

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALBERTO FRIGERIO

Sui quasi gruppi associati ai gruppi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 28 (1958), p. 107-111

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1958__28__107_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUI QUASI GRUPPI ASSOCIATI AI GRUPPI

Nota () di ALBERTO FRIGERIO (a Napoli)*

§ 1. - In questa Nota da ogni gruppo G viene ricavato con opportuna costruzione un quasigruppo Q , da dirsi l'associato di G .

Si stabiliscono le condizioni necessarie e sufficienti perchè Q sia l'associato di un gruppo e da quanto viene detto per la dimostrazione di questo teorema ne risulta, implicitamente, che i quasigruppi associati di gruppi distinti sono distinti ed anzi, ne risulta un criterio che permette di costruire, dato un quasigruppo della classe in considerazione, il gruppo di cui esso è l'associato.

Allora segue facilmente che la regola che a G associa Q pone una corrispondenza biunivoca tra i sottogruppi di G ed i sottoquasigruppi di Q , ed inoltre che esiste isomorfismo tra i reticoli delle congruenze di G e di Q .

Infine considerato il caso che G contenga un numero finito di elementi si da per il quasigruppo associato Q un teorema del tipo Jordan-Hölder.

§ 2. - È noto che l'insieme Q è rispetto all'operazione O un quasigruppo se:

1) ad ogni coppia ordinata di elementi a, b di Q , risulta associato per la O , un elemento univocamente determinato di Q che si indica con aOb ;

(*) Pervenuta in Redazione il 28 aprile 1958.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

2) per ogni coppia ordinata a, b di Q esistono e sono univocamente determinati gli elementi x ed y di Q per i quali si ha:

$$aOx = b \quad , \quad yOa = b.$$

Si costruisce una vasta classe di quasigruppi nel seguente modo.

Dato un gruppo G se ne consideri l'elemento ab^{-1} , dove naturalmente a, b sono pure elementi di G .

Si consideri quindi l'operazione binaria O la quale associa ad ogni coppia ordinata di elementi di G un terzo elemento di G secondo la legge espressa dalla

$$(1) \quad aOb = ab^{-1}.$$

È immediato verificare che rispetto ad O , l'insieme degli elementi di G soddisfa 1) e 2) e quindi è un quasigruppo.

Si vede che in generale O non è associativa, infatti si ha:

$$(aOb)Oc = ab^{-1}c^{-1} \quad \text{ed} \quad aO(bOc) = a(bc^{-1})^{-1} = acb^{-1}.$$

Gli insiemi degli elementi che costituiscono G od un suo sottogruppo G_i , verranno indicati con Q o Q_i , quando si consideri operante su essi la O , rispetto cui sono dei quasigruppi.

Nel seguito Q sarà chiamato quasigruppo associato di G ed ora se ne osserveranno alcune proprietà generali connesse a quelle di G .

Si ha intanto il

TEOREMA I: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un quasigruppo Q sia l'associato di un gruppo G è che:*

3) *esista in Q un elemento u tale che si abbia $aOb = u$ se e solo se $a = b$;*

4) *qualunque siano a, b, c di Q si abbia $(aOc)O(bOc) = aOb$.*

La condizione è necessaria: Infatti, indicando con u l'elemento unità di G , in Q si ha $aOb = ab^{-1} = u$ se e solo se $a = b$, e con ciò 3) è verificata.

La condizione è pure sufficiente. Infatti dato il quasigruppo Q verificante le 3), 4) si consideri il gruppo G che ha gli stessi elementi di Q e nel quale l'operazione di prodotto è

definita dalla

$$(2) \quad ab = aO(uOb).$$

Che G sia un gruppo è stato già dimostrato da Whittaker¹⁾, anzi, in più, tale autore fa vedere che

$$(3) \quad a^{-1} = uOa$$

$$(4) \quad a = uO(uOa).$$

Basta quindi verificare che Q è proprio l'associato di G e cioè che l'operazione O' , definita a partire da G secondo la (1) coincide con la O di Q .

Ed infatti da $aO'b = ab^{-1}$ segue per le (3), (2), (4): $ab^{-1} = a(uOb) = aO[uO(uOb)] = aOb$, quindi $O' = O$.

§ 3 - È immediato che tra i sottogruppi di G ed i sottoquasigruppi di Q si può porre una corrispondenza biunivoca che fa corrispondere ad ogni sottogruppo il quasigruppo associato.

Basterà, evidentemente, dimostrare che un sottoquasigruppo S di Q , è in G un sottogruppo.

Infatti se $(a, b \in S)$, vale che $aOb = ab^{-1} \in S$.

S è dunque un sottoinsieme di G tale che se a, b sono suoi elementi anche ab^{-1} è suo elemento, e questa è una condizione necessaria e sufficiente perchè S sia un sottogruppo di G .

§ 4. - Si ricorda che una relazione di congruenza su un'algebra A , dotata di una operazione binaria O , è una relazione di equivalenza \mathbf{g} tale che le $a \equiv b(\mathbf{g})$, $c \equiv d(\mathbf{g})$ implicano $aOc \equiv bOd(\mathbf{g})$ e che l'insieme delle relazioni di congruenza su A costituiscono un reticolo se si conviene di porre $\mathbf{g} \leq \mathbf{g}_1$ quando accade che $a \equiv b(\mathbf{g})$ ($a \in A$, $b \in B$) implica $a \equiv b(\mathbf{g}_1)$.

Vale ora il:

¹⁾ J. V. WHITTAKER, *On the Postulates Defining a Group*. (The American Mathematical Monthly, novembre 1955). Si noti che in questo lavoro l'autore fa uso per i gruppi della notazione additiva; e che le condizioni 3), 4), qui date, sono i postulati II) e III).

TEOREMA II: *I reticoli delle relazioni di congruenza di un gruppo G e del quasigruppo Q associato a G , sono isomorfi.*

Si ponga per definizione, in Q $a \equiv b(\mathbf{q}_i)$ se in G è $a \equiv b(\mathbf{g}_i)$ e viceversa.

Che data \mathbf{g}_i risulti così \mathbf{q}_i una relazione di congruenza è immediato.

Infatti se $a \equiv b(\mathbf{q}_i)$ e $c \equiv d(\mathbf{q}_i)$, segue $a \equiv b(\mathbf{g}_i)$ e $c \equiv d(\mathbf{g}_i)$, ma allora $c^{-1} \equiv d^{-1}(\mathbf{g}_i)$ e $ac^{-1} \equiv bd^{-1}(\mathbf{g}_i)$ cioè per la definizione di Q $aOc \equiv bOc(\mathbf{g}_i)$ e quindi $aOc \equiv bOc(\mathbf{q}_i)$.

Data \mathbf{q}_i , che risulti \mathbf{g}_i una relazione di congruenza si ha osservando che se $a \equiv b(\mathbf{g}_i)$, $c \equiv d(\mathbf{g}_i)$ in Q risulta $a \equiv b(\mathbf{q}_i)$ $c \equiv d(\mathbf{q}_i)$ e da queste moltiplicando per u la seconda $uOc \equiv uOd(\mathbf{q}_i)$, che moltiplicata per la prima porge $aO(uOc) \equiv bO(uOd)(\mathbf{q}_i)$ e ricordando le (r) e la definizione di \mathbf{g}_i $ac \equiv bd(\mathbf{g}_i)$.

È ovvio che a \mathbf{g}_i distinte corrispondono \mathbf{q}_i distinte e viceversa e che $\mathbf{g}_i \leq \mathbf{g}_j$ necessariamente $\mathbf{q}_i \leq \mathbf{q}_j$ e viceversa; cioè che la corrispondenza è un isomorfismo tra i reticoli delle relazioni di congruenza di G e Q .

§ 5. - Nel caso di un numero finito di elementi G ed il suo associato Q avranno lo stesso ordine ed per il § 3 anche i sottoquasigruppi di Q avranno lo stesso ordine dei corrispondenti sottogruppi di G , talchè *l'ordine di un sottoquasigruppo di Q è un divisore dell'ordine di Q* . La cosa, notoriamente, non è vera per un quasigruppo finito qualsiasi.

Ed ancora, sempre per G e Q finiti, dal § 4 segue che i blocchi di una \mathbf{q}_i hanno tutti lo stesso numero di elementi, perchè ciò accade per i blocchi delle corrispondenti \mathbf{g}_i .

Tal numero si dirà l'ordine di \mathbf{q}_i ed allora si può considerare la funzione $f(\mathbf{q}_i)$ il cui dominio è il reticolo delle congruenze di Q ed il codominio cade (senza necessariamente esaurirlo) nell'insieme dei divisori di Q .

Inoltre, poichè considerati in G due sottogruppi normali G_i e

²⁾ Si deve tener presente che per un quasi gruppo qualsiasi non è neanche vero che una relazione di congruenza individui un sotto-quasigruppo, cosa che invece accade per i gruppi.

G_k esiste isomorfismo tra i gruppi fattoriali $\frac{G_j \cup G_k}{G_j}$ e $\frac{G_k}{G_j \cap G_k}$ si ottiene passando a considerare gli ordini delle congruenze di G $\frac{f(\mathbf{g}_j \cup \mathbf{g}_k)}{f(\mathbf{g}_j)} = \frac{f(\mathbf{g}_k)}{f(\mathbf{g}_j \cap \mathbf{g}_k)}$ e quindi $f(\mathbf{q}_i \cup \mathbf{q}_k)f(\mathbf{q}_j \cap \mathbf{q}_k) = f(\mathbf{q}_j)f(\mathbf{q}_k)$ che dice essere $\log f(\mathbf{q}_i)$ una valutazione sul reticolo delle congruenze di Q .

Infine il teorema di Jordan-Hölder trasportato dal reticolo di G a quello delle congruenze dell'associato Q dà in particolare:

Considerate due catene del reticolo delle congruenze di Q , discendenti, massimali, con gli stessi estremi, le successioni dei rapporti dell'ordine di ciascuna congruenza rispetto alla seguente, sono costituite, prescindendo dall'ordine, dagli stessi numeri interi ³⁾.

³⁾ Per altra via si può mostrare che tale risultato vale per ogni quasigruppo finito.