \text{cost}$.

11. - Infine, per l'esistenza ed unicità di soluzioni appartenenti alla classe C dimostriamo il seguente

TEOREMA 4. - *Siano soddisfatte le ipotesi del teorema 3. Inoltre, su quasi tutte le sezioni di S_ξ coi piani $x = \text{cost}$.*

siano soddisfatte le

$$(99) \quad |f'_{i, u_j}(x, u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda) - f'_{i, u_j}(x, U_1, \dots, U_n, \Xi, \Lambda)| \leq \\ \leq P_{i, j}(x) \left\{ \sum_1^n |u_r - U_r| + \left| \int_{\xi}^{\Xi} \mu(\tau) d\tau \right| + |\lambda - \Lambda| \right\}, \\ \left(\begin{array}{l} i = 1, \dots, n+1 \\ j = 1, \dots, n \end{array} \right),$$

qualunque siano le $(n+2)$ -uple $(u_1, \dots, u_n, \xi, \lambda)$, $(U_1, \dots, U_n, \Xi, \Lambda)$, le funzioni $P_{i, j}(x)$, $\mu(x)$ essendo non negative e sommabili in I_x ; e sia pure soddisfatta la

$$(100) \quad |\Phi'_{u_j}(u_1, \dots, u_n, \lambda) - \Phi'_{u_j}(U_1, \dots, U_n, \Lambda)| \leq \\ \leq K \left\{ \sum_1^n |u_r - U_r| + |\lambda - \Lambda| \right\}, \quad (j = 1, \dots, n),$$

qualunque siano le $(n+1)$ -uple $(u_1, \dots, u_n, \lambda)$, $(U_1, \dots, U_n, \Lambda)$, K essendo una costante non negativa.

In queste condizioni la funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, data dalle (91), (92) appartiene alla classe C. E precisamente, le derivate parziali

$$z'_{y_1}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, z'_{y_n}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$$

soddisfanno le

$$(101) \quad |z'_{y_j}(x', y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - z'_{y_j}(x'', y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq \\ \leq K\Gamma^2(\xi, x') \left| \int_{x'}^{x''} M(t, x'', y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*) \left| \int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau \right|, \lambda - \lambda^* \right| dt + \\ + (h+1)\Gamma(\xi, x') \left| \int_{x'}^{x''} \gamma(t)\Gamma(t, x'') dt \right| + \\ + \left| \int_{x'}^{x''} M(t, x'', y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*) \left| \int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau \right|, \lambda - \lambda^* \right| dt \cdot \\ \cdot \left| \int_{x'}^{\xi} \sum_{r, i}^{n+1} P_{i, r}(t)\Gamma(t, x') dt \right|,$$

$$(102) \quad |z'_{y_j}(x, y_1, \dots, y'_v, \dots, y_n, \xi, \lambda) - z'_{y_j}(x, y_1, \dots, y'_v, \dots, y_n, \xi, \lambda')| \leq \\ \leq K \Gamma^2(\xi, x) |y'_v - y''_v| + \\ + (h + 1) \Gamma(\xi, x) \left| \int_x^\xi \sum_{r,i}^{n+1} P_{i,r}(t) \Gamma(t, x) dt \right| |y'_v - y''_v|,$$

$$(103) \quad |z'_{y_j}(x, y_1, \dots, y_n, \xi', \lambda) - z'_{y_j}(x, y_1, \dots, y_n, \xi'', \lambda)| \leq \\ \leq K \left\{ \left| \int_{\xi'}^{\xi''} M(t, x, y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \lambda - \lambda^*) dt \right| + \right. \\ \left. + (\Gamma(\xi', x) - 1) \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \mu(\tau) d\tau \right| \right\} + (h + 1) \left\{ \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \gamma(t) \Gamma(t, x) dt \right| + \right. \\ \left. + \Gamma(\xi'', x) \left| \int_{x'}^{\xi''} \sum_{r,i}^{n+1} P_{i,r}(t) \Gamma(t, x) dt \right| \right\} \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \mu(\tau) d\tau \right\},$$

$$(104) \quad |z'_{y_j}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda') - z'_{y_j}(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda'')| \leq \\ \leq K(\Gamma(\xi, \lambda) - 1)^2 |\lambda' - \lambda''|, \\ + (h + 1) \Gamma(\xi, x) \left| \int_x^\xi \sum_{r,i}^{n+1} P_{i,r}(t) \Gamma(t, x) dt \right| |\lambda' - \lambda''|,$$

in S'_* .

Essendo ora soddisfatte ipotesi più restrittive di quelle assunte nel precedente teorema 3, la funzione $z(x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$, data dalla (91), appartiene intanto alla classe B. Quindi per completare la dimostrazione del teorema basta provare che sussistono le disuguaglianze (101), (102), (103), (104). A questo scopo, si può dapprima osservare che, nelle ipotesi attuali, le derivate parziali

$$\psi'_{i,y_1}(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi'_{i,y_n}(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)$$

delle funzioni definite dalle (92), soddisfanno, oltre che alle solite uguaglianze

$$(105) \quad \psi'_{i,y_j}(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) = \varepsilon_{i,j} + \\ + \int_x^t \sum_1^n f'_{i,u_r}(\tau, \psi_1(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda), \dots, \psi_n(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) \cdot \\ \cdot \psi'_{r,y_j}(\tau, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) d\tau.$$

anche alle disuguaglianze

$$(106) \quad \sum_1^n |\psi'_{i,y_j}(t', x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - \psi'_{i,y_j}(t'', x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq \\ \leq \left| \int_{t'}^{t''} \gamma(\tau) \Gamma(\tau, x) d\tau \right|,$$

$$(107) \quad \sum_1^n |\psi'_{i,y_j}(t, x', y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda) - \psi'_{i,y_j}(t, x'', y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq \\ \leq \Gamma(t, x') \left| \int_{x'}^{x''} \gamma(\tau) \Gamma(\tau, x'') d\tau \right| + \\ + \left| \int_{x'}^{x''} M\left(\tau, x'', y_1 - u_1^*, \dots, y_n - u_n^*, \left| \int_{\xi}^{\xi^*} \mu(\tau) d\tau \right|, \lambda - \lambda^*\right) d\tau \right| \cdot \\ \cdot \left| \int_{x'}^t \sum_1^n P_{i,r}(\tau) \Gamma(\tau, x') d\tau \right|,$$

$$(108) \quad \sum_1^n |\psi'_{i,y_j}(t, x, y_1, \dots, y'_v, \dots, y_n, \xi, \lambda) - \\ - \psi'_{i,y_j}(t, x, y_1, \dots, y''_v, \dots, y_n, \xi, \lambda)| \leq \\ \leq \Gamma(t, x) \left| \int_x^t \sum_1^n P_{i,r}(\tau) \Gamma(\tau, x) d\tau \right| |y'_v - y''_v|,$$

$$(109) \quad \sum_1^n |\psi'_{i,y_j}(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi', \lambda) - \psi'_{i,y_j}(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi'', \lambda)| \leq \\ \leq \Gamma(t, x) \left| \int_x^t \sum_1^n P_{i,r}(\tau) \Gamma(\tau, x) d\tau \right| \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \mu(\tau) d\tau \right|,$$

$$(110) \quad \sum_1^n |\psi'_{i,y_j}(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda') - \psi'_{i,y_j}(t, x, y_1, \dots, y_n, \xi, \lambda'')| \leq \\ \leq \Gamma(t, x) \left| \int_x^t \sum_1^n P_{i,r}(\tau) \Gamma(\tau, x) d\tau \right| |\lambda' - \lambda''|,$$

$$(111) \quad \sum_1^n |\psi'_{i,y_j}(\xi', x, y_1, \dots, y_n, \xi', \lambda) - \psi'_{i,y_j}(\xi'', x, y_1, \dots, y_n, \xi'', \lambda)| \leq \\ \leq \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \gamma(\tau) \Gamma(\tau, x) d\tau \right| + \\ + \Gamma(\xi'', x) \left| \int_x^{\xi''} \sum_1^n P_{i,r}(\tau) \Gamma(\tau, x) d\tau \right| \left| \int_{\xi'}^{\xi''} \mu(\tau) d\tau \right|,$$

che si stabiliscono con ragionamenti analoghi a quelli già svolti per dimostrare il lemma 1 di \mathfrak{N}_1 . Ebbene, da queste disuguaglianze si ottengono le (101), (102), (103), (104), operando sulla (91) con lo stesso procedimento seguito nel n. 5 di questo lavoro. Il teorema è così provato.