GIUSEPPE GRIOLI

Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 90-102

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__90_0>

SUL MOTO DI UN CORPO RIGIDO ASIMMETRICO SOGGETTO A FORZE DI POTENZA NULLA

Nota (*) *di* Giuseppe Grioli (*a Padova*)

Alcuni anni or sono ho studiato il moto di un giroscopio soggetto a forze di potenza nulla mostrandone, tra l'altro, la sua riducibilità alle quadrature [1]).

Trattasi, in particolare, di una sollecitazione dovuta a forze centrifughe composte, ad es., inerenti alla rotazione terrestre o a quelle che agiscono su un corpo in moto, immerso in un campo magnetico e portante una certa distribuzione di cariche elettriche.

In tale caso il problema presenta un particolare interesse nel campo della fisica atomica, tra l'altro, per la determinazione delle precessioni di Larmor, ed ha formato di recente oggetto di nuovo studio [2]).

Notevolmente più difficile è lo stesso problema nel caso di un corpo asimmetrico. Anzi, in generale, viene anche a mancare la possibilità di ridurlo alle quadrature. Il suo interesse fisico-matematico mi induce, tuttavia a mostrare come sia possibile determinare particolari tipi di movimenti per un tale solido, soggetto alle sollecitazioni di cui sopra.

(*) Pervenuta in Redazione il 26 marzo 1957.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) Giuseppe Grioli, *Moto attorno al baricentro di un giroscopio soggetto a forte di potenza nulla.* Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni, Fascicolo III-IV, 1947.

2) Goldstein, *The classical Motion of a rigid charged body in a magnetic field.* American Journal of Physics, vol. 19, pag. 100, 1951.

Precisamente, in questo lavoro, scritte le equazioni generali, nell'ipotesi di uniformità del campo magnetico se ad esso è dovuta la sollecitazione agente, stabilisco un loro integrale primo diverso da quello dell'energia, determino tutti i possibili moti rotatori — che sono *necessariamente* uniformi — e dimostro l'impossibilità dinamica di precessioni regolari.

In un successivo lavoro mi occuperò invece di altri tipi di movimento.

1. Equazioni generali.

Detto C un qualunque corpo rigido asimmetrico, siano P e $\boldsymbol{v}$ il generico punto di C e la sua velocità e dC l'elemento di volume. Si supponga che su ogni elemento di volume dC agisca la forza $-2\mu^* dC \boldsymbol{H}^* \wedge \boldsymbol{v}$ ove $\boldsymbol{H}^*$ è un vettore invariabile, indipendente dai punti di C. Il momento risultante di tali forze rispetto ad un punto O è espresso da

$$(1) \qquad \boldsymbol{M}_O = -2 \int_C \mu^* OP \wedge (\boldsymbol{H}^* \wedge \boldsymbol{v}) dC.$$

Ovviamente, per $\boldsymbol{H}^*$ coincidente con la velocità angolare della terra nel suo moto diurno e μ^* con la densità di C la (1) esprime il momento risultante rispetto ad O delle forze centrifughe composte. Invece per $-2\boldsymbol{H}^*$ coincidente con l'intensità di un campo magnetico e μ^* con la densità di una distribuzione di cariche elettriche solidali a C la (1) esprime il momento risultante rispetto ad O delle forze dovute al campo magnetico.

Nel seguito si supporrà che una distribuzione di massa con densità proporzionale a μ^* abbia i momenti d'inerzia e quelli di deviazione rispetto ad O proporzionali a quelli relativi alla effettiva costituzione materiale di C. Si può sempre assumere una terna trirettangola levogira di origine O e solidale a C rispetto alla quale uno dei tre momenti di deviazione, ad es., C' risulta nullo. Con un tale riferimento l'omografia d'inerzia, σ, è rappresentata dalla matrice

$$(2) \qquad \sigma \equiv \left| \begin{array}{ccc} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{array} \right| ,$$

con l'abituale significato dei simboli A, B, ecc..

L'asimmetria del corpo rigido considerato va intesa nel senso che l'ellissoide principale d'inerzia di centro O è a tre assi. Sia inoltre λ l'omotetia

$$(3) \qquad \lambda \equiv \left| \begin{array}{ccc} A+B+C & 0 & 0 \\ 0 & A+B+C & 0 \\ 0 & 0 & A+B+C \end{array} \right|$$

ed $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare di C.

Supposto O fisso, da

$$(4) \qquad OP \wedge (\boldsymbol{H}^* \wedge \boldsymbol{v}) = OP \times \boldsymbol{H}^* \cdot OP \wedge \boldsymbol{\omega},$$

tenuto conto dell'indipendenza di $\boldsymbol{H}$ da P e di (2), (3), da (1) con qualche sviluppo, segue

$$(5) \qquad \boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H},$$

ove si è posto

$$(6) \qquad \boldsymbol{H} = \frac{A^*}{A} \boldsymbol{H}^* ,$$

se con A^* si denota il momento d'inerzia di C rispetto all'asse solidale di indice 1 e origine O, quando si attribuisca a C densità uguale a μ^*.

Per O fisso o coincidente con il baricentro il momento delle quantità di moto rispetto ad O risulta espresso da $\sigma\boldsymbol{\omega}$ e la seconda equazione cardinale della Meccanica, in assenza di attrito e nell'ipotesi di O fisso o nello studio del moto relativo al baricentro, in base a (5), assume l'aspetto

$$\sigma\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma\boldsymbol{\omega} - \lambda\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{H} + 2\boldsymbol{\omega} \wedge \sigma\boldsymbol{H} = 0. \tag{7}$$

Alla (7) va associata l'equazione

$$\dot{\boldsymbol{H}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{H} = 0, \tag{8}$$

esprimente la condizione di invariabilità di $\boldsymbol{H}$. Nelle (7), (8) e nel seguito il punto sovrapposto ad un vettore indica la sua derivata temporale con riferimento agli assi solidali.

Poichè le forze agenti sono forze di potenza nulla l'integrale dell'energia si traduce nella condizione di invariabilità della forza viva di C. Si ha cioè,

$$\sigma\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 2E_0 = \text{cost.} \tag{9}$$

La (9) costituisce un integrale primo delle equazioni (7), (8).

2. Un integrale primo diverso da quello dell'energia.

Delle (7), (8) si può stabilire un secondo integrale primo.

Operando sui vettori di (8) con l'omografia $\lambda - 2\sigma$ e sottraendo da (7) si ha

$$\begin{aligned} \sigma\dot{\boldsymbol{\omega}} - (\lambda - 2\sigma)\dot{\boldsymbol{H}} + \boldsymbol{\omega} \wedge [\sigma\boldsymbol{\omega} - (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H}] - \\ - (\lambda - 2\sigma)(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{H}) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

che può scriversi

$$\frac{d}{dt}[\sigma\boldsymbol{\omega} - (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H}] - (\lambda - 2\sigma)(\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{H}) = 0. \tag{11}$$

D'altro canto, l'invariabilità di $\boldsymbol{H}$ e la (7) implicano

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{H} \times \sigma\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{H} \times \frac{d\sigma\boldsymbol{\omega}}{dt} = \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H} \tag{12}$$

che, essendo $\lambda - 2\sigma$ una dilatazione, porta a

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{H} \times \sigma\boldsymbol{\omega}) = (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{H} \times (\lambda - 2\sigma)(\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{\omega}). \tag{13}$$

Moltiplicando la (11) scalarmente per $\boldsymbol{H}$ e tenendo conto della sua indipendenza dal tempo e di (13), si deduce

$$(14)\qquad \frac{d}{dt}\{\boldsymbol{H}\times[\sigma\boldsymbol{\omega}-(\lambda-2\sigma)\boldsymbol{H}]\}+\frac{d}{dt}(\boldsymbol{H}\times\sigma\boldsymbol{\omega})=0$$

da cui segue

$$(15)\qquad \boldsymbol{H}\times[2\sigma\boldsymbol{\omega}-(\lambda-2\sigma)\boldsymbol{H}]=\text{cost.}$$

che costituisce un nuovo integrale primo delle equazioni del moto. Anzi, tenendo presente che $\boldsymbol{H}$ è costante, λ un omotetia e quindi

$$(16)\qquad \boldsymbol{H}\times\lambda\boldsymbol{H}=\lambda\boldsymbol{H}^2=\text{cost.}$$

all'integrale (15), in base al fatto che σ è una dilatazione, si può dare la forma

$$(17)\qquad (\omega+\boldsymbol{H})\times\sigma\boldsymbol{H}=h,$$

essendo h una costante.

Osservazione. - Se C ha struttura giroscopica rispetto ad O l'ellissoide d'inerzia rispetto ad O risulta rotondo e con riferimento ad una terna principale il cui terzo asse coincide con l'asse di rivoluzione di quell'ellissoide risulta

$$(18)\qquad A=B\quad,\quad A'=B'=0.$$

In tal caso, dette H_1, H_2, H_3 le componenti di $\boldsymbol{H}$ rispetto agli assi solidali, si ha, com'è facile riconoscere,

$$(19)\qquad \sigma\boldsymbol{H}=A\boldsymbol{H}+(C-A)H_3\boldsymbol{k},$$

se con $\boldsymbol{k}$ si denota il versore dell'asse di rivoluzione dell'ellissoide principale di centro O.

Tenuto conto di (8), (19) la (7), moltiplicata scalarmente per $\boldsymbol{k}$, indicando con r la componente di ω secondo $\boldsymbol{k}$, dà

$$(20)\qquad \dot{H}_3+\dot{r}=0,$$

da cui segue l'integrale primo

$$H_3 + r = \text{cost.} \tag{21}$$

I tre integrali primi (9), (17), (21) permettono di ridurre alle quadrature il problema dell'integrazione delle (7), (8).

Non mi occuperò di tale caso che ha già costituito oggetto di studio [1]) e nel seguito supporrò che C non abbia struttura giroscopica rispetto ad O e le (18) non simultaneamente verificate.

3. Moti rotatori.

In ogni possibile moto rotatorio di C l'asse di moto è solidale a C. Dovendo la forza viva risultare costante ne segue che la velocità ha modulo costante. Un eventuale moto rotatorio non può, dunque, che essere uniforme e, detti $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ i versori degli assi solidali, con $\boldsymbol{k}$ parallelo ad $\boldsymbol{\omega}$, si può porre

$$\boldsymbol{\omega} = b\boldsymbol{k}, \tag{22}$$

con b costante.

Introducendo la (22) nella (7), si ottiene

$$\boldsymbol{k} \wedge [b\sigma\boldsymbol{k} - \lambda\boldsymbol{H} + 2\sigma\boldsymbol{H}] = 0. \tag{23}$$

Da (23) si deduce

$$b\sigma\boldsymbol{k} - \lambda\boldsymbol{H} + 2\sigma\boldsymbol{H} = \beta\boldsymbol{k}, \tag{24}$$

ove β è un'indeterminata, eventualmente nulla.

Risulta, in base a (2),

$$\sigma\boldsymbol{k} = -(B'\boldsymbol{i} + A'\boldsymbol{j} - C\boldsymbol{k}), \tag{25}$$

$$\sigma\boldsymbol{H} = (AH_1 - B'H_3)\boldsymbol{i} + (BH_2 - A'H_3)\boldsymbol{j} - \tag{26}$$

$$-(B'H_1 + A'H_2 - CH_3)\boldsymbol{k}.$$

In base a (3), (25), (26) la (24) moltiplicata scalarmente per $\boldsymbol{i}$ e, successivamente, per $\boldsymbol{j}$ dà

$$(27) \qquad \begin{cases} B'b + (B + C - A)H_1 + 2B'H_3 = 0, \\ A'b + (C + A - B)H_2 + 2A'H_3 = 0. \end{cases}$$

Da (27), essendo non nulli [anzi positivi] i coefficienti di H_1, H_2, segue

$$(28) \qquad H_1 = \frac{B'(2H_3 + b)}{A - B - C}, \qquad H_2 = \frac{A'(2H_3 + b)}{B - C - A}.$$

La condizione

$$(29) \qquad H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = H^2 = \text{cost.},$$

in base a (28), si traduce in

$$(30) \qquad \left[\frac{B'^2}{(A - B - C)^2} + \frac{A'^2}{(B - C - A)^2}\right](b + 2H_3)^2 + H_3^2 = H^2$$

e insieme alle (28 implica

$$(31) \qquad H_1 = \text{cost.}, \quad H_2 = \text{cost.}, \quad H_3 = \text{cost.}$$

Ciò vuol dire che l'asse di rotazione è parallelo ad $\boldsymbol{H}$ e pertanto $\boldsymbol{H}$ risulta parallelo a $\boldsymbol{k}$ e

$$(32) \qquad H_1 = H_2 = 0.$$

Da (27) segue allora

$$(33) \qquad 2H_3 + b = 0$$

oppure

$$(34) \qquad A' = B' = 0.$$

In base a (32), (33), (34), si riconosce che tutte le equazioni [anche la 8], sono verificate e nella (24) determinata β.

Si conclude: *Per il solido C sono dinamicamente possibili moti rotatori, necessariamente uniformi, intorno ad una retta solidale, a, disposta parallelamente al vettore $\boldsymbol{H}$. Se la* *velocità angolare è uguale a* $-2\boldsymbol{H}$ *la retta a è in C arbitraria. Se invece la velocità angolare non soddisfa a tale condizione, possono aversi moti rotatori uniformi solo intorno ad un asse principale d'inerzia. In tal caso la velocità angolare ha modulo arbitrario.*

4. Impossibilità dinamica di precessioni regolari.

Premesse di carattere cinematico. Si supponga che il moto di un qualunque corpo rigido, C, sia una precessione [anche non regolare] di polo O e si denoti con $\boldsymbol{c}$ il versore dell'asse di precessione, con $\boldsymbol{k}$ quello dell'asse di figura e con θ l'invariabile angolo di $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{k}$. Dette p, q, r le componenti della velocità angolare rispetto ad una terna solidale di versori $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ e c_1, c_r, $c_3 = \cos\theta$ quelle di $\boldsymbol{c}$ sussiste l'equazione

$$\dot{\boldsymbol{c}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{c} = 0, \tag{35}$$

esprimente l'invariabilità di $\boldsymbol{c}$.

Per la costanza di θ la (35), per proiezione sugli assi solidali, dà

$$\left\{\begin{aligned} \dot{c}_1 + q\cos\theta - rc_2 &= 0,\\ \dot{c}_2 + rc_1 - p\cos\theta &= 0,\\ pc_2 - qc_1 &= 0. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Da (36,3) segue

$$c_2 = \frac{qc_1}{p} \tag{37}$$

nonchè

$$\dot{c}_2 = \frac{(\dot{q}c_1 + q\dot{c}_1)p - \dot{p}qc_1}{p^2} \tag{38}$$

La (38), in base a (36,1) (36,2) (37), diviene

$$[p\dot{q} - q\dot{p} + (p^2 + q^2)r]c_1 - p(p^2 + q^2)\cos\theta = 0. \tag{39}$$

Tenendo conto di (37) si ha

$$c_1^2\left(1+\frac{q^2}{p^2}\right)+\cos^2\theta=1, \tag{40}$$

da cui segue

$$c_1=\pm\frac{p\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{p^2+q^2}}. \tag{41}$$

In definitiva la (39), a causa di (41), si scrive

$$\frac{p\dot{q}-q\dot{p}+(p^2+q^2)r}{(p^2+q^2)\sqrt{p^2+q^2}}=\pm\,\mathrm{ctg}\,\theta=\mathrm{cost.} \tag{42}$$

La (42), insieme a (41) e a

$$c_2=\pm\frac{q\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{p^2+q^2}} \tag{43}$$

caratterizza i moti di precessione di un qualunque corpo rigido.

In ogni eventuale precessione regolare dinamicamente possibile di C la velocità angolare ha modulo invariabile. Essendo la forza viva costante in ogni moto di C, ne segue che il momento d'inerzia di C rispetto all'asse di moto non può dipendere dal tempo. Ciò significa che l'intersezione Q dell'asse di moto con l'ellissoide principale, ε_0, di centro O soddisfa alla condizione

$$|OQ|=\mathrm{cost.} \tag{44}$$

Poichè in ogni precessione regolare i due coni di Poinsot sono rotondi e ε_0 è a tre assi, la (44) è verificata allora e soltanto allora che sono soddisfatte le due condizioni:

a) l'asse di figura, f, è una delle due rette per O ortogonali ai piani delle sezioni circolari di ε_0 ;

b) la velocità angolare è ortogonale ad f.

Supposte verificate le condizioni a), b) supporrò il terzo asse, di versore $\boldsymbol{k}$, della terna solidale parallelo ad f. Le condizioni a), b) si traducono nelle uguaglianze

$$(45) \qquad A = B; \quad B' = C' = 0; \quad A' \neq 0$$

e

$$(46) \qquad r = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k} = 0,$$

essendo sempre possibile, per un opportuno orientamento della terna intorno a $\boldsymbol{k}$, supporre $B' = 0$.

Con riferimento alle notazioni della *premessa di carattere cinematico,* in ogni eventuale moto di precessione di C si avrà

$$(47) \qquad \boldsymbol{\omega} = a(\boldsymbol{c} - \cos\theta\, \boldsymbol{k}),$$

ove può supporsi

$$(48) \qquad a = \text{cost.} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}}{\operatorname{sen}^2\theta} > 0,$$

pur di orientare opportunamente l'asse di precessione.

OSSERVAZIONE. - Si riconosce che la (48) implica nelle (41), (42), (43) la scelta del segno superiore. Infatti, tenuto conto di (46), si ha

$$(49) \qquad \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c} = pc_1 + qc_2 = \pm\, \omega \operatorname{sen}\theta$$

da cui si vede che il segno inferiore va scartato se vale la (48). Nel seguito supporremo valida la (48) e considereremo le (41), (42), (43) con i soli segni superiori.

Tenendo presente la (46), la (42) si riduce a

$$(50) \qquad p\dot{q} - q\dot{p} = \alpha\omega^2,$$

pur d'intendere

$$(51) \qquad \alpha = \omega \operatorname{ctg}\theta\,.$$

La (50) associata all'equazione

$$(52) \qquad p\dot{p} + q\dot{q} = 0$$

equivale al sistema

$$\dot{p} = -\alpha q, \quad \dot{q} = \alpha p, \tag{53}$$

di immediata integrazione.

La (8) per proiezione sugli assi solidali, dà

$$\left\{ \begin{aligned} &\dot{H}_1 + qH_3 - rH_2 = 0, \\ &\dot{H}_2 + rH_1 - pH_3 = 0, \\ &\dot{H}_3 + pH_2 - qH_1 = 0. \end{aligned} \right. \tag{54}$$

Dalla (54, 3), tenuto conto delle (53), e del fatto che si deve ritenere $\alpha \neq 0$, si deduce

$$\dot{H}_3 = -\frac{1}{\alpha}\left[\frac{d}{dt}(H_1 p + H_2 q) - (\dot{H}_1 p + \dot{H}_2 q)\right], \tag{55}$$

che, in base alle prime due delle (54), porta alla relazione integrale

$$H_3 = -\frac{1}{\alpha}[H_1 p + H_2 q + \eta], \tag{56}$$

ove η è una costante arbitraria.

L'equazione (7), tenuto conto di (2), (3), (45), (46), dà, per proiezione sugli assi solidali

$$\left\{ \begin{aligned} &A\dot{p} - A'q^2 = [(2A - C)H_3 + 2A'H_2]q, \\ &A\dot{q} + A'pq = -[(2A - C)H_3 + 2A'H_2]p, \\ &-A'\dot{q} = (CH_2 + 2A'H_3)p - CH_1 q. \end{aligned} \right. \tag{57}$$

Le (57), tenuto conto di (53), equivalgono alle due sole equazioni

$$\left\{ \begin{aligned} &(2A - C)H_3 + 2A'H_2 = -(A'q + A\alpha), \\ &(2A'H_3 + CH_2)p - CH_1 q = -A'\alpha p. \end{aligned} \right. \tag{58}$$

Da (56), (58) posto

$$D = [(2A - C)C\omega^2 - 2A'(2A'p^2 + C\alpha q)], \tag{59}$$

segue

$$\left\{\begin{aligned} H_1 &= \frac{p}{D}[(AC - 2A'^2)(\alpha^2 - 2\eta) + C^2\eta - 2A'^2q^2], \\ H_2 &= \frac{1}{D}\{[2A'^2p^2 + C(C-2A)\eta + CA\alpha^2]q + CA'\alpha\omega^2\} \\ H_3 &= \frac{1}{D}[2A'^2\alpha p^2 + (2\eta - \omega^2)A'Cq - AC\alpha\omega^2]. \end{aligned}\right. \tag{60}$$

Tenuto conto di (45), (47) da (26) si deduce

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \times \sigma\boldsymbol{H} = a\,\{ & A(H_1c_1 + H_2c_2) - A'H_3c_2 + \\ & + (CH_3 - A'H_2)\cos\theta - \cos\theta(CH_3 - A'H_2)\} = \\ & = a[A(\boldsymbol{H} \times \mathbf{c} - H_3\cos\theta) - A'H_3c_2]. \end{aligned} \tag{61}$$

In base a (43), la (61) può scriversi

$$\boldsymbol{\omega} \times \sigma\boldsymbol{H} = a\left\{A(\boldsymbol{H} \times \mathbf{c} - H_3\cos\theta) - A'H_3\frac{\operatorname{sen}\theta q}{\omega}\right\}, \tag{62}$$

assumendo nella (43) il solo segno superiore, com'è stato avvertito.

L'integrale primo (17), tenendo presente le (26), (45), (62), si esplicita nell'equazione

$$H_3\left\{(C - A)H_3 - 2A'H_2 - a\left[A\cos\theta + \frac{A'}{\omega}\operatorname{sen}\theta q\right]\right\} = h' \tag{63}$$

con

$$h' = h - AH^2 - aA\boldsymbol{H} \times \mathbf{c} = \text{cost.} \tag{64}$$

Tenuto conto che da (48), (49) segue

$$a = \frac{\omega}{\operatorname{sen}\theta}, \tag{65}$$

la (63), in base a (60), diviene,

$$A[2A'^2\alpha p^2 + A'C(2\eta - \omega^2)q - AC\alpha\omega^2]^2 - \\ - h'[C(2A - C)\omega^2 - 2A'(2A'p^2 + C\alpha q)]^2 = 0. \tag{66}$$

Si riconosce subito che, scritta l'equazione

$$\sqrt{A}[2A'^2\alpha p^2 + A'C(2\eta - \omega^2)q - AC\alpha\omega^2 \pm \\ \sqrt{h'}[C(2A - C)\omega^2 - 2A'(2A'p^2 + C\alpha q)] = 0, \tag{67}$$

la (66) risulta soddisfatta allora e soltanto allora che lo sia la (67), quando in essa si assuma indifferentemente uno solo dei due segni anteposti a $\sqrt{h'}$.

Tenuto conto di

$$q^2 = \omega^2 - p^2 \tag{68}$$

e del fatto che p è un'*effettiva funzione del tempo* da (67) seguono le uguaglianze

$$\begin{cases} \sqrt{h'} = \pm \dfrac{A\alpha}{2}, \\ \eta = \dfrac{\omega^2 + \alpha^2}{2}, \\ \alpha\omega^2 = 0. \end{cases} \tag{69}$$

Delle (69) la terza è assurda non potendo annullarsi nè ω, nè α, vedi (51).

Si conclude l'*impossibilità dinamica di precessioni regolari per C.*