Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Carlo Ciliberto

Problemi di Mayer-Lagrange per gli integrali semplici in forma ordinaria

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 28 (1958), p. 112-152

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__112_0>

PROBLEMI DI MAYER-LAGRANGE PER GLI INTEGRALI SEMPLICI IN FORMA ORDINARIA

Memoria (*) di CARLO CILIBERTO (a Napoli)

Consideriamo il seguente problema di minimo:
si abbia il sistema differenziale:

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} u_i'(x) = f_i[x,\ y(x),\ y'(x),\ u_1(x), \dots,\ u_n(x)] & a \leq x \leq b, \\ u_i(a) = \mu_i, \end{cases}$$

con $i = 1, 2, \dots, n$, e supposto che esso ammetta una soluzione $\{u_1(x), \dots, u_n(x)\}$ per ogni fissata curva C di equazione $y = y(x)$, con $y(x)$ assolutamente continua in (a, b), si voglia studiare sotto quali condizioni per la funzione $\Phi(u_1, \dots, u_n)$ e per le funzioni f_i, $i = 1, 2, \dots, n$, esiste il minimo assoluto del funzionale

$$\Phi[u_1(b), \dots, u_n(b)],$$

al variare di C in una fissata classe di curve.

Di un simile tipo di problema ebbero già modo di occuparsi vari anni or sono B. Manià [1]) e L. M. Graves [2]).

(*) Pervenuta in Redazione il 24 aprile 1958.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Napoli.

1) B. MANIÀ, *Sui problemi di Lagrange e di Mayer*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 58 (1934), pp. 285-310. Per la citazione di altri lavori del MANIÀ e relativi allo stesso argomento rimando ad una mia recente memoria: *Su un problema di Mayer per gli integrali doppi*, Ricerche di Matematica, vol. VI (1957), pp. 205-236.

2) L. M. GRAVES, *The existence of an extremum in problems of Mayer*, Transactions of the American Society, vol. 39 (1936), pp. 456-471.

Sia il Manià, il quale tratta il caso in cui le funzioni f_i sono indipendenti dalle variabili $u_{i+1}, \dots, u_n$, che il Graves svolgono lo studio di tale problema col metodo diretto del Tonelli, per il quale è essenziale stabilire preventivamente la semicontinuità del funzionale da estremare e quindi di $u_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Orbene il Manià e il Graves riescono a stabilire tale semicontinuità in ipotesi di monotonia [3]) delle funzioni f_i rispetto alle variabili $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Successivamente L. Tonelli [4]), enunciò, senza dimostrazione, alcuni teoremi mediante i quali vengono stabilite nuove condizioni sufficienti per la semicontinuità di $u_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, per il caso, considerato dal Manià, in cui le f_i sono indipendenti da $u_{i+1}, \dots, u_n$, tali condizioni avendo il pregio, rispetto a quelle poste dal Manià e dal Graves, di risultare indipendenti dalla monotonia di f_i rispetto alla variabile u_i.

La dimostrazione di tali teoremi fu data in un secondo momento da E. Magenes [5]).

Orbene alcuni recenti studi da me svolti [6]) relativamente a problemi di Mayer-Lagrange per gli integrali doppi mi hanno suggerito l'idea di riprendere le ricerche relative agli integrali semplici, al fine di considerare, nell'ordine di idee del Tonelli, anche il caso in cui le f_i del sistema (1) non siano indipendenti da $u_{i+1}, \dots, u_n$. Ciò sia per estendere i teoremi di semicontinuità del Tonelli, che per stabilire nuovi teoremi di esistenza del minimo, questione quest'ultima che il Tonelli non aveva esplicitamente considerata.

Il presente lavoro è appunto dedicato a tale scopo, la trattazione delle varie questioni essendo condotta con proce-

---

[3]) Cfr. lavoro cit. in [1]), nn. 15, 10 e 6; cfr. lavoro cit. in [2]), pp. 461-462.

[4]) L. TONELLI, *Su la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange*, Rendiconti dell'Accademia dei Lincei (6), vol. XXIV (1936), pp. 339-404.

[5]) E. MAGENES, *Sui teoremi di Tonelli per la semicontinuità nei problemi di Mayer e di Lagrange*, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, serie II, vol. XV (1946), pp. 113-125.

[6]) C. CILIBERTO, *Problemi di Mayer-Lagrange per gli integrali doppi*, Ricerche di Matematica, vol. VII (1958), pp. 21-63; cfr. anche il lavoro cit. in [1]), dopo quello del MANIÀ.

dimenti analoghi a quelli di cui mi sono valso nello studio degli integrali doppi, e che si richiamano, ma solo in parte e con opportune modifiche, alla tecnica adoperata da Magenes [7]) per dimostrare uno dei teoremi di semicontinuità del Tonelli e dal Manià [8]) per lo studio del problema di minimo.

Alla dimostrazione della semicontinuità inferiore di $u_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, n$, è dedicato il n. 3, mentre il n. 4 è relativo alla semicontinuità del funzionale $\Phi[u_1(x), \ldots, u_n(x)]$; nei nn. 5 e 6 vengono stabiliti due teoremi di unicità e nei nn. 7 e 8 due teoremi di chiusura, mentre il n. 10 è dedicato al richiesto teorema di esistenza del minimo assoluto. Infine, nei nn. 1 e 2 vengono stabilite alcune ipotesi fondamentali e dei lemmi preliminari, mentre i nn. 9 e 11 sono dedicati ad osservazioni relative rispettivamente ai teoremi di chiusura e al teorema di minimo.

1. Ipotesi fondamentali. - Siano $f_i(x, y, y', u_1, \ldots, u_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$, n funzioni finite e continue, insieme alle loro derivate parziali $\dfrac{\partial f_i}{\partial y'}$, $i=1, 2, \ldots, n$, per ogni (x, y) di un campo A, ogni y' finito e ogni punto $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ appartenente ad un dominio rettangolare (limitato o non) D dello spazio ad n dimensioni, avente i lati paralleli agli assi coordinati.

Supporremo che le funzioni $f_i(x, y, y', u_1, \ldots, u_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$, siano tali da essere verificate le seguenti ipotesi:

a) detta R una costante positiva ed $\alpha_i=1, 2, \ldots, n$, n fissati numeri positivi sia:

$$(1.1)\quad \left\{\frac{f_i(x, y, y', u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k^{(1)}, u_{k+1}, \ldots, u_n)}{u_k^{(1)}-u_k^{(2)}} - \frac{f_i(x, y, y', u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k^{(2)}, u_{k+1}, \ldots, u_n)}{u_k^{(1)}-u_k^{(2)}}\right\} \leq$$

$$\leq R[1+|y'|^{1+\alpha_i}+|f_i(x, y, y', u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k^{(2)}, u_{k+1}, \ldots, u_n)|],$$

$$i, k=1, 2, \ldots, n,$$

---

[7]) Cfr. lavoro cit. in [5]), pp. 121-125.

[8]) Cfr. lavoro cit. in [1]), pp. 307-309.

per tutti i punti $(x, y) \in A$, per tutti i valori finiti di y' e per $(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k^{(1)}, u_{k+1}, \dots, u_n)$ e $(u_1, \dots, u_{k-1}, u_k^{(2)}, u_{k+1}, \dots, u_n)$ appartenenti a D, con $u_k^{(1)} > u_k^{(2)}$;

b) ciascuna funzione $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, è non decrescente rispetto a ciascuna variabile u_h, con $h \neq i$, per tutti i punti $(x, y) \in A$, per tutti i valori finiti di y' e per $(u_1, \dots, u_n)$ appartenente a D;

c) esista un numero N tale da aversi:

$$f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n) \geq N, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

per tutti i punti $(x, y) \in A$, per tutti i valori finiti di y' e per tutti i punti $(u_1, \dots, u_n)$ di D;

d) ad ogni parte limitata A' del campo A, possono sempre farsi corrispondere due numeri positivi, μ e Y_1, in modo che, per tutti i punti (x, y) di A', per tutti gli y' soddisfacenti alla disuguaglianza $|y'| \geq Y_1$ e per tutti i punti $(u_1, \dots, u_n)$ di D, risulti:

$$f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n) \geq \mu\, |y'|^{1+\alpha_i}, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1.3}$$

dove gli α_i, $i = 1, 2, \dots, n$, sono i numeri positivi fissati in a);

e) per qualsiasi punto (x, y) di A, per tutti i valori finiti di y' e per tutti i punti $(u_1, \dots, u_n)$ di D si abbia:

$$\begin{aligned} E_i(x, y, y'; y_1'; u_1, \dots, u_n) &= f_i(x, y, y_1', u_1, \dots, u_n) + \\ &- \left[f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n) + (y_1' - y') \frac{\partial}{\partial y'} f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n) \right] \geq 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

per $i = 1, 2, \dots, n$.

Osserviamo che, in base alle ipotesi c) e d), assegnata una parte limitata A' di A, per $(x, y) \in A'$, per tutti i valori finiti di y' e per tutti i punti $(u_1, \dots, u_n) \in D$, vale la disuguaglianza:

$$|y'|^{1+\alpha_i} < \frac{1}{\mu} f_i^*(x, y, y', u_1, \dots, u_n) + Y_1^{1+\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \tag{1.5}$$

in cui si è posto:

$$f_i^*(x, y, y', u_1, \dots, u_n) = f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n) + |N|, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{1.6}$$

2. Lemmi preliminari. - Cominciamo col provare che vale la seguente proposizione [9]:

2.-I. - *Se* $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$ *verifica le ipotesi* a), b), *e* c) *e se* D_1 *è un dominio rettangolare appartenente a* D *e definito dalle limitazioni*:

$$U_h \leq u_h \leq V_h, \qquad h = 1, 2, \dots, n,$$

comunque si assegnino due punti $(u_1^{(1)}, \dots, u_n^{(1)})$ *e* $(u_1^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})$ *di* D_1, *purchè tali che sia* $u_i^{(1)} \geq u_i^{(2)}$, *vale la seguente limitazione*:

$$(2.1) \quad f_i(x, y, y', u_1^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) \leq f_i(x, y, y', u_1^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})$$
$$+[(1+Rd)^n - 1]\cdot[1 + |y'|^{1+\alpha_i} + 2|N| + f_i(x, y, y', u_1^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})],$$

dove è

$$d = \left[\sum_{h=1}^{n} (V_h - U_h)^2\right]^{1/2}.$$

Cominciamo col rilevare che se è $h = i$ e $u_h^{(1)} > u_h^{(2)}$, in base alla (1.1) è:

$$(2.2) \quad f_i(x, y, y', u_1^{(1)}, \dots, u_h^{(1)}, u_{h+1}^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})$$
$$\leq f_i(x, y, y', u_1^{(1)}, \dots, u_{h-1}^{(1)}, u_h^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})$$
$$+ R(u_h^{(1)} - u_h^{(2)})[1 + |y'|^{1+\alpha_i} + |f_i(x, y, y', u_1^{(1)}, \dots, u_{h-1}^{(1)}, u_h^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})|],$$

da cui, tenuto conto dell'ipotesi c), segue:

$$(2.3) \quad f_i(x, y, y', u_1^{(1)}, \dots, u_h^{(1)}, u_{h+1}^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})$$
$$\leq f_i(x, y, y', u_1^{(1)}, \dots, u_{h-1}^{(1)}, u_h^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})$$
$$+ Rd[1 + |y'|^{1+\alpha_i} + 2|N| + f_i(x, y, y', u_1^{(1)}, \dots, u_{h-1}^{(1)}, u_h^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})].$$

---

[9]) Vogliamo espressamente rilevare che la proposizione 2.-I. sarà stabilità supponendo che $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$ verifichi soltanto le ipotesi a), b) e c) e che il lemma 2.-II. sarà stabilito supponendo che $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$ verifichi soltanto le ipotesi a), b), c) e d).

Sempre nel caso di $h = i$ se è $u_h^{(1)} = u_h^{(2)}$ la (2.3) è ovvia.

Sia, invece, $h \neq i$. Allora se è $u_h^{(1)} \leq u_h^{(2)}$, in base all'ipotesi b) è:

$$f_i(x, y, y', u_1^{(1)}, \dots, u_h^{(1)}, u_{h+1}^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})$$

$$\leq f_i(x, y, y', u_1^{(1)}, \dots, u_{h-1}^{(1)}, u_h^{(2)}, \dots, u_n^{(2)}),$$

mentre se è $u_h^{(1)} > u_h^{(2)}$, in base all'ipotesi a), vale la (2.2), per cui in ogni caso vale la (2.3). In conclusione possiamo dire che per $h = i$ o $h \neq i$ vale sempre la (2.3).

Tenuta presente la (2.3) scritta per $h = n, n - 1, \dots, 2, 1$, con calcoli elementari si perviene alla (2.1).

Una curva C di equazione:

$$y = y(x), \qquad a \leq x \leq b,$$

con a e b numeri reali, la diremo *ammissibile* se per $x \in (a, b)$ il punto $(x, y(x))$ appartiene ad A e la funzione $y(x)$ è assolutamente continua.

Vogliamo stabilire, ora, il seguente lemma:

2.-II. - *Supposto che per* $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$ *siano verificate le ipotesi* a), b), c) *e* d), *se* $u_h(x)$, $u_h^*(x)$, $h = 1, 2, \dots, n$, *sono funzioni quasi continue e limitate in un certo intervallo* (a, b), *e tali che qualunque sia* $x \in (a, b)$ *i punti* $(u_1(x), \dots, u_n(x))$ *e* $(u_1^*(x), \dots, u_n^*(x))$ *appartengono a* D *e sia inoltre* $u_i(x) \leq u_i^*(x)$, *allora per ogni curva* $C: y = y(x)$, *con* $y(x)$ *definita in* (a, b), *ammissibile e per la quale risulta sommabile in* (a, b) *la funzione* $f_i[x, y(x), y'(x), u_1(x), \dots, u_n(x)]$ *risulta (quasi continua e) sommabile in* (a, b) *anche la funzione* $f_i[x, y(x), y'(x), u_1^*(x), \dots, u_n^*(x)]$.

Dato che le $u_h(x)$ e $u_h^*(x)$, $h = 1, 2, \dots, n$, per $x \in (a, b)$ sono limitate saranno dotate di estremo inferiore e superiore finiti, per cui porremo:

$$U_h = \min [\text{estr. inf}_{(a, b)} u_h(x), \ \text{estr. inf}_{(a, b)} u_h^*(x)], \qquad h = 1, 2, \dots, n,$$

$$V_h = \max [\text{estr. sup}_{(a, b)} u_h(x), \ \text{estr sup}_{(a, b)} u_h^*(x)], \qquad h = 1, 2, \dots, n.$$

Allora per la proposizione 2.-I. abbiamo:

$$(2.4) \qquad f_i(x,\ y,\ y',\ u_1^*,\dots,\ u_n^*) \leq f_i(x,\ y,\ y',\ u_1,\dots,\ u_n)$$

$$+ [(1+Rd)^n - 1]\cdot[1 + |\, y'\,|^{1+\alpha_i} + 2\,|\, N\,| + f_i(x,\ y,\ y',\ u_1,\dots,\ u_n)]\,.$$

Ora, posto $\max_{(a,\, b)} |\, y(x)\,| = Y$, e considerato il rettangolo $T \equiv [a \leq x \leq b,\ -Y \leq y \leq Y]$, nella parte limitata $A' \equiv A \cap T$ vale la (1.5), per cui, tenuto conto di ciò, nonchè della (1.2), della (2.4) e della (1.6), abbiamo:

$$|\, f_i(x,\ y,\ y',\ u_1^*,\dots,\ u_n^*)\,| \leq |\, N\,| + f_i^*(x,\ y,\ y',\ u_1,\dots,\ u_n)$$

$$+ [(1+Rd)^n - 1]\cdot\left[1 + |\, N\,| + Y_1^{1+\alpha_i} + \frac{\mu+1}{\mu} f_i^*(x,\ y,\ y',\ u_1,\dots,\ u_n)\right],$$

da cui, tenuto presente che, essendo la $f_i[x,\ y(x),\ y'(x),\ u_1(x),\ \dots,\ u_n(x)]$ sommabile in $(a,\ b)$, tale è anche la $f_i^*[x,\ y(x),\ y'(x),\ u_1(x),\ \dots,\ u_n(x)]$, segue l'asserto.

3. Un teorema di semicontinuità. - Sia C una curva ammissibile, di equazione $y = y(x)$, e indichiamo con I il relativo intervallo $(a,\ b)$ in cui è definita $y(x)$, dove a e b sono numeri reali. Siano, poi, μ_i, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$, n numeri reali tali che il punto $M \equiv (\mu_1,\ \dots,\ \mu_n)$ appartenga a D. Consideriamo lo spazio di tutte le coppie $(C,\ M)$. Indicheremo con Ω tale spazio e con ω il suo generico elemento. Diremo *elemento ordinario* di Ω, ogni elemento $\omega \equiv (C,\ M)$ tale che il sistema differenziale:

$$(3.1) \quad u_i'(x) = f_i[x,\ y(x),\ y'(x),\ u_1(x),\dots,\ u_n(x)], \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

ammetta una soluzione costituita da una n-upla di funzioni $\{u_1(x),\ \dots,\ u_n(x)\}$ assolutamente continue in $(a,\ b)$, verificanti le relazioni:

$$(3.2) \qquad u_i(a) = \mu_i\,, \qquad i = 1,\ 2,\ \dots,\ n,$$

e tali che per tutti gli $x \in I \equiv (a,\ b)$ sia $(u_1(x),\ \dots,\ u_n(x)) \in D$. Rileviamo che le funzioni $u_i(x)$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$ possono considerarsi come dei funzionali dipendenti da ω; per porre in rilievo ciò una soluzione[10]) del sistema (3.1), (3.2) la indicheremo con la seguente n-upla di simboli $\{u_1(x;\omega), \ldots, u_n(x;\omega)\}$.

Considerata, ora, una classe $\mathfrak{C}$ di elementi ordinari di Ω, diremo che i funzionali $u_i(x;\omega)$, $i=1, 2, \ldots, n$, sono nella classe $\mathfrak{C}$, *uniformemente semicontinui inferiormente su un elemento* $\omega_0 \equiv (C_0, M_0)$, *della classe, con* $M_0 \equiv (\mu_{10}, \ldots, \mu_{n0})$, se, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, è possibile determinare un $\rho > 0$, in modo che per ogni elemento $\omega \equiv (C, M)$ di $\mathfrak{C}$ per il quale la curva C appartiene propriamente all'intorno[11]) (ρ) della C_0 e M e tale che

$$\mu_i - \mu_{i0} > -\rho, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{3.3}$$

indicati rispettivamente con $I \equiv (a, b)$ e $I_0 \equiv (a_0, b_0)$ gli intervalli in cui sono ammissibili C e C_0, si abbia[12]):

$$u_i(x;\omega) > u_i(x;\omega_0) - \varepsilon, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{3.4}$$

in tutti i punti $x \in (a, b) \cap (a_0, b_0)$,

$$u_i(x;\omega) > u_i(a_0;\omega_0) - \varepsilon, \qquad i=1, 2, \ldots, n, \tag{3.5}$$

---

10) Osserviamo che non è escluso che per un fissato elemento ordinario ω il sistema differenziale (3.1), (3.2) ammetta più di una soluzione. Vedremo, però, in seguito, precisamente nei nn. 5 e 6, che se le funzioni $f_i(x, y, y', u_1, \ldots, u_n)$, $i=1, 2, \ldots, n$, oltre a verificare le ipotesi a), b), c) e d) soddisfano anche all'ipotesi f) o g), indicate rispettivamente nei nn. 5 e 6, allora il sistema (3.1), (3.2) ammette una sola soluzione per ogni fissato elemento ordinario.

11) Assegnata una curva continua C si dice che un punto P *appartiene al suo intorno* (ρ) se appartiene ad almeno un cerchio, del piano della curva, avente il centro su di essa e raggio uguale a ρ. Si dice, poi, che un'altra curva C_1 *appartiene all'intorno* (ρ) *della* C se ogni punto della C_1 appartiene all'intorno (ρ) della C. Infine se C è aperta, e priva di punti multipli, si dice che un'altra curva continua e aperta C_1 *appartiene propriamente all'intorno* (ρ) *della* C se appartiene all'intorno (ρ) di questa curva, e se, inoltre, i suoi estremi, primo e secondo, appartengono rispettivamente ai cerchi di raggio ρ e aventi centro nel primo e nel secondo estremo della C. Per tali definizioni cfr. L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, vol. I, Ed. Zanichelli (1921), pag. 72.

12) Desideriamo esplicitamente segnalare che con la definizione ora posta s'intende che la semicontinuità inferiore di $u_i(x;\omega)$, $i=1, 2, \ldots, n$, è uniforme rispetto a x.

negli eventuali punti di (a, b) in cui sia $x < a_0$, e

$$u_i(x;\ \omega) > u_i(b_0;\ \omega_0) - \varepsilon, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3.6}$$

negli eventuali punti di (a, b) in cui sia $x > b_0$.

Per semplicità di notazione nel seguito indicheremo $u_i(x;\ \omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, e $u_i(x;\ \omega_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$ rispettivamente con $u_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, e $u_{i0}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, ragion per cui le (3.4), (3.5), (3.6) potranno anche scriversi rispettivamente così:

$$u_i(x) > u_{i0}(x) - \varepsilon, \tag{3.7}$$

$$u_i(x) > u_{i0}(a_0) - \varepsilon, \tag{3.8}$$

$$u_i(x) > u_{i0}(b_0) - \varepsilon, \tag{3.9}$$

tutte per $i = 1, 2, \dots, n$.

Ciò posto, ci proponiamo di dimostrare il seguente teorema:

3.-I. - *Le funzioni* $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, *siano tali da essere verificate le ipotesi* a), b), c), d) *ed* e), *allora i funzionali* $u_i(x;\ \omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, *sono, nella classe* $\mathcal{C}$, ***uniformemente semicontinui inferiormente su ogni elemento della classe stessa.***

Sia $\omega_0 \equiv (C_0, M_0)$, con $C_0 : y = y_0(x)$, per $x \in I_0 \equiv (a_0, b_0)$, e $M_0 \equiv (\mu_{10}, \dots, \mu_{n0}) \in D$, un qualunque fissato elemento di $\mathcal{C}$, faremo vedere che comunque si fissi un $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un $\rho > 0$ tale che, per tutti gli elementi $\omega \equiv (C, M)$ di $\mathcal{C}$, per i quali le curve C appartengono propriamente all'intorno (ρ) della C e $M \equiv (\mu_1, \dots, \mu_n)$ è tale da essere verificate le (3.3) valgono le (3.4), (3.5), (3.6), cioè, usando le notazioni semplificate, le (3.7), (3.8), (3.9).

Indichiamo con A_1' l'intorno (ρ_1), con $\rho_1 = 1$, della curva C_0, allora, in base all'ipotesi d), in corrispondenza di esso restano determinati una volta per tutte i numeri positivi μ e Y_1 ivi menzionati.

Poniamo: $Y_2 \equiv \max[Y_1^{1+\alpha_1}, \dots, Y_n^{1+\alpha_n}]$, essendo le α_i, $i = 1, 2, \dots, n$, le quantità figuranti nell'ipotesi a); $M_{i0} = \max_{I_0} u_{i0}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $m_{i0} = \min_{I_0} u_{i0}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, e, indicato con r un qualunque fissato numero reale $> \varepsilon$,

$$R_1 = \sum_{i=1}^{n} R[1 + (1 + r)R]^{i-1}, \tag{3.10}$$

dove R è la quantità figurante nell'ipotesi a).

Supponiamo, poi che $I_0 \equiv (a_0, b_0)$ sia tale da aversi:

$$M_{i0} - m_{i0} \leq \min\left[1, \frac{\mu}{6R_1(1+\mu)}\right], \qquad i=1, 2, \dots, n, \tag{3.11}$$

$$b_0 - a_0 \leq \frac{\mu}{6R_1[\mu + (2\mu+1)|N| + \mu Y_2]}, \tag{3.12}$$

dove μ e Y_2 sono i numeri di cui si è detto poc'anzi, N è la quantità figurante nell'ipotesi c) e R_1 è la quantità indicata in (3.10).

Osserviamo che basta dimostrare il teorema nel caso in l'intervallo (a_0, b_0) è tale da essere verificate le (3.11) e (3.12). In caso contrario si potrebbe sempre dividere l'intervallo (a_0, b_0) in un numero finito di intervalli per ciascuno dei quali fossero verificate le (3.11) e (3.12) e in tal modo C_0 risulterebbe divisa in un numero *finito* di archi. Dopo di che dal fatto che $u_i(x; \omega)$ è semicontinuo inferiormente su ciascuno degli archi in cui è stato decomposto C_0 seguirebbe la semicontinuità di $u_i(x; \omega)$ su tutta C_0.

Cominciamo col fare vedere che negli eventuali punti di (a, b) in cui sia $x < a_0$, per tutte le C di $\mathcal{C}$ appartenenti propriamente all'intorno (ρ) di C_0 e per M tale da essere verificate le (3.3) con ρ sufficientemente piccolo, vale la (3.8).

Invero, tenuta presente la (1.6), è

$$u_i(x) - u_{i0}(a_0) = \mu_i - \mu_{i0} + \int_a^x f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)dx$$

$$= \mu_i - \mu_{i0} + \int_a^x f_i^*(x, y, y', u_1, \dots, u_n)dx - |N|(x-a), \quad i=1, 2, \dots, n,$$

da cui negli eventuali punti x per i quali è $a \leq x < a_0$, tenuto conto delle (3.3), si ha:

$$u_i(x) - u_{i0}(a_0) > -\rho - |N|(a_0 - a) + \int_a^x f_i^*(x, y, y', u_1, \dots, u_n)dx,$$

$$i=1, 2, \dots, n,$$

donde per il fatto che $f_i^* \geq 0$ e, C appartenendo propriamente all'intorno (ρ) di C_0, è $a_0 - a \leq \rho$, segue:

$$u_i(x) - u_{i0}(a_0) > -\rho - |N|\rho, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

dove ρ può essere scelto in modo che si abbia la (3.8).

Proviamo, ora, che nei punti $x \equiv (a, b) \cap (a_0, b_0)$, per tutte le C di $\mathcal{C}$ appartenenti propriamente all'intorno (ρ) di C_0 e per M tale da essere verificate le (3.3), con ρ sufficientemente piccolo, si ha:

$$u_i(x) - u_{i0}(x) > -\frac{\varepsilon}{2}, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{3.13}$$

e quindi vale la (3.7).

Indicheremo con J l'insieme $(a, b) \cap (a_0, b_0)$.

Evidentemente se per $x \in J$ è $u_i(x) \geq u_{i0}(x)$ per qualche valore di i fra i numeri 1, 2, ..., n, la relativa (3.13) per quel valore di i è ovvia, allora ci resta da provare che le (3.13) valgono anche nel caso in cui è $u_i(x) < u_{i0}(x)$, per tutti gli i per cui ciò si verifica.

Indicheremo con E_i, $i = 1, 2, \dots, n$, l'insieme dei punti di J in cui è

$$u_i(x) < u_{i0}(x), \tag{3.14}$$

tale insieme può anche essere vuoto e ciò nel caso in cui non esistono punti di J in cui abbia a verificarsi la (3.14).

Nel caso in cui E_i, $i = 1, 2, \dots, n$, non è vuoto la differenza $u_{i0}(x) - u_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$ è positiva in E_i ed è ivi dotata di massimo; all'insieme E_i, $i = 1, 2, \dots, n$, associeremo il numero δ_i, $i = 1, 2, \dots, n$, così definito:

$$\delta_i \begin{cases} = \max_{E_i}(u_{i0}(x) - u_i(x)) & \text{se } E_i \text{ non è vuoto,} \\ = 0 & \text{se } E_i \text{ è vuoto,} \end{cases} \tag{3.15}$$

per $i = 1, 2, \dots, n$.

È ovvio che le (3.13) resteranno provate una volta che si è mostrato che per tutti gli $i = 1, 2, \dots, n$ è $\delta_i < \frac{\varepsilon}{2}$ e per questo basterà, naturalmente, provare che è $\delta_j < \frac{\varepsilon}{2}$, dove

j è un valore fra 1, 2, ..., n per il quale si ha:

$$\delta_i \leq \delta_j, \tag{3.16}$$

per tutti i valori di $i \neq j$.

Indichiamo con x' un punto di E_j in cui $u_{j0}(x) - u_j(x)$ assume il suo valore massimo δ_j. Faremo vedere che è:

$$u_j(x') - u_{j0}(x') > -\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.17}$$

Anzitutto, tenuta presente la (1.6), osserviamo che per $x \in J$ è:

$$\begin{aligned} u_i(x) - u_{i0}(x) &= \mu_i - \mu_{i0} \\ &+ \int_a^x f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)dx - \int_{a_0}^x f_i(x, y_0, y_0', u_{10}, \dots, u_{n0})dx \\ &= \mu_i - \mu_{i0} + \int_a^x f_i^*(x, y, y', u_1, \dots, u_n)dx \\ &- \int_{a_0}^x f_i^*(x, y_0, y_0', u_{10}, \dots, u_{n0})dx - |N|(a_0 - a) \\ &> -(|N| + 1)\rho + \int_{a_0}^x f_i^*(x, y, y', u_1, \dots, u_n)dx \\ &- \int_{a_0}^x f_i^*(x, y_0, y_0', u_{10}, \dots, u_{n0})dx, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Osserviamo, ora, che il minimo di J, se non è $a = a_0$, sarà ovviamente a oppure a_0, secondo che è $a_0 < a$ o $a < a_0$, in ogni caso tale minimo lo indicheremo con a'.

Tenuto conto della (3.18), abbiamo:

$$\begin{aligned} u_i(a') - u_{i0}(a') &> -\rho(1 + |N|) \\ + \int_a^{a'} f_i^*(x, y, y', u_1, \dots, u_n)dx &- \int_{a_0}^{a'} f_i^*(x, y_0, y_0', u_{10}, \dots, u_{n0})dx, \\ &\qquad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

da cui, se è $a \leq a_0 = a'$, tenuto conto che è $f^* \geq 0$, segue:

$$u_i(a') - u_{i0}(a') > -\rho(1 + |N|), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

mentre, se è $a_0 < a = a'$, tenuto presente che, C appartenendo all'intorno (ρ) di C_0, è $|a - a_0| \leq \rho$, per ρ sufficientemente piccolo è:

$$\int_{a_0}^{a} f_i^*(x, y_0, y_0', u_{10}, \ldots, u_{n0})dx < \frac{\varepsilon}{16}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

segue:

$$(3.19) \qquad u_i(a') - u_{i0}(a') > -\rho(1 + |N|) - \frac{\varepsilon}{16}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

quindi in ogni caso vale la (3.19), per cui se

$$\rho < \frac{\varepsilon}{16(1 + |N|)},$$

è:

$$(3.20) \qquad u_i(a') - u_{i0}(a') > -\frac{\varepsilon}{8}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se $x' = a'$, tenuta presente la (3.20), resta provata la (3.17), se invece è $x' > a'$, indichiamo con (x'', x') l'intorno sinistro più ampio, contenuto in (a', x') nei punti interni del quale è ancora $u_j(x) < u_{j0}(x)$. Se è $x'' > a'$ è $u_j(x'') = u_{j0}(x'')$, e se è $x'' = a'$ sarà $u_j(a') \leq u_{j0}(a')$, ma comunque sia, vale la (3.20), considerata per $i = j$, in ogni caso sarà dunque:

$$(3.21) \qquad u_j(x') - u_{j0}(x')$$

$$= u_j(x') - u_j(x'') - u_{j0}(x') + u_{j0}(x'') + u_j(x'') - u_{j0}(x'')$$

$$> -\frac{\varepsilon}{8} + \int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', u_1, \ldots, u_n)dx - \int_{x''}^{x'} f_j(x, y_0, y_0, u_{10}, \ldots, u_{n0})dx.$$

In virtù del lemma 2.-II., esistono gli integrali

$$\int_{x''}^{x'} f_j(x, y, y', u_{10}, \ldots, u_{i0}, u_{i+1}, \ldots, u_n)d\ , \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

per cui, tenuto conto della (3.21), abbiamo:

$$(3.22)\qquad u_j(x') - u_{j0}(x') > -\frac{\varepsilon}{8}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{x''}^{x'} \Big[f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i-1,0}, u_i, \dots, u_n)$$

$$- f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i,0}, u_{i+1}, \dots, u_n) \Big] dx$$

$$+ \int_{x''}^{x'} \Big[f_j(x, y, y', u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0}) - f_j(x, y_0, y_0', u_{10}, u_{20}, \dots, u_{n0}) \Big] dx.$$

L'ultimo integrale a secondo membro della (3.22), può essere reso $> -\frac{\varepsilon}{8}$ con un ragionamento analogo ad uno svolto dal Tonelli [13]), se ρ è sufficientemente piccolo; per cui dalla (3.22) stessa segue:

$$(3.23)\qquad u_j(x') - u_{j0}(x') > -\frac{\varepsilon}{4}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{x''}^{x'} \Big[f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i-1,0}, u_i, \dots, u_n)$$

$$- f_i(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i0}, u_{i+1}, \dots, u_n) \Big] dx.$$

Rileviamo ora che nel caso in cui è $i = j$, tenuto conto della (1.6) e della (1.1) per $i = j$, in tutto (x'', x') è:

$$(3.24)\qquad f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{j-1,0}, u_j, \dots, u_n)$$

$$- f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{j0}, u_{j+1}, \dots, u_n) \geq -R(u_{j0}(x) - u_j(x)) \cdot$$

$$\cdot [1 + |y'|^{1+\alpha_i} + |f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{j-1,0}, u_j, \dots, u_n)|];$$

---

[13]) Cfr. loco cit. in [11]), n. 155, pp. 400-406, e osservazione *b*) del n. 156, pag. 407. Seguendo il citato ragionamento si vede anche che l'ultimo integrale a secondo membro della (3.22) risulta $> -\frac{\varepsilon}{8}$, per ρ sufficientemente piccolo, uniformemente rispetto all'intervallo (x'', x'), cioè ρ risulta indipendente dall'intervallo (x'', x').

nel caso in cui è $i \neq j$, negli eventuali punti di (x'', x') non appartenenti a E_i, cioè in cui è $u_i(x) \geq u_{i0}(x)$, tenute presenti le (1.6) e la c), è:

$$f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i-1,0}, u_i, \dots, u_n)$$
$$- f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i0}, u_{i+1}, \dots, u_n) \geq 0,$$

per tutti i valori di $i \neq j$, mentre negli eventuali punti di (x'', x') appartenenti a E_i, tenute presenti le (1.6) e la (1.1), è:

$$f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i-1,0}, u_i, \dots, u_n)$$
$$- f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i0}, u_{i+1}, \dots, u_n) \geq - R(u_{i0}(x) - u_i(x)) \cdot$$
$$\cdot [1 + |y'|^{1+\alpha_j} + |f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i-1,0}, u_i, \dots, u_n)|],$$

per cui in ogni caso nei punti di (x'', x'), tenuto conto che vale la (3.16), abbiamo:

$$\begin{aligned} (3.25) \qquad & f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i-1,0}\ u_i, \dots, u_n) \\ & - f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i0}, u_{i+1}, \dots, u_n) \\ & \geq -R\delta_j[1 + |y'|^{1+\alpha_j} + |f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i-1,0}, u_i, \dots, u_n)|]. \end{aligned}$$

Tenendo presente la (3.24), abbiamo che la (3.25) vale in tutto (x'', x') e per tutti gli $i = 1, 2, \dots, n$.

Dalla (3.25), tenuto conto della (1.2), segue:

$$\begin{aligned} (3\ 26) \qquad & f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i-1,0}, u_i, \dots, u_n) \\ & - f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i0}, u_{i+1}, \dots, u_n) \\ \geq & - R\delta_j[1 + 2|N| + |y'|^{1+\alpha_j} + f_j(x, y, y', u_{10}, \dots, u_{i-1,0}, u_i, \dots, u_n)]. \end{aligned}$$

Supponiamo, ora per il momento, che in tutto J siano verificate le seguenti relazioni:

$$(3.27) \qquad u_i(x) \geq m_{i0} - r, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

dove r è il numero reale $> \varepsilon$ già fissato in precedenza, precisamente poco prima della (3.11); ciò supposto, con un ragionamento del tutto analogo a quello svolto per stabilire la (2.3) qualunque sia il valore h che ivi figura, abbiamo:

$$(3.28)\qquad \begin{aligned} & f_j(x,\ y,\ y',\ u_{10},\ldots,\ u_{k0},\ u_{k+1},\ldots,\ u_n) \\ & \leq f_j(x,\ y,\ y',\ u_{10},\ldots,\ u_{k-1,0},\ u_k,\ldots,\ u_n) + R(M_{k0} - m_{k0} + r)\cdot \\ & \cdot[1 + |\,y'\,|^{1+\alpha_j} + 2\,|\,N\,| + f_j(x,\ y,\ y',\ u_{10},\ldots,\ u_{k-1,0},\ u_k,\ldots,\ u_n)], \end{aligned}$$

per $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Tenuta presente la (3.28) scritta per $k=i-1,\ i-2,\ \ldots,\ 1$, nonchè la (3.11), analogamente a come si fa per ottenere dalla (2.3) la (2.1), abbiamo:

$$(3.29)\qquad \begin{aligned} & f_j(x,\ y,\ y',\ u_{10},\ldots,\ u_{i-1,0},\ u_i,\ldots,\ u_n) \\ & \leq f_j(x,\ y,\ y',\ u_1,\ldots,\ u_n) + [(1+R(1+r))^{i-1}-1]\cdot \\ & \cdot[1 + 2\,|\,N\,| + |\,y'\,|^{1+\alpha_j} + f_j(x,\ y,\ y',\ u_1,\ u_2,\ldots,\ u_n)]. \end{aligned}$$

Ora, tenuta presente la (3.29) e la (1.6), dalla (3.26) segue:

$$(3.30)\qquad \begin{aligned} & f_j(x,\ y,\ y',\ u_{10},\ldots,\ u_{i-1,0},\ u_i,\ldots,\ u_n) \\ & - f_j(x,\ y,\ y',\ u_{10},\ldots,\ u_{i0},\ u_{i+1},\ldots,\ u_n) \\ & \geq -R\delta_j \Big\{ 1 + 2\,|\,N\,| + |\,y'\,|^{1+\alpha_j} \\ & + f_j(x,\ y,\ y',\ u_1,\ldots,\ u_n) + [(1+(1+r)R)^{i-1}-1]\cdot \\ & \cdot[1+2|N|+|y'|^{1+\alpha_j} + f_j(x,\ y,\ y',\ u_1,\ldots,\ u_n)]\Big\} \\ & = -R(1+(1+r)R)^{i-1}\delta_j\Big[1 + |\,N\,| + |\,y'\,|^{1+\alpha_j} + \\ & \qquad + f_j^*(x,\ y,\ y',\ u_1,\ldots,\ u_n)\Big]. \end{aligned}$$

Ora, supposto $\rho < 1$, le curve C che appartengono all'intorno (ρ) di C_0, ovviamente appartengono all'insieme A_1' che è l'intorno (ρ_1), con $\rho_1 = 1$, di C_0, di cui è detto all'inizio della presente dimostrazione, per cui in base alla (1.5), dalla (3.30) segue:

$$(3.31)\qquad \begin{aligned} & f_j(x,\ y,\ y',\ u_{10},\ldots,\ u_{i-1,0},\ u_i,\ldots,\ u_n) \\ & - f_j(x,y,y',\ u_{10},\ldots,\ u_{i0},\ u_{i+1},\ldots,\ u_n) > -R(1+(1+r)R)^{i-1}\delta_j\cdot \\ & \cdot\left[1+|N|+Y_1^{1+\alpha_j}+\frac{\mu+1}{\mu}f_j^*(x,y,y',u_1,\ldots,u_n)\right]. \end{aligned}$$

Dalla (3.23), tenuta presente la (3.31) e ricordata l'espressione di R_1 data nella (3.10), nonchè tenuto conto del fatto che $f_j^* \geq 0$, segue:

$$u_j(x') - u_{jo}(x') > -\frac{\varepsilon}{4}$$

$$-R_1\delta_j\left[(1+|N|+Y^{1+\alpha_j})(b_0-a_0)+\frac{\mu+1}{\mu}\int_{x''}^{x'} f_j^*(x, y, y', u_1,\dots, u_n)dx\right]$$

$$>-\frac{\varepsilon}{4}-R_1\delta_j\left[(1+|N|+Y_1^{1+\alpha_j})(b_0-a_0)+\frac{\mu+1}{\mu}\int_{a}^{x'} f_j^*(x, y, y', u_1,\dots, u_n)dx\right],$$

di qui, tenuto presente che, per essere C appartenente all'intorno (ρ) di C_0, è $a \geq a_0 - \rho$ e che in ogni caso è $x' \leq b_0$, abbiamo:

$$u_j(x')-u_{jo}(x')>-\frac{\varepsilon}{4}+-R_1\delta_j\Big\{(1+|N|+Y^{1+\alpha_j})(b_0-a_0)$$

$$+\frac{\mu+1}{\mu}|N|(b_0-a_0+\rho)+\frac{\mu+1}{\mu}\int_{a_0}^{x'} f_j(x, y_0, y_0', u_{10},\dots, u_{n0})dx$$

$$+\frac{\mu+1}{\mu}\left[\int_{a}^{x'} f_j(x, y, y', u_1,\dots, u_n)dx-\int_{a_0}^{x'} f_j(x, y_0, y_0, u_{10},\dots, u_{n0})dx\right]\Big\}$$

$$=-\frac{\varepsilon}{4}-R_1\delta_j\left[\left(1+|N|\frac{2\mu+1}{\mu}+Y_1^{1+\alpha_j}\right)(b_0-a_0)+\frac{\mu+1}{\mu}|N|\rho\right.$$

$$\left.+\frac{\mu+1}{\mu}[u_j(x')-u_{jo}(x')]+\frac{\mu+1}{\mu}(\mu_{jo}-\mu_j)+\frac{\mu+1}{\mu}[u_{jo}(x')-\mu_{jo}]\right],$$

da cui, tenuto conto delle (3.3), segue:

$$\frac{\mu+R_1(\mu+1)\delta_j}{\mu}[u_j(x')-u_{jo}(x')]>-\frac{\varepsilon}{4}$$

$$-R_1\delta_j\left[\left(1+|N|\frac{2\mu+1}{\mu}+Y_1^{1+\alpha_j}\right)(b_0-a_0)\right.$$

$$\left.+\frac{\mu+1}{\mu}(1+|N|)\rho+\frac{\mu+1}{\mu}[u_{jo}(x')-\mu_{jo}]\right],$$

e tenuto presente che per essere:

$$\frac{\mu + R_1(\mu + 1)\delta_j}{\mu} > 1 \qquad \text{e} \qquad u_j(x') - u_{j0}(x') < 0,$$

è

$$u_j(x') - u_{j0}(x') > \frac{\mu + R_1(\mu + 1)\delta_j}{\mu}\,[u_j(x') - u_{j0}(x')],$$

segue:

$$u_j(x') - u_{j0}(x') > -\frac{\varepsilon}{4} \tag{3.32}$$

$$-R_1\delta_j\left[\left(1 + |N|\,\frac{2\mu + 1}{\mu} + Y_1^{1+\alpha_j}\right)(b_0 - a_0) + \frac{\mu + 1}{\mu}(1 + |N|)\rho + \frac{\mu + 1}{\mu}[u_{j0}(x') - \mu_{j0}]\right].$$

Ora, tenuto presente che è $u_{j0}(x') \leq M_{j0}$ e $\mu_{j0} \geq m_{j0}$, dalla (3.32) abbiamo:

$$u_j(x') - u_{j0} > -\frac{\varepsilon}{4}$$

$$-R_1\delta_j\left[\left(1 + |N|\,\frac{2\mu + 1}{\mu} + Y_1^{1+\alpha_j}\right)(b_0 - a_0) + \frac{\mu + 1}{\mu}(1 + |N|)\rho + \frac{\mu + 1}{\mu}(M_{j0} - m_{j0})\right],$$

da cui, tenute presenti le (3.11) e (3.12) e assunto ρ in modo che sia

$$\rho \leq \frac{\mu}{6(\mu + 1)(1 + |N|)R_1},$$

abbiamo:

$$u_j(x') - u_{j0}(x') > -\frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2}\delta_j,$$

cioè, ricordato che è $\delta_j = u_{j0}(x') - u_j(x')$, si ha:

$$-\delta_j > -\frac{\varepsilon}{4} - \frac{1}{2}\delta_j,$$

da cui ovviamente segue la (3.17).

Passiamo, ora, a far vedere che l'ipotesi espressa dalla (3.27) è effetivamente soddisfatta.

Anzitutto rileviamo che, in base alla (3.20), la (3.13) vale per $x = a'$ indipendentemente dal verificarsi della (3.27), e ciò per tutti i valori di i da 1 ad n.

Consideriamo, ora, una qualunque funzione $u_i(x)$; dal fatto che è

$$u_i(a') > u_{i0}(a') - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.33}$$

tenuto conto che

$$\frac{\varepsilon}{2} < r, \qquad m_{i0} \leq u_{i0}(x), \tag{3.34}$$

segue:

$$u_i(a') > m_{i0} - r. \tag{3.35}$$

Naturalmente la (3.35) vale per tutti i valori di i da 1 ad n.

Ora, tenuto presente che $u_i(x)$ è continua, in base alla (3.35) esisterà certamente un intorno destro di a' nei cui punti è

$$u_i(x) \geq m_{i0} - r. \tag{3.36}$$

Indichiamo con (a', x_i) il massimo intervallo appartenente ad J e nei cui punti è verificata la (3.36). Facciamo variare i fra i numeri $1, 2, \dots, n$, e indichiamo con x^* il più piccolo fra i numeri $x_1, x_2, \dots, x_n$; per $a' \leq x \leq x^*$ la (3.36) si verifica per tutti i valori di i da 1 ad n.

Rileviamo che, siccome in (a', x^*) vale la (3.36) per tutti i valori di i da 1 ad n, proprio in base a quanto or ora è stato dimostrato relativamente all'insieme J, si ha che in tutto (a', x^*) è

$$u_i(x) > u_{i0}(x) - \frac{\varepsilon}{2}, \qquad x \in (a', x^*), \tag{3.37}$$

per tutti i valori di i da 1 ad n.

Faremo, ora, vedere che l'intervallo (a', x^*) coincide con l'insieme J, dopo di che, per ciò che è stato detto poco più su relativamente alla natura dell'intervallo (a', x^*), resterà provato che la (3.27) vale in tutto J e per tutti i valori di i da 1 ad n.

Ragioneremo per assurdo. Supponiamo che (a', x^*) non coincida con J. In tal caso vuol dire che esistono dei punti di J nei quali per almeno un valore di i fra 1, 2, ..., n, si ha:

$$u_i(x) < m_{i0} - r. \tag{3.38}$$

Naturalmente ciò comporta che il punto x^* risulti interno ad J e che esista almeno un valore h fra i valori di i per i quali si verifica la (3.38) per il quale è:

$$u_h(x^*) = m_{h0} - r,$$

e ciò, tenuto conto delle (3.34), è in contrasto col fatto che in tutto (a', x^*) vale la (3.37) per tutti i valori di i, e quindi anche per $i = h$.

Di qui discende che (a', x^*) coincide con J. Dopo di che resta pienamente provata la (3.13) e quindi la (3.7).

Passiamo, infine, a provare che negli eventuali punti di (a, b) in cui sia $x > b_0$, per tutte le C di $\mathfrak{C}$ appartenenti propriamente all'intorno (ρ) di C_0 e per M tale da essere verificate le (3.3), con ρ sufficientemente piccolo, vale la (3.9).

Invero è:

$$u_i(x) - u_{i0}(b_0) = \mu_i - \mu_{i0} +$$

$$+ \int_a^x f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n) dx - \int_{a_0}^{b_0} f_i(x, y_0, y_0', u_{10}, \dots, u_{n0}) dx,$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

da cui negli eventuali punti x per i quali è $b_0 < x \leq b$, tenuta presente la (1.6), si ha:

$$u_i(x) - u_{i0}(b_0) = \mu_i - \mu_{i0}$$

$$+ \int_a^{b_0} f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n) dx - \int_{a_0}^{b_0} f_i(x, y_0, y_0', u_{10}, \dots, u_{n0}) dx$$

$$+ \int_{b_0}^{x} f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n) dx = u_i(b_0) - u_{i0}(b_0)$$

$$+\int_{b_0}^{x} f_i^*(x, y, y', u_1, \dots, u_n)dx - |N|(x-b_0), \qquad i=1, 2, \dots, n,$$

e di qui, per il fatto che $f_i^* \geq 0$ e, C appartenendo propriamente all'intorno (ρ) di C_0, è $b - b_0 \leq \rho$, segue:

$$(3.39) \qquad u_i(x) - u_{i0}(b_0 > u_i(b_0) - u_{i0}(b_0) - |N|\,\rho, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Ora, tenuto conto della (3.13) per $x = b_0$ e se $\rho < \frac{\varepsilon}{2\,|N|}$, dalla (3.39) segue subito la (3.9).

In tal modo il teorema 3.-I. risulta completamente dimostrato.

4. Un altro teorema di semicontinuità. - Vogliamo, qui, stabilire, per pura semplicità di esposizione nel seguito, un ulteriore teorema di semicontinuità.

Per questo facciamo qualche semplice premessa.

Sia $\Phi(u_1, \dots, u_n)$ una funzione definita in tutto lo spazio ad n dimensioni e indicati con $u_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$, i funzionali $u_i(x; \omega)$ definiti dal sistema differenziale (3.1), (3.2), consideriamo il funzionale:

$$(4.1) \qquad u(x; \omega) = \Phi[u_1(x), \dots, u_n(x)],$$

definito in una classe $\mathcal{C}$ in cui sono definiti $u_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$.

Intenderemo che relativamente al funzionale $u(x; \omega)$ sia stata data la medesima definizione di uniforme semicontinuità inferiore data per i funzionali $u_i(x; \omega)$, $i=1, 2, \dots, n$.

Vale il seguente teorema:

4.-I. - *Sia $\Phi(u_1, \dots, u_n)$ una funzione definita e continua in tutto lo spazio ad n dimensioni e sia non decrescente rispetto a ciascuna variabile, per ogni valore delle altre.*

Allora, se i funzionali $u_i(x)$, $i=1, 2, \dots, n$, sono uniformemente semicontinui inferiormente su ogni elemento della classe $\mathcal{C}$, il funzionale $u(x; \omega)$, definito nella (4.1), *è uniformemente semicontinuo inferiormente su ogni elemento della classe stessa.*

La dimostrazione è pressocchè ovvia e, quindi, ci dispensiamo dal riportarla [14]).

5. Un teorema di unicità. - Siano $f_i(x, y, y', u_1, ..., u_n)$, $i = 1, 2, ..., n$, n funzioni finite e continue per ogni (x, y) di un campo A, ogni y' finito e ogni punto $(u_1, ..., u_n)$ appartenente allo spazio ad n dimensioni, e verifichino le ipotesi a), b), c) e d); supporremo, inoltre, che esse verifichino la seguente ulteriore ipotesi:

f) ad ogni parte limitata A' del campo A, possono sempre farsi corrispondere, per ogni valore di i fra 1, 2, ..., n, due funzioni non negative $F_i(u_1, ..., u_n)$ e $G_i(u_1, ..., u_n)$, definite e continue in S_n, e un numero positivo Y_1', in modo che, per tutti i punti (x, y) di A', per tutti gli y' soddisfacenti alla disuguaglianza $|y'| \geq Y_1'$ e per tutti i punti $(u_1, ..., u_n)$ di S_n, risulti:

$$f_i(x, y, y', u_1, ..., u_n) \leq F_i(u_1, ..., u_n)|y'|^{1+\alpha_i} + G_i(u_1, ..., u_n), \tag{5.1}$$
$$i = 1, 2, ..., n,$$

dove gli α_i, $i = 1, 2, ..., n$, sono i numeri positivi fissati in a).

Vogliamo far vedere che nelle ipotesi poste sulle f_i, i funzionali $u_i(x; \omega)$, $i = 1, 2, ..., n$, sono univocamente determinati da ω. Precisamente vogliamo dimostrare il seguente teorema:

5.-I. - *Siano* $f_i(x, y, y', u_1, ..., u_n)$, $i = 1, 2, ..., n$, n *funzioni finite e continue per ogni punto* (x, y) *di un campo* A, *ogni* y' *finito e ogni punto* $(u_1, ..., u_n)$ *appartenente allo spazio ad* n *dimensioni e inoltre verifichino le ipotesi* a), b), c), d) *ed* f).

Allora se ω *è un qualunque elemento ordinario, il sistema differenziale* (3.1), (3.2) *ammette una sola soluzione.*

Il sistema differenziale (3.1), (3.2), per essere $\omega \equiv (C, M)$ elemento ordinario, ammette soluzione, e supponiamo per il

---

14) La dimostrazione del teorema 4.-I. è del tutto analoga a quella svolta per il teorema 5.-I. del primo lavoro citato in 6).

momento che ne ammetta due costituite dalle n-uple $\{u_1(x), \dots, u_n(x)\}$, $\{u_1^{(0)}(x), \dots, u_n^{(0)}(x)\}$, faremo vedere che, nelle ipotesi poste, esse coincidono, cioè in tutto $I \equiv (a, b)$, intervallo questo in cui è definita C, si ha:

$$u_i(x) \equiv u_i^{(0)}(x), \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{5.2}$$

Ora poniamo:

$$U_h = \min[\min_I u_h(x), \min_I u_h^{(0)}(x)] \qquad h = 1, 2, \dots, n, \tag{5.3}$$

$$V_h = \max[\max_I u_h(x), \max_I u_h^{(0)}(x)], \qquad h = 1, 2, \dots, n. \tag{5.4}$$

Indicata con $y = y(x)$ l'equazione di C, consideriamo le funzioni:

$$f_i[x, y(x), y'(x), u_1, \dots, u_n] = \varphi_i(x, u_1, \dots, u_n), \qquad i = 1, 2, \dots, n, \tag{5.5}$$

e osserviamo che esse risultano definite per $x \in I$, risultando quasi continue rispetto a x e continue rispetto a $(u_1, \dots, u_n)$ per quasi tutti gli $x \in I$.

Per dimostrare che in tutto I valgono le (5.2), basterà provare che, detti $(u_1^{(1)}, \dots, u_n^{(1)})$, $(u_1^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})$ due qualsiasi punti del dominio D_1 definito in 2.-I. e con U_h e V_h, $h = 1, 2, \dots, n$, definite dalle (5.3) e (5.4), esiste una funzione $\Psi(x)$ sommabile in I tale che per tutti gli $x \in I$, quando $u_i^{(1)} \neq u_i^{(2)}$, per le funzioni $\varphi_i(x, u_1, \dots, u_n)$ valgono le seguenti limitazioni:

$$[\varphi_i(x, u_1^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) - \varphi_i(x, u_1^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})](u_i^{(1)} - u_i^{(2)}) \leq \Psi(x) \sum_{k=1}^{n} (u_k^{(1)} - u_k^{(2)})^2, \qquad i = 1, 2, \dots, n. \tag{5.6}$$

Invero ciò stabilito, la validità delle (5.2) sarà conseguenza di un teorema di unicità per i sistemi differenziali ordinari stabilito da E. J. McSchane[15]).

---

15) E. J. McSHANE, *On the uniqueness of the solutions of differential equations*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 45 (1939), pp. 755-757.

Ed allora passiamo a stabilire le (5.6).

Anzitutto osserviamo che, essendo ω elemento ordinario, le funzioni $\varphi_i[x, u_1(x), \dots, u_n(x)]$, $i = 1, 2, \dots, n$, risultano sommabili in I, e, allora, per il lemma 2.-II. ne segue che anche le funzioni $\varphi_i(x, V_1, \dots, V_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, sono sommabili in I.

Notato, poi, che per la (1.2), è:

$$(5.7) \qquad |f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)| \leq f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n) + 2|N|, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

e tenuta presente l'ipotesi b), rileviamo che per ogni M appartenente a D_1 vale la limitazione:

$$(5.8) \qquad |\varphi_i(x, u_1, \dots, u_n)| \leq \varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, u_i, V_{i+1}, \dots, V_n) + 2|N|, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Intanto, essendo $U_i \leq u_i \leq V_i$, tenuta presente l'ipotesi a) è:

$$\varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, u_i, V_{i+1}, \dots, V_n) \leq \varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n)$$
$$+ R(V_i - U_i)[1 + |y'|^{1+\alpha_i} + |\varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n)|], \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

e tenuto conto di ciò dalla (5.8), ricordata la (5.7), otteniamo:

$$(5.9) \qquad |\varphi_i(x, u_1, \dots, u_n)|$$
$$\leq 2|N| + \varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n) + R(V_i - U_i) \cdot$$
$$\cdot \left[1 + |y'|^{1+\alpha_i} + 2|N| + \varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n)\right]$$
$$\leq [1 + R(V_i - U_i)] \cdot \Big[1 + |y'|^{1+\alpha_i} + 2|N|$$
$$+ \varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n)\Big], \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ora poniamo $\max_I |y(x)| = Y$ e detto T il rettangolo $[a \leq x \leq b, \ -Y \leq y \leq Y]$, consideriamo la parte limitata $A' \equiv A \cap T$. Ora in base all'ipotesi f), per tutti i punti $x \in I$, quindi per $(x, y(x)) \in A'$, e per tutti gli $|y'| \geq Y_1'$, abbiamo:

$$\begin{aligned}&\varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n)\\ &\leq F_i(V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n)\,|y'|^{1+\alpha_i} +\\ &+ G_i(V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n),\end{aligned}$$

mentre per tutti i punti $x \in I$ e per tutti gli $|y'| < Y_1'$, data la continuità di φ_i, esisterà un $N_1 > 0$ per il quale è:

$$\varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n) \leq N_1,$$

per cui in ogni caso per $x \in I$ è:

$$\begin{aligned}&\varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n)\\ &\leq N_1 + F_i(V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n)\,|y'|^{1+\alpha_i}\\ &+ G_i(V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n).\end{aligned} \tag{5.10}$$

Intanto, in A' valendo la (1.5), dalla (5.10) abbiamo:

$$\begin{aligned}&\varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n)\\ &\leq N_1 + G_i(V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n) +\\ &+F_i(V_1,\dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1},\dots, V_n)\left[Y_1^{1+\alpha_i}+\frac{1}{\mu}(\varphi_i(x, V_1,\dots, V_n)+|N|)\right],\\ &\qquad i=1, 2, \dots, n,\end{aligned}$$

e tenuta tale relazione presente, nonchè ancora una volta la (1.5), dalla (5.9) ricaviamo:

$$\begin{aligned}&|\varphi_i(x, u_1, \dots, u_n)| \leq [1 + R(V_i - U_i)]\cdot\\ &\cdot\Big\{1 + 2|N| + N_1 + G_i(V_1,\dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1},\dots, V_n)\\ &+ [1 + F_i(V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n)]\cdot\\ &\cdot\left[Y_1^{1+\alpha_i} + \frac{1}{\mu}(\varphi_i(x, V_1, \dots, V_n) + |N|)\right]\Big\},\\ &\qquad i=1, 2, \dots, n.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Ciò stabilito cominciamo col notare che è:

$$(5.12)\qquad \begin{aligned} &\varphi_i(x, u_1^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}) - \varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_n^{(2)}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \Big[\varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_{k-1}^{(2)}, u_k^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}) \\ &\qquad - \varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, u_{k+1}^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)})\Big], \end{aligned}$$

per $i = 1, 2, \ldots, n$, e prendiamo a considerare l'espressione ottenuta moltiplicando per $u_i^{(1)} - u_i^{(2)} \neq 0$ il termine generico della sommatoria a secondo membro della (5.12).

Consideriamo, anzitutto, il caso in cui è $u_i^{(1)} > u_i^{(2)}$. Ora se è $u_k^{(1)} > u_k^{(2)}$, in base all'ipotesi a) abbiamo:

$$\begin{aligned} &\varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_{k-1}^{(2)}, u_k^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}) - \varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, u_{k+1}^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}) \\ &\leq R(u_k^{(1)} - u_k^{(2)})[1 + |y'|^{1+\alpha_i} + |\varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, u_{k+1}^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)})|], \end{aligned}$$

mentre, se è $u_k^{(1)} \leq u_k^{(2)}$ con $k \neq i$, in base all'ipotesi b) abbiamo:

$$\varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_{k-1}^{(2)}, u_k^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}) - \varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, u_{k+1}^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}) \leq 0,$$

per cui in ogni caso è:

$$\begin{aligned} &\varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_{k-1}^{(2)}, u_k^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}) - \varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, u_{k+1}^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}) \\ &\leq R\,|u_k^{(1)} - u_k^{(2)}| \cdot [1 + |y'|^{1+\alpha_i} + |\varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, u_{k+1}^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)})|], \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad k, i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

donde ricaviamo:

$$(5.13)\qquad \begin{aligned} &\Big[\varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_{k-1}^{(2)}, u_k^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)}) \\ &\qquad - \varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, u_{k+1}^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)})\Big](u_i^{(1)} - u_i^{(2)}) \\ &\leq R(u_i^{(1)} - u_i^{(2)})\,|u_k^{(1)} - u_k^{(2)}|\Big[1 + |y'|^{1+\alpha_i} \\ &\qquad + |\varphi_i(x, u_1^{(2)}, \ldots, u_k^{(2)}, u_{k+1}^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)})|\Big], \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad k, i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Nel caso in cui è $u_i^{(1)} < u_i^{(2)}$ con ragionamento perfettamente analogo si ricava:

$$(5.14)\quad \Big|\varphi_i(x,\ u_1^{(2)},\dots,\ u_k^{(2)},\ u_{k+1}^{(1)},\dots,\ u_n^{(1)})$$

$$-\varphi_i(x,\ u_1^{(2)},\dots,\ u_{k-1}^{(2)},\ u_k^{(1)},\dots,\ u_n^{(1)})\Big](u_i^{(2)}-u_i^{(1)})$$

$$\leq R(u_i^{(2)}-u_i^{(1)})\,|\,u_k^{(1)}-u_k^{(2)}|\Big[1+|\,y'\,|^{1+\alpha_i}$$

$$+|\varphi_i(x,\ u_1^{(2)},\dots,\ u_{k-1}^{(2)},\ u_k^{(1)},\dots,\ u_n^{(1)})|\Big],$$

$$k,\ i=1,\ 2,\dots,\ n.$$

Tenute presenti le (5.13) e (5.14) abbiamo che in ogni caso per $u_i^{(1)} \neq u_i^{(2)}$ è:

$$\Big[\varphi_i(x,\ u_1^{(2)},\dots,\ u_{k-1}^{(2)},\ u_k^{(1)},\dots,\ u_n^{(1)})$$

$$-\varphi_i(x,\ u_1^{(2)},\dots,\ u_k^{(2)},\ u_{k+1}^{(1)},\dots,\ u_n^{(1)})\Big](u_i^{(1)}-u_i^{(2)})$$

$$\leq R\,|\,u_i^{(1)}-u_i^{(2)}|\,|\,u_k^{(1)}-u_k^{(2)}\,|\Big[1+|\,y'\,|^{1+\alpha_i}$$

$$+|\varphi_i(x,\ u_1^{(2)},\dots,\ u_{k-1}^{(2)},\ u_k^{(1)},\dots,\ u_n^{(1)})|+|\varphi_i(x,\ u_1^{(2)},\dots,\ u_k^{(2)},\ u_{k+1}^{(1)},\dots,\ u_n^{(1)})|\Big],$$

$$k,\ i=1,\ 2,\dots,\ n,$$

da cui, tenute presenti la (1.5) e la (5.11) segue:

$$\Big[\varphi_i(x,\ u_1^{(2)},\dots,\ u_{k-1}^{(2)},\ u_k^{(1)},\dots,\ u_n^{(1)})$$

$$-\varphi_i(x,\ u_1^{(2)},\dots,\ u_k^{(2)},\ u_{k+1}^{(1)},\dots,\ u_n^{(1)})\Big](u_i^{(1)}-u_i^{(2)})$$

$$\leq R[(u_i^{(1)}-u_i^{(2)})^2+(u_k^{(1)}-u_k^{(2)})^2]\,\cdot$$

$$\cdot\Big\{1+Y_1^{1+\alpha_i}+\frac{1}{\mu}(\varphi_i(x,\ V_1,\dots,\ V_n)+|\,N\,|)+2[1+R(V_i-U_i)]\,\cdot$$

$$\cdot\Big\{1+2\,|\,N\,|+N_1+G_i(V_1,\dots,\ V_{i-1},\ U_i,\ V_{i+1},\dots,\ V_n)$$

$$+[1+F_i(V_1,\dots,\ V_{i-1},\ U_i,\ V_{i+1},\dots,\ V_n)]\,\cdot$$

$$\cdot\Big[Y_1^{1+\alpha_i}+\frac{1}{\mu}(\varphi_i(x,\ V_1,\dots,\ V_n)+|\,N\,|)\Big]\Big\}\Big\},$$

da cui, ponendo:

$$\Psi(x) = R(n+1)\sum_{i=1}^{n} \Big\{ 1 + 2[1 + R(V_i - U_i)] \cdot \tag{5.15}$$

$$\cdot [1 + 2 \,|N|\, + N_1 + G_i(V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n)]$$

$$+ \{1 + 2[1 + R(V_i - U_i)][1 + F_i(V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_i, \dots, V_n)]\} \cdot$$

$$\cdot \left[Y_1^{1+\alpha_i} + \frac{1}{\mu}(\varphi_i(x, V_1, \dots, V_n) + |N|)\right] \Big\},$$

abbiamo:

$$\Big[\varphi_i(x, u_1^{(2)}, \dots, u_{k-1}^{(2)}, u_k^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) \tag{5.16}$$

$$- \varphi_i(x, u_1^{(2)}, \dots, u_k^{(2)}, u_{k+1}^{(1)}, \dots, u_n^{(1)})\Big](u_i^{(1)} - u_i^{(2)})$$

$$\leq \frac{\Psi(x)}{n+1}\left[(u_i^{(1)} - u_i^{(2)})^2 + (u_k^{(1)} - u_k^{(2)})^2\right].$$

Dalla (5.12), tenuta presente la (5.16), otteniamo:

$$\left[\varphi_i(x, u_1^{(1)}, \dots, u_n^{(1)}) - \varphi_i(x, u_1^{(2)}, \dots, u_n^{(2)})\right](u_i^{(1)} - u_i^{(2)})$$

$$\leq \frac{\Psi(x)}{n+1}\left[n(u_i^{(1)} - u_i^{(2)})^2 + \sum_{k=1}^{n}(u_k^{(1)} - u_k^{(2)})^2\right],$$

da cui, poichè ovviamente è

$$(u_i^{(1)} - u_i^{(2)})^2 \leq \sum_{k=1}^{n}(u_k^{(1)} - u_k^{(2)})^2,$$

segue la (5.6), dove la $\Psi(x)$, definita nella (5.15), è sommabile in I, dato che, come già abbiamo osservato, le $\varphi_i(x, V_1, \dots, V_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, risultano sommabili in I.

In tal modo il teorema 5.-I. resta pienamente dimostrato.

6. Un secondo teorema di unicità. - Supponiamo che per le funzioni $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, in luogo dell'ipotesi f), enunciata all'inizio del n. 5, sia verificata la seguente altra:

g) detta R' una costante non positiva sia:

$$\left\{\frac{f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_{i-1}, u_i^{(1)}, u_{i+1}, \dots, u_n)}{u_i^{(1)} - u_i^{(2)}} - \frac{f_i(x, y, y', u_1, \dots u_{i-1}, u_i^{(2)}, u_{i+1}, \dots, u_n)}{u_i^{(1)} - u_i^{(2)}}\right\} \geq \tag{6.1}$$

$$\geq R'[1 + |y'|^{1+\alpha_i} + |f_i(x, y, y', u_1, ., u_{i-1}, u_i^{(1)}, u_{i+1}, \dots, u_n)|],$$
$$i = 1, 2, \dots, n,$$

per tutti i punti $(x, y) \in A$, per tutti i valori finiti di y' e per $(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i^{(1)}, u_{i+1}, \dots, u_n)$ e $(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i^{(2)}, u_{i+1}, \dots, u_n)$ appartenenti ad S_n, con $u_i^{(1)} > u_i^{(2)}$ e dove le α_i, $i = 1, 2, \dots, n$, sono quelle fissate in a); allora vale il seguente teorema:

6.-I. - *Il teorema* 5.-I. *è ancora valido se in luogo dell'ipotesi* f) *è verificata l'ipotesi* g).

La dimostrazione non differisce, come impostazione, da quella svolta nel n. 5; per questo ci limiteremo a riportare quei punti di essa in cui v'è differenza da quella fatta nel caso in cui è verificata l'ipotesi f).

Anzitutto, come nel caso del teorema 5.-I. si perviene a stabilire la (5.9); indi, tenuto conto dell'ipotesi g), si ricava:

$$\varphi_i(x, V_1, \dots, V_n) - \varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n)$$
$$\geq R'(V_i - U_i)[1 + |y'|^{1+\alpha_i} + |\varphi_i(x, V_1, \dots, V_n)|],$$

da cui segue:

$$\varphi_i(x, V_1, \dots, V_{i-1}, U_i, V_{i+1}, \dots, V_n) \leq \varphi_i(x, V_1, \dots, V_n) + |R'|(V_i - U_i)[1 + |y'|^{1+\alpha_i} + |\varphi_i(x, V_1, \dots, V_n)|]. \tag{6.2}$$

Ora dalla (5.9), tenuto conto della (6.2), abbiamo:

$$|\varphi_i(x, u_1, \dots, u_n)| \leq [1 + R(V_i - U_i)] \Big\{ 1 + |y'|^{1+\alpha_i} + 2|N|$$
$$+ \varphi_i(x, V_1, \dots, V_n) + |R'|(V_i - U_i)[1 + |y'|^{1+\alpha_i} + 2|N|$$
$$+ \varphi_i(x, V_1, \dots, V_n)]\Big\} = [1 + R(V_i - U_i)] \cdot$$
$$\cdot [1 + |R'|(V_i - U_i)][1 + |y'|^{1+\alpha_i} + 2|N| + \varphi_i(x, V_1, \dots, V_n)],$$

da cui, tenuto presente che nella parte limitata A', definita nel corso della dimostrazione del teorema 5.-1, vale la (1.5), segue:

$$(6.3) \quad |\varphi_i(x, u_1, \ldots, u_n)| < [1 + R(V_i - U_i)][1 + |R'|(V_i - U_i)] \cdot$$

$$\cdot \left\{1 + 2|N| + \varphi_i(x, V_1, \ldots, V_n) + Y_1^{1+\alpha_i} + \frac{1}{\mu}[\varphi_i(x, V_i, \ldots V_n) + |N|]\right\},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ciò stabilito, la dimostrazione si svolge in maniera perfettamente identica a quella effettuata nel caso del teorema 5.-I., soltanto che presentemente anzichè tenere conto della (5.11) si terrà conto della (6.3).

7. Un teorema di chiusura. - Siano $f_i(x, y, y', u_1, \ldots, u_n)$ $i = 1, 2, \ldots, n$, le funzioni definite nel n. 1 e verificanti le ipotesi a), b), c), d) ed e), in cui però in luogo di D intenderemo tutto lo spazio S_n; supporremo, inoltre, che esse verifichino l'ipotesi f).

Indicheremo con $\mathfrak{F}$ la classe di tutti gli elementi ordinari $\omega \equiv (C, M)$, con M appartenente a S_n. Con $\mathfrak{F}'$ indicheremo una sottoclasse di $\mathfrak{F}$ per gli elementi della quale è:

$$(7.1) \qquad u_i(x; \omega) \leq \lambda_i, \qquad x \in I, \qquad i = 1, 2 \ldots, n,$$

dove λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sono n fissati numeri reali e $I \equiv (a, b)$ è l'intervallo in cui è definita C.

Diremo che l'elemento $\omega_0 \equiv (C_0, M_0)$ di Ω è di accumulazione per gli elementi $\omega \equiv (C, M)$ di $\mathfrak{F}'$, se la curva C_0 è di accumulazione per le curve C e M_0 è punto di accumulazione dei punti M.

Ci proponiamo, ora, di stabilire il seguente teorema di chiusura:

7.-I. - *Siano* $f_i(x, y, y', u_1, \ldots, u_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *n funzioni finite e continue insieme alle loro derivate parziali* $\frac{\partial f_i}{\partial y'}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *per ogni punto* (x, y) *di un campo* A, *ogni* y' *finito e per ogni punto* $(u_1, \ldots, u_n)$ *appartenente allo spazio ad* n *dimensioni e inoltre verifichino le ipotesi* a), b), c), d), e) *ed* f).

Allora i funzionali $u_i(x;\ \omega)$, $i=1, 2, \dots, n$, *definiti dal sistema differenziale* (3.1), (3.2) *sono uniformemente semicontinui inferiormente su ogni elemento della classe* $\mathfrak{F}$ *e ogni elemento* ω_0 *dello spazio* Ω *che sia di accumulazione per gli elementi di una sottoclasse* $\mathfrak{F}'$, *per gli elementi della quale è valida la* (7.1), *appartiene alla classe* $\mathfrak{F}$ *e le funzioni* $u_i(x;\ \omega_0)$, $i=1, 2, \dots, n$, *verificano la* (7.1).

Che i funzionali $u_i(x;\ \omega)$, $i=1, 2, \dots, n$, siano uniformemente semicontinui inferiormente su ogni elemento della classe $\mathfrak{F}$ discende immediatamente dal teorema 3.-I.

Passiamo ora a dimostrare la seconda parte della tesi del teorema. Per ciò, sia $\omega_0 \equiv (C_0, M_0)$ l'elemento dell'enunciato, dove C_0 ha equazione $y=y_0(x)$, con $y_0(x)$ definita in $I_0 \equiv (a_0, b_0)$, e cominciamo col far vedere che l'integrale

$$\int_{a_0}^{b_0} f_i(x, y_0, y_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)dx, \qquad i=1, 2, \dots, n, \tag{7.2}$$

esiste finito.

Per questo cominciamo col ricordare che per gli elementi ω di $\mathfrak{F}'$ valgono le (7.1), che, indicando per brevità $u_i(x;\ \omega)$ con $u_i(x)$, potremo anche scrivere così:

$$u_i(x) \leq \lambda_i, \qquad x \in I, \qquad i=1, 2, \dots, n,$$

da cui segue:

$$\mu_i + \int_a^x f_i(x, y\ y', u_1, \dots, u_n)dx \leq \lambda_i, \quad x \in I, \quad i=1, 2, \dots, n. \tag{7.3}$$

Ora sia $M_0 \equiv (\mu_{10}, \dots, \mu_{n0})$ e sia A_1 l'intorno ($\rho=1$) della curva C_0, ovviamente A_1 è limitato e indicheremo con l l'ampiezza del più piccolo intervallo dell'asse x cui appartengono le ascisse dei punti di A_1. Indichiamo, poi, con K l'intorno rettangolare di centro in M_0 e di semidimensione 1; ovviamente per il fatto che ω_0 è di accumulazione per gli elementi $\omega=(C, M)$ di $\mathfrak{F}'$, con $M \equiv (\mu_1, \dots, \mu_n)$, esistono infiniti M che appartengono a K, e per tali M è ovviamente:

$$\mu_i \geq \mu_{i0} - 1, \qquad i=1, 2, \dots, n.$$

Consideriamo la (7.3) scritta relativamente agli elementi $\omega \equiv (C, M)$ di $\mathfrak{F}'$ per i quali sia simultaneamente C appartenente ad A_1 e M appartenente propriamente a K, allora, in base a quanto abbiamo rilevato or ora, posto: $\gamma_i = \mu_{i0} - 1 - l\,|N|$, $i = 1, 2, \ldots, n$, abbiamo:

$$\gamma_i \leq u_i(x) \leq \lambda_i, \qquad x \in I, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.4}$$

Ora, in base alla proposizione 2.-I., e posto:

$$d = \left[\sum_{h=1}^{n} (\lambda_i - \gamma_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

abbiamo:

$$f_i(x, y, y' \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \leq f_i[x, y(x), y'(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)]$$

$$+ [(1+Rd)^n - 1][1 + |y'|^{1+\alpha_i} + 2|N| + f_i[x, y(x), y'(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)]],$$

$$i = 1, 2, \ldots, n,$$

da cui, poichè in A_1 vale la (1.5), abbiamo:

$$f_i(x, y, y', \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \tag{7.5}$$

$$< f_i[x, y(x), y'(x), u_1(x), \ldots, u_n(x))] + [(1 + Rd)^n - 1] \cdot$$

$$\cdot \left[1 + 2|N| + Y_1^{1+\alpha_i} + \frac{\mu+1}{\mu}(f_i[x, y(x), y'(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)] + |N|)\right],$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Dalla (7.5), integrando nell'intervallo $I \equiv (a, b)$, abbiamo:

$$\int_a^b f_i(x, y, y', \lambda_1, \ldots, \lambda_n) dx < u_i(b) - \mu_i$$

$$+ [(1+Rd)^n - 1] \left\{ \left[1 + \frac{3\mu+1}{\mu}|N| + Y_1^{1+\alpha_i}\right] l + \frac{\mu+1}{\mu}[u_i(b) - \mu_i] \right\},$$

da cui, tenuto conto della (7.4), segue:

$$\int_a^b f_i(x, y, y', \lambda_1, \ldots, \lambda_n)dx < \lambda_i - \gamma_i$$

$$+ [(1+Rd)^n - 1] \left\{ \left[1 + \frac{3\mu + 1}{\mu} \mid N \mid + Y_1^{1+\alpha_i} \right] l + \frac{\mu + 1}{\mu} (\lambda_i - \gamma_i) \right\},$$

per $i = 1, 2, \ldots, n$, cioè in altri termini:

$$\int_a^b f_i(x, y, y', \lambda_1, \ldots, \lambda_n)dx < L, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{7.6}$$

per tutte le curve C di A_1 e con L numero fissato. Orbene, tenuto conto delle ipotesi c), d) ed e), possiamo affermare che l'integrale indicato nella (7.2) esiste finito, altrimenti con un ragionamento non dissimile ad uno svolto da Tonelli [16]) sull'estensione all'infinito della semicontinuità inferiore degli integrali semplici ordinari, sia pure opportunamente variato in qualche punto, si potrebbe determinare un $\rho > 0$, in modo che per ogni elemento ω di $\mathfrak{F}$ con C appartenente propriamente all'intorno (ρ) di C_0 si avrebbe:

$$\int_a^b f_i(x, y, y', \lambda_1, \ldots, \lambda_n)dx > L, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

e ciò sarebbe in contrasto col fatto che esiste l'intorno A_1 di C_0 per le curve del quale è verificata la (7.6).

Ciò provato facciamo vedere che l'elemento ω_0 appartiene alla classe $\mathfrak{F}$.

Consideriamo il dominio rettangolare D' definito dalle seguenti limitazioni:

$$\gamma_i \leq u_i \leq \lambda_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

sia, poi, $D_{p,q,r}$ un dominio rettangolare definito da limita-

[16]) Cfr. loco cit. in [11]), nn. 170-171, pp. 443-449.

zioni del seguente tipo:

$$u_{i_h} < \gamma_{i_h}, \quad h = 1, 2, \dots, p, \qquad \lambda_{s_h} < u_{s_h}, \quad h = 1, 2, \dots, r,$$

$$\gamma_{j_h} \leq u_{j_h} \leq \lambda_{j_h}, \qquad h = 1, 2, \dots, q,$$

dove i_h, j_h, s_h sono numeri distinti fra loro e scelti fra $1, 2, \dots, n$, e inoltre è $p + q + r = n$ e mai simultaneamente $p = q = 0$.

Definiamo, quindi, la funzione $f_i^{(1)}(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, continua per ogni $(x, y) \in A$, per tutti i valori finiti di y' e per tutti gli $(u_1, \dots, u_n)$ di S_n, al seguente modo:

$f_i^{(1)}(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$ nei punti di D' è uguale a $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$,

$f_i^{(1)}(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$ nei punti di ogni dominio $D_{p,q,r}$ è uguale al valore che assume $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$ sostituendo γ_{i_h} a u_{i_h}, $h = 1, 2, \dots, p$, λ_{s_h} a u_{s_h}, $h = 1, 2, \dots, r$ e rimanendo inalterate le u_{j_h}, $h = 1, 2, \dots, q$.

Non è difficile vedere che la funzione $f_i^{(1)}(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, verifica le ipotesi a), b), c), d), e) ed f).

La funzione di $x, u_1, \dots, u_n$, $f_i^{(1)}[x, y_0(x), y_0'(x), u_1, \dots, u_n]$, $i = 1, 2, \dots, n$, ottenuta componendo la funzione $f_i^{(1)}(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, con le funzioni $y_0(x)$ e $y'_0(x)$ è definita nello strato

$$S: \qquad x \in (a_0, b_0), \qquad |u_i| < +\infty, \qquad i = 1, 2, \dots, n,$$

ed è ivi quasi continua rispetto a x e continua rispetto a $(u_1, \dots, u_n)$ per quasi tutti gli x di $I_0 \equiv (a_0, b_0)$.

Rileviamo, ora, che per il modo stesso col quale è definita la funzione $f_i^{(1)}(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$ i valori di $f_i^{(1)}[x, y_0(x), y_0'(x), u_1, \dots, u_n]$, per ogni fissato $x \in I_0$, qualunque sia il punto $(u_1, \dots, u_n)$ di S_n, sono dati dai valori assunti da $f_i[x, y_0(x), y_0'(x), u_1, \dots, u_n]$ in D'. Tenuto conto di ciò, in base alla proposizione 2.-I., abbiamo:

$$f_i^{(1)}[x, y_0(x), y_0'(x), u_1, \dots, u_n] \leq f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \dots, \gamma_n)]$$
$$+ [(1 + Rd)^n - 1]\Big[1 + |y_0|^{1+\alpha_i} + 2|N| + f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \dots, \gamma_n]\Big],$$
$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Tenuto presente ciò, nonchè la (5.7), che ovviamente vale anche per $f_i^{(1)}$, $i=1, 2, \dots, n$, abbiamo:

$$(7.7) \qquad |f_i^{(1)}[x, y_0(x), y_0'(x), u_1, \dots, u_n]|$$
$$\leq (1+Rd)^n[1+|y_0'|^{1+\alpha_i}+2|N|+f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \dots, \gamma_n]],$$
$$i=1, 2, \dots, n.$$

Ora poniamo $\max_{I_0}|y_0(x)|=Y_0$ e detto T_0 il rettangolo $[a_0 \leq x \leq b_0, \; -Y_0 \leq y \leq Y_0]$ consideriamo la parte limitata $A'' \equiv A \cap T_0$. In base all'ipotesi f) e con un ragionamento analogo a quello svolto per stabilire la (5.10) abbiamo che per tutti gli $x \in I_0$ è:

$$(7.8) \qquad f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \dots, \gamma_n]$$
$$\leq N_1 + F_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n)|y_0'|^{1+\alpha_i} + G_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n),$$
$$i=1, 2, \dots, n,$$

dove N_1 è un opportuno numero positivo.

Dalla (7.7), tenuto conto della (7.8), abbiamo:

$$|f_i^{(1)}[x, y_0(x), y_0'(x), u_1, \dots, u_n]|$$
$$\leq (1+Rd)^n\Big[1+N_1+2|N|+G_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n)+[1+F_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n)]|y_0'|^{1+\alpha_i}\Big],$$

per $i=1, 2, \dots, n$, da cui, dato che in A'' vale la (1.5), segue:

$$(7.9) \qquad |f_i^{(1)}[x, y_0(x), y_0(x), u_1, \dots, u_n]|$$
$$< (1+Rd)^n\Big\{1+N_1+2|N|+G_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$
$$+[1+F_i(\gamma_1, \dots, \gamma_n)]\Big[\frac{1}{\mu}f_i^*(x, y_0, y_0', \lambda_1, \dots, \lambda_n)+Y_1^{1+\alpha_i}\Big]\Big\},$$
$$i=1, 2, \dots, n.$$

Ora, poichè, esistendo finito l'integrale indicato in (7.2), la funzione non negativa

$$f_i^*(x, y_0, y_0', \lambda_1, \dots, \lambda_n) = f_i(x, y_0, y_0', \lambda_1, \dots, \lambda_n) + |N|$$

risulta sommabile in $I_0 \equiv (a_0, b_0)$, si deduce che anche la funzione non negativa a secondo membro della (7.9) risulta sommabile in $I_0 \equiv (a_0, b_0)$.

Da tutto quanto or ora abbiamo esposto ricaviamo che le funzioni $f_i^{(1)}[x, y_0(x), y_0'(x), u_1, \dots, u_n]$, $i=1, 2, \dots, n$, verificano nello strato S le ipotesi di Carathéodory, per cui vale il teorema di esistenza per il sistema differenziale:

$$(7.10)\quad \begin{cases} u_i'(x)=f_i^{(1)}[x, y_0(x), y_0'(x), u_1(x), \dots, u_n(x)], & x \in I_0, \\ u_i(a_0)=\mu_{i0}, \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, n,$$

e, inoltre, in base al teorema 5.-I., possiamo affermare che tale sistema differenziale ammette una sola soluzione.

Consideriamo ora la classe $\mathfrak{F}_1$ degli elementi ordinari relativamente al sistema differenziale costituito dalle equazioni:

$$u_i'(x) = f_i^{(1)}[x, y(x), y'(x), u_1(x), \dots, u_n(x)], \qquad x \in I, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

e dalle (3.2). Una soluzione di tale sistema la indicheremo ancora con $\{u_1(x; \omega), \dots, u_n(x; \omega)\}$. Rilevato che $f_i^{(1)}$, $i=1, 2, \dots, n$, verifica le ipotesi a), b), c), d) ed e), in base al teorema 3.-I. discende che i funzionali $u_i(x; \omega)$, $i=1, 2, \dots, n$ sono uniformemente semicontinui inferiormente su ogni elemento di $\mathfrak{F}_1$ e quindi anche su ω_0. Ora, poichè l'elemento ω_0 è di accumulazione per gli elementi ω di $\mathfrak{F}'$ per i quali è sempre verificata la (7.1), per la citata uniforme semicontinuità inferiore di $u_i(x; \omega)$, $i=1, 2, \dots, n$, si ha che per le $u_i(x; \omega_0)$, $i=1, 2, \dots, n$, costituenti la soluzione $\{u_1(x; \omega_0), \dots, u_n(x; \omega_0)\}$ del sistema differenziale (7.10), si ha:

$$(7.11)\qquad u_i(x; \omega_0) \leq \lambda_i, \qquad x \in I_0, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Anzi, tenuto conto dell'ipotesi c) e delle (7.11), abbiamo anche:

$$\gamma_i < \mu_{i0} - l\,|N| \leq u_i(x; \omega_0) \leq \lambda_i, \qquad x \in I_0, \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Ciò permette di concludere che la n-upla $\{u_1(x; \omega_0), \dots, u_n(x; \omega_0)\}$ è soluzione del sistema differenziale (3.1), (3.2), quindi l'elemento ω_0 appartiene alla classe $\mathfrak{F}$.

In tal modo la dimostrazione del teorema 7.-I. resta completamente svolta.

8. Un secondo teorema di chiusura. - Come per il caso del teorema di unicità vogliamo far vedere in questo numero che se le funzioni $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, verificano l'ipotesi g) in luogo di quella f), il teorema di chiusura stabilito nel n. 7 è ancora valido.

Precisamente sussiste il seguente teorema:

8.-I. - *Siano* $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, n *funzioni per le quali sono verificate tutte le ipotesi del teorema* 7.-I. *ad esclusione dell'ipotesi* f), *in luogo della quale è verificata l'ipotesi* g).

Allora i funzionali $u_i(x; \omega)$, $i = 1, 2, \dots, n$, *definiti dal sistema differenziale* (3.1), (3.2) *sono uniformemente semicontinui inferiormente su ogni elemento della classe* $\mathfrak{F}$ *e ogni elemento* ω_0 *dello spazio* Ω *che sia di accumulazione per gli elementi di una sottoclasse* $\mathfrak{F}'$, *per gli elementi della quale è valida la* (7.1), *appartiene alla classe* $\mathfrak{F}$ *e le funzioni* $u_i(x; \omega_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$, *verificano la* (7.1).

Come per il caso del teorema 6.-I., osserviamo che la dimostrazione, come impostazione, non differisce da quella svolta nel n. 7; per questo ci limiteremo a riportare quei punti in cui v'è differenza da quella fatta nel caso del teorema 7.-I.

Anzitutto si stabilisce la (7.7) in maniera perfettamente analoga a quella svolta nel caso del teorema 7.-I.; indi si procede alla maggiorazione di $f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \dots, \gamma_n]$, in maniera diversa da quella svolta in precedenza. Invero, in base alla (6.1) dell'ipotesi g), è:

$$\begin{gathered} f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \lambda_i, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n] \\ - f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \dots, \gamma_n] \geq R'(\lambda_i - \gamma_i) \cdot \\ \cdot [1 + |y_0'|^{1+\alpha_i} + | f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \lambda_i, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n] |], \end{gathered}$$

da cui segue:

$$\begin{gathered} f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \dots, \gamma_n)] \\ \leq f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \lambda_i, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n] + | R' | (\lambda_i - \gamma_i) \cdot \\ \cdot [1 + |y_0'|^{1+\alpha_i} + | f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \dots, \gamma_{i-1}, \lambda_i, \gamma_{i+1}, \dots, \gamma_n] |]. \end{gathered} \tag{8.1}$$

Dalla (7.7), tenuto conto della (8.1), abbiamo:

$$(8.2) \qquad | f_i^{(1)}[x, y_0(x), y_0'(x), u_1, \ldots, u_n] | \leq (1 + Rd)^n \cdot$$

$$\cdot \Big\{ 1 + | y_0' |^{1+\alpha_i} + 2 | N | + f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \lambda_i, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n]$$

$$+ | R' | d \Big[1 + | y_0' |^{1+\alpha_i} + 2 | N |$$

$$+ f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \lambda_i, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n] \Big] \Big\}$$

$$= (1 + Rd)^n (1 + | R' | d) \Big[1 + 2 | N | + | y_0' |^{1+\alpha_i}$$

$$+ f_i[x, y_0(x), y_0'(x) \; \gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \lambda_i, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n] \Big].$$

Ora, in base alla proposizione 2.-I., abbiamo:

$$f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \lambda_i, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n]$$

$$\leq f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \lambda_1, \ldots, \lambda_n] + [(1 + Rd)^n - 1)] \cdot$$

$$\cdot [1 + | y_0' |^{1+\alpha_i} + 2 | N | + f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \lambda_1, \ldots, \lambda_n]],$$

tenuto conto di ciò, dalla (8.2) segue:

$$| f_i^{(1)}[x, y_0(x), y_0'(x), u_1, \ldots, u_n] | \leq (1 + | R' | d)(1 + Rd)^{2n} \cdot$$

$$\cdot [1 + | y_0' |^{1+\alpha_i} + 2 | N | + f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \lambda_1, \ldots, \lambda_n]],$$

da cui, tenuto presente che nella parte limitata A'', definita nel corso della seconda parte della dimostrazione del teorema 8.-I., vale la (1.5), segue:

$$| f_i^{(1)}[x, y_0(x), y_0'(x), u_1, \ldots, u_n] |$$

$$< (1 + | R' | d)(1 + Rd)^{2n} \Big\{ 1 + 2 | N | + f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \lambda_1, \ldots, \lambda_n]$$

$$+ Y_1^{1+\alpha_i} + \frac{1}{\mu} \Big[f_i[x, y_0(x), y_0'(x), \lambda_1, \ldots, \lambda_n] + | N | \Big] \Big\},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Di qui la dimostrazione prosegue e si conclude in maniera perfettamente identica a quella svolta, a partire dalla (7.9), nel caso del teorema 7.-I.

9. Osservazione. - Vogliamo esplicitamente rilevare che nel caso in cui le funzioni $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, anzichè essere definite per ogni punto $(u_1, \dots, u_n)$ appartenente allo spazio ad n dimensioni, sono definite per ogni punto $(u_1, \dots, u_n)$ con u_i, $i = 1, 2, \dots, n$, appartenente all'intervallo $(-\infty, \lambda_i')$, $i = 1, 2, \dots, n$, dove λ_i' può essere indifferentemente un fissato numero reale o $+\infty$, si possono ancora stabilire dei teoremi analoghi ai teoremi 5.-I., 6.-I.. 7.-I. e 8.-I.

10. Teorema di minimo. - Indichiamo con A_0 un campo tutto contenuto in una striscia a lati paralleli all'asse y. Siano $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, n funzioni finite e continue insieme alle loro derivate parziali $\dfrac{\partial f_i}{\partial y'}$, $i = 1, 2, \dots, n$, per ogni (x, y) del campo A_0, ogni y' finito e ogni punto $(u_1, \dots, u_n)$ dello spazio ad n dimensioni.

Indicato, poi, con D_1' un insieme chiuso e limitato dello spazio ad n dimensioni, considereremo elementi ordinari $\omega' \equiv (C, M')$, con M' appartenente a D_1' e diremo che una classe $\mathfrak{F}^*$ di elementi ordinari ω' è *chiusa* se ad essa appartengono tutti gli elementi ordinari ω' che siano di accumulazione per gli elementi ordinari di $\mathfrak{F}^*$, dove la definizione di elemento di accumulazione è quella data all'inizio del n. 7.

Indicheremo con $u_i(x; \omega')$, $i = 1, 2, \dots, n$, i funzionali definiti dal sistema differenziale (3.1), (3.2) in una certa classe chiusa $\mathfrak{F}^*$ di elementi ordinari. Assegnata la funzione $\Phi(u_1, \dots, u_n)$ definita e continua in tutto lo spazio ad n dimensioni e considerato il funzionale:

$$u(x; \omega') = \Phi[u_1(x; \omega'), \dots, u_n(x; \omega')],$$

definito nella classe $\mathfrak{F}^*$ e detto (a, b) l'intervallo nel quale è definita C, ci proponiamo di trovare sotto quali condizioni esiste in $\mathfrak{F}^*$ il minimo assoluto di $u(b; \omega')$.

Vale il seguente teorema di minimo assoluto:

10.-I. - *Sia $\Phi(u_1, \dots, u_n)$ una funzione definita e continua in tutto lo spazio ad n dimensioni e non decrescente rispetto* *a ciascuna variabile, per ogni valore delle altre; inoltre sia*:

$$(10.1)\qquad \lim_{u_1+\dots+u_n \to +\infty} \Phi(u_1, \dots, u_n) = +\infty .$$

Siano $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i=1, 2, \dots, n$, *n funzioni finite e continue insieme alle loro derivate parziali* $\frac{\partial f_i}{\partial y'}$, $i=1, 2, \dots, n$, *per ogni* (x, y) *del campo* A_0, *per ogni* y' *finito e per ogni punto* $(u_1, \dots, u_n)$ *dello spazio ad n dimensioni; tali funzioni verifichino, inoltre, le ipotesi* a), b), c), d), e), *nonchè l'ipotesi* f) *o l'ipotesi* g).

Allora, se $\mathfrak{F}^*$ *è una classe chiusa (non vuota) di elementi ordinari* $\omega' \equiv (C, M')$ *tali che,* M' *non esca dall'insieme* D_1' *e* C *abbia almeno un punto appartenente ad un assegnato insieme chiuso e limitato, esiste in* $\mathfrak{F}^*$ *il minimo assoluto di* $u(b;\, \omega')$, *dove* b *indica l'estremo destro, eventualmente variabile con* C, *dell'intervallo in cui è definita* C.

Tenuto conto del teorema 7.-I. o 8.-I., secondochè è verificata l'ipotesi f) o g), nonchè del teorema 4.-I, la dimostrazione del teorema 10.-I. si consegue con i soliti ragionamenti effettuati dal Tonelli per il caso dell'esistenza del minimo nei problemi di estremi liberi in forma ordinaria [17]), ragion per cui si esimiamo dal riportarla.

11. Altra osservazione. - Consideriamo il gruppo di numeri 1, 2, ..., n suddiviso in due gruppi $i_1, i_2, \dots, i_p$ e $j_1, j_2, \dots, j_{n-p}$, tali che $i_1 < i_2 < \dots < i_p$ e $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-p}$. Siano λ'_{i_k}, $k=1, 2, \dots, p$, p fissati numeri reali e indichiamo con D_2 il dominio definito dalle limitazioni del seguente tipo:

$$u_{i_k} \leq \lambda'_{i_k},\ k=1, 2,\dots, p, \qquad |u_{j_k}| < +\infty,\ k=1, 2,\dots, n-p.$$

Supponiamo, ora, che le funzioni $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i=1, 2, \dots, n$, anzichè essere definite per ogni punto $(u_1, \dots, u_n)$ dello spazio S_n, siano definite per ogni punto $(u_1, \dots, u_n)$ del

---

17) Cfr. loco cit. in 11), vol. II, n. 86, pp. 282-286, n. 90 *a*), *b*), *c*), pp. 307-311.

dominio D_2. In tal caso il teorema 10.-I. è ancora valido, anzi, ed è ciò che vogliamo rilevare, esso sussiste anche se, ferme restando tutte le ipotesi ivi poste, in luogo della (10.1) è verificata la seguente altra ipotesi:

$$\lim_{u_{j_1}+\dots+u_{j_{n-p}}\to+\infty} \Phi(u_1 \dots, u_n) = +\infty,$$

per ogni fissato punto $(u_{i_1}, \dots, u_{i_p})$.

Naturalmente nella dimostrazione del teorema presentemente si dovrà tenere conto di quanto è stato osservato al n. 9.

Infine se le $f_i(x, y, y', u_1, \dots, u_n)$, $i=1, 2, \dots, n$, sono definite per ogni punto $(u_1, \dots, u_n)$ di un dominio definito da limitazioni del seguente tipo:

$$u_i \leq \lambda_i', \qquad i=1, 2, \dots, n,$$

con λ_i', $i=1, 2, \dots, n$, fissati numeri reali, il teorema 10.-I. è ancora valido, potendosi, anzi, fare a meno dell'ipotesi (10.1). Anche in questo caso, nella dimostrazione del teorema si dovrà tenere conto dell'osservazione del n. 9.