DOMENICO BOCCIONI

$\mathfrak{a}$-modulo supplementare di un S-semigruppo commutativo

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 48-59

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__48_0>

$\mathfrak{A}$-MODULO SUPPLEMENTARE DI UN S-SEMIGRUPPO COMMUTATIVO

Nota (*) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*)

Lo scopo della presente nota è di mostrare come un ragionamento essenzialmente già fatto in un precedente lavoro ([1][1]), pp. 478-493) si presti pure ad alcune conclusioni, non prive di un certo interesse, relative all'esistenza e alla costruzione di particolari estensioni di un semigruppo commutativo, dotato di un semianello (non necessariamente commutativo) di operatori.

Queste conclusioni si riassumono in un teorema, enunciato nel n.° 3, e in alcuni suoi immediati corollari, in parte già noti, enunciati nei n.^{i} 1, 5 e 6, (si vedano inoltre il 1° e il 2° capov. del n.° 5, e l'ult. capov. del n.° 6).

Nel n.° 6 sono pure stati messi in evidenza alcuni mutui legami fra le proposizioni ottenute.

1. - Siano S un semianello (non necessariamente commutativo), ([1], n.° 1), e G un semigruppo ([1], n.° 1) additivo commutativo.

Diremo che G è un *S-semigruppo* (*commutativo*) *sinistro* se è definita una moltiplicazione (univoca) a sinistra di ogni elemento di S per ogni elemento di G tale che si abbia:

I) $au \in G,$

II) $a(u + u_1) = au + au_1\,,$

(*) Pervenuta in Redazione il 29 novembre 1956.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

[1]) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

III) $(a + a_1)u = au + a_1u$,

IV) $a(a_1u) = (aa_1)u$,

qualunque siano $a, a_1 \in S, u, u_1 \in G$.

Come facile conseguenza di un teorema enunciato nel successivo n.° 3, otterremo (nel n.° 3 stesso) il seguente

COROLLARIO: *Di un semianello S sia M un sottoinsieme moltiplicativamente chiuso e costituito da elementi semplificabili in S* ([1], n.° 1), *ed esista un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}$ di S rispetto ad M* ([1], n.° 2). *Sia inoltre G un S-semigruppo commutativo sinistro. In queste ipotesi, la seguente condizione:*

C) *Da $\gamma u = \gamma u_1$ ($\gamma \in M, u, u_1 \in G$) segue sempre $u = u_1$, è necessaria e sufficiente affinchè esista un « $\mathfrak{A}$-modulo supplementare* ($\mathfrak{A}$-m.s.) *di G rispetto ad M », cioè un $\mathfrak{A}$-modulo sinistro $\mathcal{G}$, estensione* (cfr. [3], 4° capov. del n.° 17) *di G e tale che ogni elemento ξ di $\mathcal{G}$ sia rappresentabile nella forma*

$$\xi = \gamma^{-1}(u - v) \qquad (\gamma \in M, u, v \in G). \tag{1}$$

Se un tale $\mathcal{G}$ esiste, esso è univocamente determinato da G ed M a meno di isomorfismi.

La necessità della cond. C) si riconosce immediatamente tenendo conto che, se $\mathcal{G}$ è un $\mathfrak{A}$-m.s. di G rispetto ad M, dalle (1), IV) discende

$$1 \cdot \xi = \xi, \tag{2}$$

qualunque sia $\xi \in \mathcal{G}$, 1 denotando l'elemento unità di $\mathfrak{A}$, (basta quindi ricordare che ogni $\gamma \in M$ possiede reciproco γ^{-1} in $\mathfrak{A}$).

Nei n.i successivi sfrutteremo il seguente

LEMMA: *Nelle ipotesi del teorema sopra enunciato, se è soddisfatta la condiz.* C), *le eguaglianze*

$$r\gamma = s\gamma + \alpha, \qquad r_1\gamma_1 = s_1\gamma_1 + \alpha, \tag{3}$$

$$ru + sv + r_1v_1 + s_1u_1 = rv + su + r_1u_1 + s_1v_1, \tag{3'}$$

$$r'\gamma = s'\gamma + \alpha', \qquad r_1'\gamma_1 = s_1'\gamma_1 + \alpha', \tag{4}$$

dove $\gamma, \gamma_1, \alpha, \alpha' \in M, r, s, r_1, s_1, r', s', r_1', s_1' \in S, u, v, u_1,$ $v_1 \in G$, *implicano*

$$(4') \qquad r'u + s'v + r_1'v_1 + s_1'u_1 = r'v + s'u + r_1'u_1 + s_1'v_1 .$$

Per riconoscere le verità di questa proposizione basta ripetere il ragionamento fatto nell'ultimo capov. del n.° 3 di [1], (leggendo u, v, u_1, v_1 risp. invece di a, b, a_1, b_1).

2. - Supponendo soddisfatte le ipotesi del coroll. del n.° 1 e la cond. C), mostreremo ora come si possa costruire un $\mathfrak{A}$-m.s. di G rispetto ad M.

Definiamo nell'insieme $\mathcal{T}$ delle terne ordinate (γ, u, v), con $\gamma \in M$, $u, v \in G$, una relazione binaria ponendo:

$$(5) \qquad (\gamma, u, v) \backsim (\gamma_1, u_1, v_1),$$

se esistono cinque elementi $r, s, r_1, s_1 \in S$, $\alpha \in M$ per cui valgono le (3), (3').

La (5) è una relazione di equivalenza (cioè è riflessiva, simmetrica e transitiva): ciò risulta dal lemma del n.° preced., con un ragionamento formalmente identico a quello svolto nel 5° e 6° capov. del n.° 4 di [1] (ricordati il teor. del n.° 2 e il lemma del n.° 4 di quel lavoro). Denotata con $[(\gamma, u, v)]$ la classe degli elementi di $\mathcal{T}$ equivalenti a (γ, u, v), e posto

$$[(\gamma, u, v)] \in \mathcal{G}',$$

nell'insieme $\mathcal{G}'$ si ha dunque la seguente *definizione di eguaglianza*:

$$(6) \qquad [(\gamma, u, v)] = [(\gamma_1, u_1, v_1)]$$

se e solo se esistono cinque elementi $r, s, r_1, s_1 \in S$, $\alpha \in M$ per cui valgono le (3), (3').

In particolare (cfr. [1], pp. 480-482):

$$[(m\gamma, mu, mv)] = [(\gamma, u, v)],$$

qualunque sia $m \in S$ tale che $m\gamma \in M$. Se $\gamma = \gamma_1$, la (6) è vera se e solo se $u + v_1 = v + u_1$; perciò

$$[(\gamma, u, v)] = [(\gamma, u + w, v + w)],$$

qualunque sia $w \in G$. Se $u = v$, la (6) è vera se e solo se $u_1 = v_1$. Se $r, s \in S$, $\alpha \in M$ son tali che $r\gamma = s\gamma + \alpha$, allora

$$[(\gamma, u, v)] = [(\alpha, ru + sv, rv + su)].$$

Diamo in $\mathcal{G}'$ la seguente *definizione di addizione*:

$$(7) \qquad [(\gamma, u, v)] + [(\gamma_1, u_1, v_1)] = \\ = [(\alpha, ru + sv + r_1 u_1 + s_1 v_1, rv + su + r_1 v_1 + s_1 u_1)],$$

dove $\alpha \in M$, r, s, r_1, $s_1 \in S$ son cinque elementi per cui valgono le (3).

Tale addizione è univoca, e si ha in particolare

$$[(\gamma, u, v)] + [(\gamma, u_1, v_1)] = [(\gamma, u + u_1, v + v_1)];$$

inoltre $\mathcal{G}'$ (rispetto alle definizioni (6) e (7) è un *modulo* (cioè un gruppo commutativo), avente come zero l'elemento $0' = [(\gamma, u, u)]$ e come opposto di $[(\gamma, u, v)]$ l'elemento $[(\gamma, v, u)]$. Ciò si riconosce con ragionamenti formalmente identici a quelli svolti nel n.° 5 di [1].

Diamo ora la seguente *definizione di moltiplicazione di* $x = \gamma^{-1}(a - b) \in \mathfrak{A}$ $(\gamma \in M, a, b \in S)$ *per* $\xi_1' = [(\gamma_1, u_1, v_1)] \in \mathcal{G}'$:

$$(8) \qquad \gamma^{-1}(a - b) \cdot [(\gamma_1, u_1, v_1)] = [(\nu\gamma, pu_1 + qv_1, pv_1 + qu_1)],$$

dove $\nu \in M$, p, $q \in S$ son tre elementi tali che

$$(8') \qquad \nu a + q\gamma_1 = \nu b + p\gamma_1 .$$

Questa moltiplicazione è univoca e soddisfa alle I), II), III), IV) del n.° 1 (ove si legga x, $x_1 \in \mathfrak{A}$ e ξ', $\xi_1' \in \mathcal{G}'$ invece risp. di a, $a_1 \in S$ ed u, $u_1 \in G$); ciò si riconosce con considerazioni perfettamente analoghe a quelle svolte nelle prime parti dei n.i 6 e 7 di [1]. Dunque $\mathcal{G}'$ (rispetto alle definizioni (6), (7) e (8)) è un $\mathfrak{A}$-modulo sinistro.

3. - Osserviamo che, se in particolare $u = \gamma w + v$ $(\in G)$, la (6) è vera se e soltanto se $u_1 = \gamma_1 w + v_1$. Infatti la (3'), con $u = \gamma w + v$, $u_1 = \gamma_1 w + v_1$, è soddisfatta qualunque siano r, s, r_1, $s_1 \in S$, $\alpha \in M$ soddisfacenti alle (3). Viceversa, se la

(6) è vera, esistendo (cfr. [1], penult. capov. di p. 481) r' $s' \in S$, $\rho \in M$ per cui valgono le (4) con $\alpha' = \rho\gamma_1$, $r_1' = 2\rho$, $s_1' = \rho$, per il lemma del n.° 1 vale pure la (4'). Da questa, poichè $u = \gamma w + v$, posto (per la $(4)_2$) $r'\gamma = s'\gamma + \rho\gamma_1$, segue appunto (semplificando rispetto all'addizione e ricordando la cond. C)) $u_1 = \gamma_1 w + v_1$.

Ne segue che l'elemento $[(\gamma, \gamma w + v, v)]$ di $\mathcal{G}'$ $(w \in G)$ non dipende dai particolari elementi $\gamma \in M$, $v \in G$. Se si pone:

$$(9) \qquad [(\gamma, \gamma w + v, v)] \in G' \qquad (w \in G),$$

è allora chiaro (in base ad una osservazione del 4° capov. del n.° 2 ed alla cond. C)) che la corrispondenza

$$(10) \qquad w \to [(\gamma, \gamma w + v, v)]$$

fra G e G' è biunivoca. Anzi questa corrispondenza (10) è un S-isomorfismo, ossia, posto

$$\eta_i' = [(\gamma, \gamma w_i + v, v)] \qquad (i = 1, 2),$$

si ha (cfr. [1], 2° capov. di p. 492):

$$(11) \qquad w_1 + w_2 \to \eta_1' + \eta_2', \qquad s_1 w_2 \to s_1 \eta_2',$$

qualunque siano $\eta_i' \in G'$, $s_1 \in S$; (per verificare la $(11)_2$ si osservi che $s_1 = \gamma^{-1}(\gamma s_1 + b - b)$, con $\gamma \in M$, $b \in S$, e si ricordino le osservazioni del 4° capov. del n.° 2).

Ogni elemento $[(\gamma, u, v)]$ dell'$\mathfrak{A}$-modulo sinistro $\mathcal{G}'$ è rappresentabile nella forma

$$(12) \quad [(\gamma, u, v)] = \gamma^{-1}\cdot([(\gamma, \gamma u + w, w)] - [(\gamma, \gamma v + w, w)]), \qquad (w \in G),$$

(cfr. [1], inizio p. 493, osservato che $\gamma^{-1} = (\gamma^2)^{-1}(\gamma + c - c)$, con $c \in S$).

Le considerazioni di questo e del preced. n.° dimostrano dunque il seguente

TEOREMA: *Nelle ipotesi del coroll. del n.° 1, se la condiz. C) è soddisfatta, la relazione binaria (5), definita nell'insieme delle terne ordinate (γ, u, v) $(\gamma \in M,\ u,\ v \in G)$ è una relazione* *di equivalenza, e l'insieme $\mathcal{G}'$ delle relative classi di equivalenza* $[(\gamma, u, v)]$ *è un $\mathcal{A}$-modulo sinistro rispetto alle due leggi di composizione* (7) *e* (8). *Questo $\mathcal{A}$-modulo sinistro $\mathcal{G}'$ è estensione di un S-semigruppo commutativo sinistro G'* (v. (9)) *S-isomorfo* (mediante la (10)) *a G, ed ogni elemento ξ' di $\mathcal{G}'$ è rappresentabile nella forma*

$$\xi' = \gamma^{-1}(\eta' - \zeta'), \tag{13}$$

con $\gamma \in M$, η', $\zeta' \in G'$.

Da questo teorema segue subito il corollario enunciato nel n.° 1. E infatti, quanto alla sufficienza della C) (per la necessità, v. il n.° 1), posto $\mathcal{G} = (\mathcal{G}' \dot{-} G') \dot{+} G$, e detta Φ la corrispondenza biunivoca fra $\mathcal{G}'$ e $\mathcal{G}$ che subordina su $\mathcal{G}' \dot{-} G'$ l'identità e fra G' e G l'S-isomorfismo di cui parla il preced. teorema, basta definire un'addizione in $\mathcal{G}$ ed una moltiplicazione fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{G}$ in modo che Φ sia un $\mathcal{A}$-isomorfismo; l'insieme $\mathcal{G}$ diventa allora un $\mathcal{A}$-modulo sinistro, che è appunto un $\mathcal{A}$-m.s. di G rispetto ad M (v. (13)).

Quanto poi all'ultima parte del coroll. del n.° 1, basta osservare che, se $\mathcal{G}$ è un qualsiasi $\mathcal{A}$-m. s. di G rispetto ad M (supposto esistente), in esso valgono (cfr. il 4° capov. del n.° 6) le seguenti regole di calcolo (si ricordi la (1)):

$$\gamma^{-1}(u - v) = \gamma_1^{-1}(u_1 - v_1) \tag{14}$$

se e solo se vale la (5);

$$\begin{aligned} &\gamma^{-1}(u - v) + \gamma_1^{-1}(u_1 - v_1) = \\ &= \alpha^{-1}(ru + sv + r_1u_1 + s_1v_1 - (rv + su + r_1v_1 + s_1u_1)), \end{aligned} \tag{15}$$

dove $\alpha \in M$, r, s, r_1, $s_1 \in S$ soddisfano alle (3);

$$\gamma^{-1}(a - b) \cdot \gamma_1^{-1}(u_1 - v_1) = (\nu\gamma)^{-1}(pu_1 + qv_1 - (pv_1 + qu_1)) \tag{16}$$

dove $\nu \in M$, p, $q \in S$ soddisfano alla (8') ($\gamma^{-1}(a - b) \in \mathcal{A}$). Ciò è sufficiente per concludere che la corrispondenza che associa gli elementi di due qualsiasi $\mathcal{A}$-m.s. di G rispetto ad M ammettenti una medesima rappresentazione $\gamma^{-1}(u - v)$ è un $\mathcal{A}$-isomorfismo. La dimostrazione del coroll. del n.° 1 è perciò completata.

4. - Detti *opposti* due semianelli S, S' se sono opposti ([3], n.° 11) i loro pseudogruppi moltiplicativi mentre coincidono le loro parti additive, osserveremo che ogni S-semigruppo sinistro è (rispetto alle sue due stesse leggi di composizione interna ed esterna) un *S'-semigruppo destro* (e viceversa), quest'ultimo concetto non abbisognando di chiarimento (cfr. il 1° capov. del n.° 14 di [3] e le referenze ivi citate).

Vale il teorema che si deduce dal coroll. del n.° 1 *leggendo destro invece di sinistro, ed* $u\gamma$, $u_1\gamma$, $(u-v)\gamma^{-1}$ *invece risp. di* γu, γu_1, $\gamma^{-1}(u-v)$. Basta infatti ricordare una definizione data in [1] (penult. capov. di p. 495) e sfruttare opportunamente l'osservazione del precedente capoverso (cfr. [2], ult. capov. di p. 187).

I simboli S, M, G avendo il significato detto nell'enunciato del coroll. del n.° 1, se esistono sia un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}$ che un semianello dei quozienti a sinistra $\mathfrak{S}$ ([3], 1° capov. di p. 107, 2° capov. di p. 105) di S rispetto ad M, ogni $\mathfrak{A}$-modulo supplementare $\mathfrak{G}$ di G rispetto ad M, ove esista, è estensione di un *$\mathfrak{S}'$-modulo complementare* (*$\mathfrak{S}'$-m.c.*) *di G rispetto ad M* ([3], 1° capov. di p. 107 e 106, 1° e 3° capov. di p. 98, 4°-ult. capov. di p. 88) avente la stessa parte additiva $\mathfrak{G}$, con $\mathfrak{S}'$ immagine isomorfa di $\mathfrak{S}$; viceversa, ogni $\mathfrak{S}$-m.c. $\mathfrak{G}'$ di G rispetto ad M, ove esista, si può estendere ad un $\mathfrak{A}'$-m.s. di G rispetto ad M avente la stessa parte additiva $\mathfrak{G}'$, con $\mathfrak{A}'$ immagine isomorfa di $\mathfrak{A}$. Infatti, la 1ª osservazione essendo evidente ($\mathfrak{S}'$ è l'insieme degli elementi di $\mathfrak{A}$ della forma $\gamma^{-1}a$, con $\gamma \in M$, $a \in S$) quanto alla 2ª (viceversa) basta notare che l'anello $\mathfrak{A}'$ delle differenze di $\mathfrak{S}$ ([3], p. 120) è un anello complementare sinistro di S rispetto ad M ([3], p. 219, coroll. 13) e che il modulo $\mathfrak{G}'$ diventa appunto un $\mathfrak{A}'$-m.s. di G rispetto ad M ove si definisca la moltiplicazione di $x' = \gamma^{-1}(a-b) \in \mathfrak{A}'$ ($\gamma \in M$, a, $b \in S$) per $\xi' \in \mathfrak{G}'$ nel modo sequente:

$$x'\xi' = (\gamma^{-1}a)\xi' - (\gamma^{-1}b)\xi',$$

([2], fine del 1° capov. di p. 182).

Osserveremo ancora che, nelle ipotesi del coroll. del n.° 1, se l'S-semigruppo commutativo sinistro G è, in particolare, la parte additiva del semianello S (la moltiplicazione fra

S e G essendo quella definita in $S = G$), la parte additiva $\mathfrak{G}$ di un qualsiasi $\mathfrak{A}$-m.s. di G rispetto ad M non è altro (v. l'ult. capov. del n.° 3) che la parte additiva di un anello complementare sinistro di S rispetto ad M, (cfr. [2], 2° capov. di p. 191).

Si osservi infine che, *se, in particolare, il semianello S è commutativo* ([1], p. 475), *le definizioni* (6), (7), (8) *sono risp. equivalenti alle seguenti*:

$$(\bar{6}) \quad [(\gamma, u, v)] = [(\gamma_1, u_1, v_1)] \text{ se e solo se } \gamma_1 u + \gamma v_1 = \gamma_1 v + \gamma u_1,$$

$$(\bar{7}) \quad [(\gamma, u, v)] + [(\gamma_1, u_1, v_1)] = [(\gamma\gamma_1, \gamma_1 u + \gamma u_1, \gamma_1 v + \gamma v_1)],$$

$$(\bar{8}) \quad \gamma^{-1}(a - b) \cdot [(\gamma_1, u_1, v_1)] = [(\gamma\gamma_1, a u_1 + b v_1, a v_1 + b u_1)].$$

Ciò si vede (ricordando il lemma del n.° 1 e) particolarizzando opportunamente la scelta degli elementi ausiliari nelle (6), (7), (8) (cfr. [1], p. 497).

5. - Con referenza al coroll. del n.° 1, *se, in particolare, S è un anello, $\mathfrak{A}$* è un anello dei quozienti a sinistra di S rispetto ad M ([1], p. 494), e si ritrova allora il coroll. 2' di [3] (p. 106), relativo al caso in cui $G = \Gamma$ è un semigruppo commutativo (cfr. [3], p. 98, 1° e 3° capov.).

Se, in particolare, S è un anello e il semigruppo G è un gruppo, il coroll. del n.° 1 fornisce nuovamente il corollario a p. 187 di [2] (dovuto ad Asano).

Se il semigruppo G è un gruppo (commutativo), ferme restando le altre ipotesi del coroll. del n.° 1, da questo si trae immediatamente il seguente altro

COROLLARIO: *I simboli S ed M abbiano il significato detto nell'enunciato del coroll. del n.°* 1, *ed esista un anello complementare sinistro $\mathfrak{A}$ di S rispetto ad M. Sia inoltre G un S-modulo sinistro. In queste ipotesi, la cond.* C) *del n.°* 1 *è necessaria e sufficiente affinchè esista un «$\mathfrak{A}$-modulo supplementare ($\mathfrak{A}$-m.s) di G rispetto ad M», cioè un $\mathfrak{A}$-modulo sinistro $\mathfrak{G}$, estensione di G e tale che ogni $\xi \in \mathfrak{G}$ sia rappresentabile nella forma*

$$(17) \qquad \xi = \gamma^{-1} u \qquad (\gamma \in M,\ u \in G).$$

Se un tale $\mathcal{G}$ esiste, esso è univocamente determinato da G ed M a meno di isomorfismi.

Se la cond. C) è soddisfatta, per la costruzione di questo $\mathcal{A}$-m.s. $\mathcal{G}$ dell'S-modulo sinistro G rispetto ad M si può anche seguire una via diversa da quella indicata dal teor. del n.° 3. Precisamente, definita nell'insieme delle coppie ordinate (γ, u) $(\gamma \in M,\ u \in G)$ una relazione binaria ponendo:

$$(\gamma, u) \backsim (\gamma_1, u_1) \tag{18}$$

se esistono cinque elementi r, s, r_1, $s_1 \in S$, $\alpha \in M$ soddisfacenti alle (3) e tali che

$$ru - su = r_1 u_1 - s_1 u_1 , \tag{18'}$$

denotato adesso, ove la (18) sia una relazione di equivalenza, con $\mathcal{G}'$ l'insieme delle relative classi di equivalenza $[(\gamma, u)]$, date in $\mathcal{G}'$ la seguente *definizione di addizione*:

$$[(\gamma, u)] + [(\gamma_1, u_1)] = [(\alpha, ru - su + r_1 u_1 - s_1 u_1)], \tag{19}$$

dove $\alpha \in M$, r, s, r_1, $s_1 \in S$ soddisfano alle (3), e la seguente *definizione di moltiplicazione di* $\gamma^{-1}(a - b) \in \mathcal{A}$ $(\gamma \in M,\ a,\ b \in S)$ *per* $[(\gamma_1, u_1)] \in \mathcal{G}'$:

$$\gamma^{-1}(a - b) \cdot [(\gamma_1, u_1)] = [(\nu\gamma, pu_1 - qu_1)], \tag{20}$$

dove $\nu \in M$, p, $q \in S$ soddisfano alla (8'), considerata fra G e il sottinsieme G' di $\mathcal{G}'$ così definito:

$$[(\gamma, \gamma u)] \in G' \qquad (\gamma \in M,\ u \in G) \tag{21}$$

la corrispondenza

$$u \to [(\gamma, \gamma u)], \tag{22}$$

si può sfruttare, invece del teor. del n.° 3, il seguente altro

TEOREMA: *Nelle ipotesi del precedente corollario, se la condiz.* C) *è soddisfatta, la relazione binaria* (18), *definita nell'insieme delle coppie ordinate* (γ, u) $(\gamma \in M,\ u \in G)$, *è una relazione di equivalenza, e l'insieme* $\mathcal{G}'$ *delle relative classi di equivalenza* $[(\gamma, u)]$ *è un* $\mathcal{A}$*-modulo sinistro rispetto alle due leggi di* *composizione* (19) *e* (20). *Questo* $\mathfrak{A}$*-modulo sinistro* $\mathcal{G}'$ *è estensione di un* S*-modulo sinistro* G' (v. (21)) S*-isomorfo* (mediante la (22)) *a* G*, ed ogni elemento* ξ' *di* $\mathcal{G}'$ *è rappresentabile nella forma*

$$\xi' = \gamma^{-1}\eta'$$

con $\gamma \in M$, $\eta' \in G'$.

Dimostrazione: Il sottinsieme $\mathfrak{D}$ di $\mathfrak{A}$ costituito dagli elementi della forma $a - b$ $(a, b \in S)$ è ([3], 3° capov. di p. 121) un anello delle differenze del semianello S. D'altra parte, rispetto alla seguente definizione di moltiplicazione di $a - b \in \mathfrak{D}$ $(a, b \in S)$ per $u \in G$:

$$(a - b)u = au - bu,$$

il modulo G diventa (come agevolmente si verifica — cfr. la fine del terzo capov. del n.° 4 —) un $\mathfrak{D}$-modulo sinistro, estensione del dato S-modulo sinistro G. Osservato allora che ogni elemento del sottinsieme (moltiplicativamente chiuso) M di $\mathfrak{D}$ è semplificabile in $\mathfrak{D}$, e che $\mathfrak{A}$ è un anello dei quozienti a sinistra di $\mathfrak{D}$ rispetto ad M, basta applicare a questo $\mathfrak{D}$-modulo sinistro G i risultati ottenuti nel n.° 10 di [2] per concludere appunto col teorema sopra enunciato.

La deduzione del corollario precedente da questo teorema è poi immediata, sulla base di considerazioni già fatte (cfr. il penult. capov. del n.° 3).

Se, in particolare, il semianello S *è commutativo, le definizioni* (18), (19), (20) *sono risp. equivalenti alle seguenti*:

$$(\overline{18}) \qquad [(\gamma, u)] = [(\gamma_1, u_1)] \quad \text{se e solo se} \quad \gamma_1 u = \gamma u_1,$$

$$(\overline{19}) \qquad [(\gamma, u)] + [(\gamma_1, u_1)] = [(\gamma\gamma_1, \gamma_1 u + \gamma u_1)],$$

$$(\overline{20}) \qquad \gamma^{-1}(a - b)\cdot[(\gamma_1, u_1)] = [(\gamma\gamma_1, au_1 - bu_1)].$$

6. - Dal coroll. del n.° 1 discende immediatamente anche la seguente, ben nota proposizione:

Corollario: Di ogni semigruppo additivo commutativo G esiste un *gruppo delle differenze,* cioè un modulo $\mathcal{G}$, estensione di G e tale che ogni $\xi \in \mathcal{G}$ sia rappresentabile nella forma

$$\xi = u - v \qquad (u, v \in G).$$

Questo modulo $\mathcal{G}$ è univocamente determinato da G a meno di isomorfismi.

Infatti, denotato con N il semianello dei numeri naturali, il semigruppo G può evidentemente considerarsi come un N-semigruppo (commutativo sinistro), il prodotto di $n \in N$ per $u \in G$ essendo definito come la somma di n addendi eguali ad u:

$$nu = u + \dots + u.$$

Basta allora applicare a questo N-semigruppo G il coroll. del n.° 1, con $S = N$, $M = \{1\}$, $\mathcal{A}$ = anello dei numeri interi, per ottenere appunto il corollario su enunciato.

A sua volta, il teor. del n.° 3 è una facile conseguenza del proprio corollario del n.° 1. Infatti, nelle ipotesi del teor. del n.° 3, esiste, per il coroll. del n.° 1, un $\mathcal{A}$-m.s. $\mathcal{G}$ di G rispetto ad M. È agevole verificare (come si è già osservato nel n.° 3) che in $\mathcal{G}$ valgono le regole di calcolo (14), (15) e (16); (basta a tal fine ricordare, in base alla definizione di $\mathcal{A}$ — cfr. [1], 1° capov. di p. 478 —, che, dati comunque a, $b \in S$, $\gamma_1 \in M$, esistono $\beta \in M$, r_1, $s_1 \in S$ tali che $\beta(a - b) = (r_1 - s_1)\gamma_1$; donde, in particolare, se $a = 2\gamma$, $b = \gamma$, con $\gamma \in M$: $(r - s)\gamma = (r_1 - s_1)\gamma_1 = \alpha \in M$, avendo posto $r = 2\beta$, $s = \beta$, $\alpha = \beta\gamma$). Definita allora nell'insieme delle terne ordinate (γ, u, v) $(\gamma \in M$, u, $v \in G)$ la relazione binaria (5), si osservi che la (5) vale se e solo se vale, in $\mathcal{G}$, l'eguaglianza (14); ciò evidentemente sufficiente per concludere che la (5) è una relazione di equivalenza. Ne segue che è biunivoca la corrispondenza:

$$\gamma^{-1}(u - v) \rightarrow [(\gamma, u, v)],$$

fra $\mathcal{G}$ e l'insieme $\mathcal{G}'$ i cui elementi sono le relative classi di equivalenza $[(\gamma, u, v)]$. Detta Ψ questa corrispondenza, per raggiungere la dimostrazione del teor. del n.° 3, basta semplicemente definire in $\mathcal{G}'$ un'addizione e fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{G}'$ una moltiplicazione in modo che Ψ sia un $\mathcal{A}$-isomorfismo (cioè — in base alle regole (15) e (16) — dare le definizioni (7) e (8)): $\mathcal{G}'$ diventa automaticamente un $\mathcal{A}$-modulo sinistro avente le proprietà dichiarate.

Il coroll. del n.° 1 e quindi anche (v. il preced. capov.) *il teor. del n.* 3 *è, a sua volta, una facile conseguenza dei due* *suoi corollari di questo e del preced. numero.* Infatti (sufficienza della C)), sia G' un gruppo delle differenze del semigruppo G (coroll. di questo n.°). Rispetto alla seguente definizione di moltiplicazione di $a \in S$ per $u - v \in G'$ $(u, v \in G)$:

$$a(u - v) = au - av,$$

questo modulo G' diventa (come subito si verifica) un S-modulo sinistro, estensione del dato S-semigruppo (commutativo) sinistro G e soddisfacente alla condiz. C) (ove si legga $u - v$, $u_1 - v_1 \in G'$ invece di u, $u_1 \in G$). Basta allora applicare a G' il coroll. del n.° 5 (sufficienza della C)).

Il teor. del n.° 5 è un facile corollario del teor. del n.° 3. Basta infatti osservare che il teor. del n.° 5 (del quale avevamo indicato la dimostrazione diretta) è, a sua volta, una semplice conseguenza del proprio corollario del n.° 5 stesso; ciò si riconosce con considerazioni su cui non insistiamo, perchè perfettamente analoghe a quelle svolte nel penult. capoverso.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOCCIONI, D.: *Semianelli complementarizzabili,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 24 (1955), pp. 474-509.

[2] BOCCIONI, D.: *$\mathfrak{F}$-gruppoide dei quozienti di un gruppoide con operatori,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 25 (1956), pp. 176-195.

[3] BOCCIONI, D.: *Q-pseudogruppi complementarizzabili,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 26 (1956), pp. 85-123.