Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Bruno Pini

Sulle equazioni paraboliche lineari del quarto ordine, II

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 387-410
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__387_0>

SULLE EQUAZIONI PARABOLICHE LINEARI DEL QUARTO ORDINE, *II*

Nota (*) *di* BRUNO PINI (*a Modena*)

Consideriamo l'equazione

$$\text{(1)} \qquad \bar{a}(x, y)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\bar{b}(x, y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \bar{c}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+ \sum_0^3{}_i \, \bar{a}_i(x, y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} + \bar{d}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \bar{e}(x, y)\frac{\partial x}{\partial y} = \bar{f}(x, y)$$

essendo i coefficienti e il termine noto funzioni continue in un campo $\mathcal{A}$ del piano x, y ove si suppone che $\bar{a}$ e $\bar{c}$ siano di segno costante. In I[1]) si è studiato il caso che l'equazione

$$\text{(2)} \qquad \bar{a}t^2 + 2\bar{b}t + \bar{c} = 0$$

abbia due radici reali dello stesso segno, distinte, e si è accennato al caso di una radice doppia. Studiamo attualmente il caso che (2) abbia due radici complesse coniugate; successivamente mostriamo come si possano unificare i risultati già conseguiti e quelli che qui conseguiremo provando che sussiste l'invertibilità in piccolo di una certa trasformazione lineare cui si riduce il problema che trattiamo. Da ultimo esporremo brevemente un ulteriore problema. Sui coefficienti, termine noto e dati faremo ipotesi di regolarità analoghe a quelle di I; esse sono certamente sovrabbondanti, alcune in

---

(*) Pervenuta in Redazione il 28 settembre 1957.
Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Modena.

1) Indicheremo con I la Nota dello stesso titolo della presente che la precede; con I-1, ..., I-(1), ..., indicheremo rispettivamente il n. 1, ..., e la formola (1), ..., di tale Nota.

modo palese, ma permettono una trattazione più rapida; d'altronde in altro luogo è stato indicato un ragionamento che permette l'attenuazione di tali ipotesi.

1. Posizione del problema e teorema di unicità.

Nelle ipotesi di regolarità sui coefficienti di (1) specificate in *I*-**1** e nell'ipotesi che la (2) abbia due radici complesse coniugate, e quindi $\bar{a}$ e $\bar{c}$ abbiano il medesimo segno, le trasformazioni *I*-(3'') e *I*-(3') permettono di riferirci all'equazione

$$\mathfrak{L}[u] = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2a(x, y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \tag{3}$$

$$+ \sum_0^3{}_i\, b_i(x, y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} + c(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y)$$

e al rettangolo $\mathfrak{R}: 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq h.$

Supponiamo che in tutto $\mathfrak{R}$ sia

$$0 < a < 1. \tag{4}$$

Il caso di $a \equiv 0$ richiede una trattazione a parte.

Il problema che consideriamo è quello stesso di *I*: *trovare una funzione* $u(x, y)$ *continua in* $\mathfrak{R}$ *insieme alle derivate prime e tale che*

$$\mathfrak{L}[u] = f \quad per \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < y \leq h,$$

essendo prefissati i valori di

$$u(x, 0),\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} \qquad per \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, y),\ u(1, y),\ \frac{\partial u(0, y)}{\partial x},\ \frac{\partial u(1, y)}{\partial x} \qquad per \quad 0 \leq y \leq h.$$

Si ha che:

Nelle ipotesi di I-**2** *sui coefficienti di* (3) *esiste al più una soluzione del problema indicato, continua in* $\mathfrak{R}$ *insieme alle sue derivate* $\partial/\partial x$, $\partial^2/\partial x^2$, $\partial^3/\partial x^3$, $\partial/\partial y$, $\partial^2/\partial x \partial y$,

La dimostrazione è quella stessa di *I*-**2**.

2. Il problema per l'equazione ridotta.

Consideriamo l'*equazione ridotta*

$$(5)\qquad \mathfrak{L}_0[u] = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2a\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

essendo a una costante tale che $0 < a < 1$. Posto

$$b = \sqrt{1 - a^2},$$

poichè la (5) si può scrivere

$$(5')\qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (a + ib)\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (a - ib)\frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0\,,$$

essendo i l'unità immaginaria, si hanno subito i due integrali

$$(6_1)\qquad U_1(P\,;\,Q) = U_1(x,\,y\,;\,\xi,\,\eta) = = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\cos\left[b\,\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right]\exp\left[-a\,\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right]$$

$$, \quad y > \eta,$$

$$(6_2)\qquad U_2(P\,;\,Q) = U_2(x,\,y\,;\,\xi,\,\eta) = = \frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\operatorname{sen}\left[b\,\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right]\exp\left[-a\,\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right]$$

i quali, prolungati con lo zero per $y \leq \eta$, si prestano a un ruolo analogo a quello della soluzione fondamentale dell'equazione del calore.

Esiste un numero α, $0 < \alpha < \pi/4$, tale che

$$(7)\qquad \cos 2\alpha = a \quad , \quad \operatorname{sen} 2\alpha = b\,;$$

ricordiamo poi che

$$(8_1)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(t^2 \operatorname{sen} 2\alpha)\exp(-t^2\cos 2\alpha)\,dt = \sqrt{\pi}\cos\alpha$$

$$(8_2)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen}(t^2 \operatorname{sen} 2\alpha)\exp(-t^2\cos 2\alpha)\,dt = \sqrt{\pi}\operatorname{sen}\alpha.$$

Siano x_0 e x_1 due numeri tali che $x_0 < 0$, $x_1 > 1$ e $\omega_i(x)$, $i = 1, 2$, due funzioni continue su $x_0 \leq x \leq x_1$. Posto

$$(9) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{x}^{x_1} \left\{ \cos\left[b \frac{(x-\xi)^2}{4y}\right] \omega_1(\xi) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{sen}\left[b \frac{(x-\xi)^2}{4y}\right] \omega_2(\xi) \right\} \exp\left[-a \frac{(x-\xi)^2}{4y}\right] d\xi,$$

si ha, tenendo presenti le $(8_{1,2})$,

$$\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ y \to 0+}} u(x, y) = \omega_1(\bar{x}) \cos\alpha + \omega_2(\bar{x}) \operatorname{sen}\alpha \quad , \quad x_0 < \bar{x} < x_1 .$$

Supposto poi che le $\omega_i(x)$ siano dotate di derivate seconde continue, poichè

$$\frac{\partial U}{\partial y} = a \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} - b \frac{\partial^2 U_2}{\partial \xi^2} \quad , \quad \frac{\partial U_2}{\partial y} = b \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial^2 U_2}{\partial \xi^2} ,$$

onde

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x} \left[\left(a \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} - b \frac{\partial^2 U_2}{\partial \xi^2}\right) \omega_1(\xi) + \left(b \frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi^2} + a \frac{\partial^2 U_2}{\partial \xi^2}\right) \omega_2(\xi)\right] d\xi ,$$

eseguendo alcune integrazioni per parti e tenendo presenti le (7) si ha

$$\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ y \to 0+}} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \omega_1''(\bar{x}) \cos 3\alpha + \omega_2'(\bar{x}) \operatorname{sen} 3\alpha \quad , \quad x_0 < \bar{x} < x_1 .$$

Pertanto se $f_1(x)$ e $f_2(x)$ sono due funzioni definite su $0 \leq x \leq 1$, la prima continua con la derivata seconda e la seconda continua, se si prolungano in tutto $x_0 \leq x \leq x_1$ in modo che ivi abbiano la detta regolarità e si prende

$$\omega_1(x) = \frac{1}{b} \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{\xi} [f_1''(t) \operatorname{sen} 3\alpha - f_2(t) \operatorname{sen} \alpha] \, dt d\xi$$

$$\omega_2(x) = \frac{f_1(x) - \omega_1(x) \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} ,$$

la (9) è soluzione di (5) per $y > 0$ ed è tale che

$$\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ y \to 0+}} u(x, y) = f_1(\bar{x}), \qquad \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ y \to 0+}} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = f_2(\bar{x}), \quad 0 \leq \bar{x} \leq 1.$$

Pertanto il problema che ci interessa relativamente alla (5) e a $\mathfrak{R}$ si riconduce alla determinazione di una funzione $u(x, y)$ continua in $\mathfrak{R}$ con le derivate prime e tale che

$$\mathfrak{L}_0[u] = 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 1 \ , \ 0 < y \leq h,$$

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, y) = f_1(y), \quad u(1, y) = f_2(y), \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \varphi_1(y), \quad \frac{\partial u(1, y)}{\partial x} = \varphi_2(y)$$

con $f_1(0) = f_2(0) = 0$. Richiedendo la continuità delle derivate prime in $\mathfrak{R}$ si dovrà supporre le $\varphi_i(y)$ continue con $\varphi_i(0) = 0$ e le $f_i'(y)$ continue con $f_i'(0) = 0$.

Cercando la soluzione sotto la forma

$$(10) \qquad u(x, y) = \sum_1^2{}_i \int_0^y [U_i(x, y; 0, \eta)\alpha_i(\eta) + U_i(x, y; 1, \eta)\beta_i(\eta)] d\eta$$

si è condotti al sistema di equazioni integrali di Volterra

$$(11_1) \qquad \pi\alpha_1(y) + \sum_1^2{}_i \int_0^y \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_\eta^y \frac{U_i(0, z; 1, \eta)}{\sqrt{y - z}} dz \right) \beta_i(\eta) d\eta = \int_0^y \frac{f_1'(z)\, dz}{\sqrt{y - z}}$$

$$(11_2) \qquad \pi\beta_1(y) + \sum_1^2{}_i \int_0^y \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_\eta^y \frac{U_i(1, z; 0, \eta)}{\sqrt{y - z}} dz \right) \alpha_i(\eta) d\eta = \int_0^y \frac{f_2'(z)\, dz}{\sqrt{y - z}}$$

$$(11_3) \qquad -\sqrt{\pi} \cos \alpha \cdot \alpha_1(y) + \sqrt{\pi} \operatorname{sen} \alpha \cdot \alpha_2(y) +$$
$$+ \int_0^y \frac{a\beta_1(\eta) - b\beta_2(\eta)}{2(y - \eta)} U_1(0, y; 1, \eta) d\eta +$$
$$+ \int_0^y \frac{a\beta_2(\eta) + b\beta_1(\eta)}{2(y - \eta)} U_2(0, y; 1, \eta) d\eta = \varphi_1(y)$$

$$(11_4)\qquad \sqrt{\pi}\cos\alpha\cdot\beta_1(y)-\sqrt{\pi}\operatorname{sen}\alpha\cdot\beta_2(y)+$$
$$+\int_0^y\frac{b\alpha_2(\eta)-a\alpha_1(\eta)}{2(y-\eta)}U_1(1,\ y;\ 0,\ \eta)d\eta-$$
$$-\int_0^y\frac{a\alpha_2(\eta)+b\alpha_1(\eta)}{2(y-\eta)}U_2(1,\ y;\ 0,\ \eta)d\eta=\varphi_2(y).$$

Il determinante dei termini integrati è eguale a $\pi^3\operatorname{sen}^2\alpha \neq 0$, onde il sistema $(11_{1,2,3,4})$ si scrive

$$(12)\qquad \boldsymbol{a}(y)+\int_0^y\boldsymbol{K}(y,\ \eta)\boldsymbol{a}(\eta)d\eta=\boldsymbol{b}(y),$$

analogo al sistema I-(20), del quale ha la stessa regolarità.

3. Il problema per l'equazione completa.

Considerazioni analoghe a quelle fatte in I-**4** suggeriscono di assumere come *soluzione fondamentale* della (5) la funzione

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned}
&V(P,\ Q)=V(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=\\
&=\operatorname{sen}\alpha\cdot\left[2\sqrt{y-\eta}\cos\left(\frac{b(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)\exp\left(-\frac{a(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+(x-\xi)\int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}}\left(a\cos\frac{bt^2}{4}+b\operatorname{sen}\frac{bt^2}{4}\right)\exp\left(-\frac{at^2}{4}\right)dt\right]+\\
&\quad+\cos\alpha\cdot\left[2\sqrt{y-\eta}\operatorname{sen}\left(\frac{b(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)\exp\left(-\frac{a(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right)+\right.\\
&\qquad\left.+(x-\xi)\int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}}\left(a\operatorname{sen}\frac{bt^2}{4}-b\cos\frac{bt^2}{4}\right)\exp\left(-\frac{at^2}{4}\right)dt\right]\\
&\hspace{20em}\text{per } y>\eta,\\
&V(P,\ Q)=V(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=0\qquad \text{per } y\leq\eta.
\end{aligned}\right.$$

Se $f(P)$ è una funzione continua in $\mathfrak{R}$, si ha

$$\lim_{y-\eta\to 0+}\int_0^1 V(P,\ Q)f(Q)d\xi = 0 \tag{14}$$

$$\lim_{\substack{x\to\bar{x}\\ y,\eta\to\bar{y}}}\int_0^1 \frac{\partial V(P,\ Q)}{\partial y} f(Q)d\xi = 2b\sqrt{\pi}\, f(\bar{x},\ \bar{y}), \qquad 0<\bar{x}<1. \tag{15}$$

Sulla base di (14) e (15) si ha che se $f(P)$ è continua in $\mathfrak{R}$ e hölderiana in ogni punto P tale che $0<x<1$, $0<y\leq h$, posto

$$u(P) = \iint_{\mathfrak{R}_y} V(P,\ Q)\, f(Q)dQ, \tag{16}$$

si ha

$$\frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i\partial y^j} = \iint_{\mathfrak{R}_y}\frac{\partial^{i+j}V}{\partial x^i\partial y^j} f(Q)dQ \tag{17}$$

per $0\leq i+j\leq 3$, $0\leq j\leq 1$, escluso il caso di $i=2$, $j=1$; inoltre in ogni punto P tale che $0<x<1$, $0<y\leq h$, si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2b\sqrt{\pi}f(P) + \iint_{\mathfrak{R}_y}[f(Q)-f(P)]\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}dQ + f(P)\int_0^y\left(\int_0^1\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}d\xi\right)d\eta \tag{18$_1$}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y} = \iint_{\mathfrak{R}_y}[f(Q)-f(P)]\frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial y}dQ + f(P)\int_0^y\left(\int_0^1\frac{\partial^3 V}{\partial x^2\partial y}d\xi\right)d\eta \tag{18$_2$}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \iint_{\mathfrak{R}_y}[f(Q)-f(P)]\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}dQ + f(P)\int_0^y\left(\int_0^1\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}d\xi\right)d\eta, \tag{18$_3$}$$

e conseguentemente

$$\mathfrak{L}_0[u] = 2b\sqrt{\pi}f(P). \tag{19}$$

Se indichiamo poi con $V(Q;\ P,\ Q)$ la funzione ottenuta dalla (13) ponendo $a(Q)$ e $b(Q)$ al posto di a e b e se $a(P)$ si suppone dotata di derivate prime continue, sussiste ancora la (14), la (15) con $b(\bar{x}, \bar{y})$ al posto di b, la (17), le $(18_{1,2,3})$ e la (19) con $b(P)$ al posto di b. Come in *I*-**4** si dimostra che esistono due costanti positive C e c tali che

$$(20) \qquad \left| \frac{\partial^{i+j} V(Q;\ P,\ Q)}{\partial x^i \partial y^j} \right| < \frac{C}{(y-\eta)^{\frac{i+2j-1}{2}}} \exp\left[-c \frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)} \right]$$

per $i+j$ minore di un prefissato arbitrario numero naturale.

Ne segue che se i coefficienti di (3) sono dotati di derivate prime continue in $\mathfrak{R}$ e $\varphi(P)$ è una funzione continua in $\mathfrak{R}$, la funzione

$$(21) \qquad v(P) = \iint_{\mathfrak{R}_y} \mathfrak{L}[V(Q;\ P,\ Q)]\varphi(Q)dQ$$

verifica in ogni punto P di $\mathfrak{R}$ una condizione di Hölder.

In base alla (20) e a quest'ultima proprietà si posssono integralmente ripetere i ragionamenti di *I*-**5** e concludere che:

Se i coefficienti di (3) *e il termine noto sono funzioni dotate di derivate prime continue, se i dati assegnati su* $x=0,\ 1,\ 0 \leq y \leq h$ *e* $y=0,\ 0 \leq x \leq 1$, *sono la traccia di una funzione* φ *continua su* $\mathfrak{R}$ *insieme a tutte le sue derivate che figurano in* $\mathfrak{L}$ *ed* $\mathfrak{L}\,[\varphi]$ *è hölderiana, allora il problema in esame ha una soluzione. Questa è poi unica se i coefficienti di* $\mathfrak{L}$ *hanno la regolarità specifica in I*-**2**.

4. Unificazione dei casi $a > 1$, $a \equiv 1$, $0 < a < 1$.

Il problema in esame per l'equazione (3) è stato trattato in I nell'ipotesi di $a > 1$ e accennato nell'ipotesi di $a \equiv 1$ e nei precedenti numeri della presente Nota trattato nell'ipotesi di $0 < a < 1$. Poichè i risultati sono gli stessi in tutti i casi, è desiderabile poter togliere la limitazione via via imposta ad a, lasciando la sola condizione $a > 0$, essendo quella motivata soltanto dal fatto che la soluzione fondamentale per l'equazione ridotta associata alla (3) si esprime diversamente in ciascuno dei tre casi.

Vogliamo presentemente ottenere questo risultato; allo scopo, fondandoci su un criterio dovuto a R. Caccioppoli sulla inversione in piccolo di una trasformazione lineare tra spazi normali e completi, faremo vedere che il problema in questione ha soluzione se le funzioni $a(x, y) - 1$, $b_i(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$, dotate di una certa regolarità, hanno i moduli sufficientemente piccoli. Un prolungamento permetterebbe poi di eliminare quest'ultima restrizione.

Riprendiamo in esame sotto qualche nuovo aspetto il problema in argomento relativo alla equazione

$$\mathfrak{L}[u] = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \tag{22}$$

Poniamo

$$\overline{V}(P, Q) = \begin{cases} \sqrt{y-\eta}\, \exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right] & \text{per } y > \eta \\ 0 & \text{per } y \leq \eta \end{cases} \tag{23}$$

e indichiamo con $\overline{G}(P, Q)$ la relativa *funzione compensatrice* dimodochè, attualmente, $\overline{V}(P, Q) - \overline{G}(P, Q)$ è la funzione di Green relativa alla (22) e al rettangolo $\mathfrak{R}$.

Se $f(P)$ è continua in $\mathfrak{R}$ e soddisfa una condizione di Hölder in ogni punto P tale che $0 < x < 1$, $0 < y \leq h$, allora la funzione

$$u(P) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\mathfrak{R}_y} [\overline{V}(P, Q) - \overline{G}(P, Q)] f(Q)\, dQ = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(v(P) - w(P)) \tag{24}$$

è la soluzione del problema omogeneo per la (22).

Conveniamo di dire che una funzione $\varphi(P)$ definita in $\mathfrak{R}$ è ivi di classe $H^{(2\lambda, \lambda)}$ se per ogni coppia di punti P_1 e P_2 di $\mathfrak{R}$ riesce

$$|\varphi(P_1) - \varphi(P_2)| < K(|x_1 - x_2|^{2\lambda} + |y_1 - y_2|^{\lambda}).$$

Nel seguito intenderemo sempre che sia $0 < \lambda < 1/2$ e scriveremo anche $H^{(\lambda)}$ in luogo di $H^{(2\lambda, \lambda)}$.

Ciò premesso, proviamo che:

Se $f(P) \in H^{(2\lambda, \lambda)}$ ***in*** $\mathfrak{R}$ *e* $f(x, 0) \equiv 0$, ***allora la funzione*** (24) ***ha le derivate*** $\partial^2 u/\partial y^2$, $\partial^3 u/\partial x^2 \partial y$, $\partial^4 u/\partial x^4$ ***di classe*** $H^{(2\lambda, \lambda)}$ ***e nulle per*** $y = 0$.

Cominciamo con l'esaminare la funzione

$$v(P)=\iint_{\mathfrak{R}_y}\overline{V}(P,\ Q)f(Q)dQ.$$

Se $P\in\mathfrak{R}$ si ha

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=2\sqrt{\pi}f(P)+\iint_{\mathfrak{R}_y}[f(Q)-f(P)]\frac{\partial^2\overline{V}}{\partial y^2}dQ+ \tag{25}$$

$$+f(P)\int_0^y\int_0^1\frac{\partial^2\overline{V}}{\partial y^2}d\xi d\eta=\iint_{\mathfrak{R}_y}[f(Q)-f(P)]\frac{\partial^2\overline{V}}{\partial y^2}dQ+$$

$$+f(P)\int_0^1\left(\frac{1}{2y^{1/2}}+\frac{(x-\xi)^2}{4y^{3/2}}\right)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4y}\right)d\xi=A(P)+B(P).$$

È da osservare che nella prima espressione della derivata $\partial^2 v/\partial y^2$ se $x=0$ oppure $x=1$ va scritto $\sqrt{\pi}$ al posto di $2\sqrt{\pi}$.

Esaminiamo gl'incrementi di $\partial^2 v/\partial y^2$. Per fissare le idee supponiamo $\Delta y>0$. Supposto $y>\Delta y$ si ha

$$\Delta_y A(P)=\iint_{\mathfrak{R}_{y-\Delta y}}[f(Q)-f(P+\Delta y)]\left(\frac{\partial^2\overline{V}(P+\Delta y,\ Q)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\overline{V}(P,\ Q)}{\partial y^2}\right)dQ+$$

$$+[f(P)-f(P+\Delta y)]\iint_{\mathfrak{R}_{y-\Delta y}}\frac{\partial^2\overline{V}(P,\ Q)}{\partial y^2}dQ+$$

$$+\iint_{\mathfrak{R}_{y+\Delta y}-\mathfrak{R}_{y-\Delta y}}[f(Q)-f(P+\Delta y)]\frac{\partial^2\overline{V}(P+\Delta y,\ Q)}{\partial y^2}dQ-$$

$$-\iint_{\mathfrak{R}_y-\mathfrak{R}_{y-\Delta y}}[f(Q)-f(P)]\frac{\partial^2\overline{V}(P,\ Q)}{\partial y^2}dQ=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Poichè $f\in H^{(2\lambda,\lambda)}$, tenendo presente che per la $\overline{V}(P,\ Q)$ e per le sue derivate valgono limitazioni in tutto simili alle (20), si ha, indicando con K_1, K_2, ..., opportune costanti positive,

$$|I_4| < KC \int_{y-\Delta y}^{y} \int_0^1 \frac{|x-\xi|^{2\lambda} + (y-\eta)^\lambda}{(y-\eta)^{3/2}} \exp\left[-c\,\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right] d\xi d\eta <$$

$$< 2KC \int_{y-\Delta y}^{y} \frac{d\eta}{(y-\eta)^{1-\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} [(4t^2)^\lambda + 1] \exp(-ct^2) dt < K_4(\Delta y)^\lambda.$$

Analogamente

$$|I_3| < K_3(\Delta y)^\lambda .$$

Poichè

$$\left| \iint_{\mathfrak{R}_{y-\Delta y}} \frac{\partial^2 \overline{V}(P, Q)}{\partial y^2}\, dQ \right| = \left| \int_0^1 \left[\frac{\partial \overline{V}(P, Q)}{\partial \eta}\right]_{\eta=0}^{\eta=y-\Delta y} d\xi \right| < 4\sqrt{\pi}$$

è

$$|I_2| < K_2(\Delta y)^\lambda .$$

Infine, essendo θ un opportuno numero compreso tra 0 e 1,

$$I_1 = \Delta y \iint_{\mathfrak{R}_{y-\Delta y}} [f(Q) - f(P + \theta\Delta y)]\, \frac{\partial^3 \overline{V}(P + \theta\Delta y,\ Q)}{\partial y^3}\, dQ +$$

$$+ [f(P+\theta\Delta y) - f(P+\Delta y)] \iint_{\mathfrak{R}_{y-\Delta y}} \left[\frac{\partial^2 \overline{V}(P+\Delta y, Q)}{\partial y^2} - \frac{\partial \overline{V}(P, Q)}{\partial y^2}\right] dQ = I_1' + I_1''.$$

Per quanto si è visto precedentemente è

$$|I_1''| < K_1''(\Delta y)^\lambda ;$$

poi

$$|I_1| < KC\Delta y \int_0^{y-\Delta y} \int_0^1 \frac{|x-\xi|^{2\lambda} + (y+\theta\Delta y - \eta)^\lambda}{(y+\theta\Delta y-\eta)^{5/2}} \exp\left[-c\,\frac{(x-\xi)^2}{4(y+\theta\Delta y-\eta)}\right] d\xi d\eta <$$

$$< 2KC\Delta y \int_0^{y-\Delta y} \frac{d\eta}{(y+\theta\Delta y-\eta)^{2-\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} [(4t^2)^\lambda + 1] \exp(-ct^2) dt <$$

$$< \bar{K}_1' \left[\frac{\Delta y}{(y + \theta \Delta y)^{1-\lambda}} + \frac{(\Delta y)^\lambda}{(1 + \theta)^{1-\lambda}} \right] < K_1'(\Delta y)^\lambda.$$

Per $y \leq \Delta y$ il medesimo risultato è immediato.

È poi

$$\Delta_y B(P) = [f(P + \Delta y) - f(P)] \int_0^1 \frac{\partial \bar{V}(P + \Delta y\,;\, \xi,\, 0)}{\partial y}\, d\xi +$$

$$+ f(P) \int_0^1 \left[\frac{\partial \bar{V}(P + \Delta y\,;\, \xi,\, 0)}{\partial y} - \frac{\partial \bar{V}(P\,;\, \xi,\, 0)}{\partial y} \right] d\xi = J_1 + J_2.$$

Ovviamente

$$| J_1 | < K_1(\Delta y)^\lambda.$$

Tenendo presente che

$$| f(P) | = | f(x,\, y) - f(x,\, 0) | < K y^\lambda,$$

si ha poi

$$| J_2 | < K_2(\Delta y)^\lambda\,;$$

ciò è immediato se $y \leq \Delta y$; se $y > \Delta y$ ciò segue dal fatto che

$$|J_2| < K y^\lambda \Delta y \left| \int_0^1 \frac{\partial^2 \bar{V}(P + \theta \Delta y\,;\, \xi,\, 0)}{\partial y^2}\, d\xi \right| < 2KC \frac{y^\lambda \Delta y}{y + \theta \Delta y} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ct^2) dt$$

e che $y^\lambda \Delta y < y(\Delta y)^\lambda$. Concludendo si ha

$$(26_1) \qquad \left| \Delta_y \frac{\partial^2 v(P)}{\partial y^2} \right| < C_1 \,|\, \Delta y \,|^\lambda.$$

Esaminiamo ora l'incremento rispetto a x. Se $y > (\Delta x)^2$ si ha

$$\Delta_x A(P) = \iint\limits_{\mathcal{R}_{y-(\Delta x)^2}} [f(Q) - f(P + \Delta x)] \left(\frac{\partial^2 \bar{V}(P + \Delta x,\, Q)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \bar{V}(P,\, Q)}{\partial y^2} \right) dQ +$$

$$+ [f(P) - f(P + \Delta x)] \iint\limits_{\mathcal{R}_{y-(\Delta x)^2}} \frac{\partial^2 \bar{V}(P,\, Q)}{\partial y^2}\, dQ +$$

$$+\iint\limits_{\mathcal{R}_y-\mathcal{R}_{y-(\Delta x)^2}} [f(Q)-f(P+\Delta x)]\,\frac{\partial^2\overline{V}(P+\Delta x,\,Q)}{\partial y^2}\,dQ\,-$$

$$-\iint\limits_{\mathcal{R}_y-\mathcal{R}_{y-(\Delta x)^2}} [f(Q)-f(P)]\,\frac{\partial^2\overline{V}(P,\,Q)}{\partial y^2}\,dQ = I_1+I_2+I_3+I_4\,.$$

Si ha subito

$$|\,I_2\,| < K_2\,|\,\Delta x\,|^{2\lambda}$$

e, ragionando in modo analogo a quanto si è fatto prima,

$$|\,I_3\,| < K_3\,|\,\Delta x\,|^{2\lambda}, \qquad |\,I_4\,| < K_4\,|\,\Delta x\,|^{2\lambda}.$$

Infine, indicando con θ un opportuno numero compreso tra 0 e 1, si ha

$$I_1 = \Delta x\iint\limits_{\mathcal{R}_{y-(\Delta x)^2}} [f(Q)-f(P+\theta\Delta x)]\,\frac{\partial^3\overline{V}(P+\theta\Delta x,\,Q)}{\partial y^2\partial x}\,dQ\,+$$

$$+[f(P+\theta\Delta x)-f(P+\Delta x)]\iint\limits_{\mathcal{R}_{y-(\Delta x)^2}}\left[\frac{\partial^2\overline{V}(P+\Delta x,Q)}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\overline{V}(P,Q)}{\partial y^2}\right]dQ = I_1'+I_1''.$$

Si ha subito

$$|\,I_1''\,| < K_1''\,|\,\Delta x\,|^{2\lambda}$$

e poi

$$|I_1'|<KC|\Delta x|\int_0^{y-(\Delta x)^2}\int_0^1\frac{|x+\theta\Delta x-\xi|^{2\lambda}+(y-\eta)^\lambda}{(y-\eta)^2}\exp\left[-c\frac{(x+\theta\Delta x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right]d\xi d\eta<$$

$$<2KC\,|\,\Delta x\,|\int_0^{y-(\Delta x)^2}\frac{d\eta}{(y-\eta)^{3/2-\lambda}}\int_{-\infty}^{+\infty}[(4t^2)^\lambda+1]\exp(-ct^2)dt<$$

$$<\overline{K}_1(\,|\,\Delta x\,|^{2\lambda}+|\,\Delta x\,|\,y^{-\frac{1}{2}+\lambda}) < K_1'\,|\,\Delta x\,|^{2\lambda}.$$

Per $y \leq (\Delta x)^2$ il medesimo risultato è immediato.

Si ha poi

$$\Delta_x B(P) = [f(P+\Delta x) - f(P)] \int_0^1 \frac{\partial \overline{V}(P+\Delta x;\ \xi,\ 0)}{\partial y}\, d\xi +$$

$$+ f(P) \int_0^1 \left[\frac{\partial \overline{V}(P+\Delta x;\ \xi,\ 0)}{\partial y} - \frac{\partial \overline{V}(P;\ \xi,\ 0)}{\partial y} \right] d\xi = J_1 + J_2\,;$$

si ha subito

$$| J_1 | < K_1 \, | \Delta x |^{2\lambda}$$

e poi

$$| J_2 | < K_2 \, | \Delta x |^{2\lambda}\,;$$

quest'ultima è immediata se $y \leq (\Delta x)^2$; se $y > (\Delta x)^2$ essa segue dal fatto che

$$|J_2| < |\Delta x| K y^{\lambda} \left| \int_0^1 \frac{\partial^2 \overline{V}(P+\theta\Delta x;\ \xi,\ 0)}{\partial x \partial y}\, d\xi \right| < \overline{K}_2 |\Delta x| y^{\lambda - 1/2} < K_2 |\Delta x|^{2\lambda}.$$

In definitiva

$$\left| \Delta_x \frac{\partial^2 v(P)}{\partial y^2} \right| < C_2 \, | \Delta x |^{2\lambda}. \tag{26$_2$}$$

Si ha poi

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \iint_{\mathfrak{R}_y} [f(Q) - f(P)] \frac{\partial^3 \overline{V}}{\partial x^2 \partial y}\, dQ + f(P) \int_0^y \int_0^1 \frac{\partial^3 \overline{V}}{\partial x^2 \partial y}\, d\xi d\eta = \tag{27}$$

$$= \iint_{\mathfrak{R}_y} [f(Q) - f(P)] \frac{\partial^3 \overline{V}}{\partial x^2 \partial y}\, dQ + f(P) \int_0^1 \left(\frac{-1}{2y^{1/2}} + \frac{(x-\xi)^2}{4y^{3/2}} \right) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4y} \right] d\xi\,;$$

si possono perciò ripetere ragionamenti analoghi ai precedenti, giungendo a formole analoghe alle $(26_{1,\,2})$. Lo stesso si può dire di conseguenza della derivata $\partial^4 v/\partial x^4$. È poi chiaro che ragionamenti analoghi a quelli che precedono si possono applicare alla funzione $w(P)$ una volta che si sia dimostrato che per la funzione $\overline{G}(P, Q)$ e per le sue derivate sussistono limitazioni analoghe alle (20) e che

$$\frac{\partial \overline{G}}{\partial y} = - \frac{\partial \overline{G}}{\partial \eta} . \tag{28}$$

Fissato un punto Q in $\mathfrak{R}$ si ha

$$\overline{\mathfrak{L}}[\overline{G}(P, Q)] = 0 \qquad \text{per} \qquad 0 < x < 1, \quad \eta < y \leq h$$

$$\overline{G} = \overline{V}, \quad \frac{\partial \overline{G}}{\partial x} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} \qquad \text{per} \qquad x = 0, \quad x = 1, \quad \eta \leq y \leq h$$

$$\overline{G} = \frac{\partial \overline{G}}{\partial y} = 0 \qquad \text{per} \qquad y = \eta, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Posto

$$U_{p,q}(P, Q) = \begin{cases} \dfrac{(x-\xi)^p}{(y-\eta)^q} \exp\left[-\dfrac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right] & \text{per} \quad y > \eta \\ 0 & \text{per} \quad y \leq \eta \end{cases},$$

si può scrivere

$$\overline{G}(P, Q) = \int_\eta^y U_{0,1/2}(P; 0, \tau)\alpha_1(Q; \tau)d\tau + \int_\eta^y U_{0,1/2}(P; 1, \tau)\alpha_2(Q; \tau)d\tau +$$
$$+ \int_\eta^y U_{2,3/2}(P; 0, \tau)\beta_1(Q; \tau)d\tau + \int_\eta^y U_{2,3/2}(P; 1, \tau)\beta_2(Q; \tau)d\tau \tag{29}$$

con

$$\pi\alpha_1(Q; \tau) + \int_\eta^\tau A_1(\tau, \sigma)\alpha_2(Q; \sigma)d\sigma + \int_\eta^\tau A_2(\tau, \sigma)\beta_2(Q; \sigma)d\sigma =$$
$$= \int_\eta^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau - z}} \left[\frac{1}{2} U_{0,1/2}(0, z; \xi, \eta) + \frac{1}{4} U_{2,3/2}(0, z; \xi, \eta)\right] dz \tag{30$_1$}$$

$$\pi\alpha_2(Q; \tau) + \int_\eta^\tau A_1(\tau, \sigma)\alpha_1(Q; \sigma)d\sigma + \int_\eta^\tau A_2(\tau, \sigma)\beta_1(Q; \sigma)d\sigma =$$
$$= \int_\eta^\tau \frac{1}{\sqrt{\tau - z}} \left[\frac{1}{2} U_{0,1/2}(1, z; \xi, \eta) + \frac{1}{4} U_{2,3/2}(1, z; \xi, \eta)\right] dz \tag{30$_2$}$$

$$(30_3) \qquad -\sqrt{\pi}\,\alpha_1(Q\,;\,\tau) + 2\sqrt{\pi}\,\beta_1(Q\,;\,\tau) + \int_\eta^\tau A_3(\tau,\ \sigma)\alpha_2(Q\,;\,\sigma)d\sigma -$$

$$-\int_\eta^\tau A_4(\tau,\ \sigma)\beta_2(Q\,;\,\sigma)d\sigma = -\frac{1}{2}\,U_{1,\,{}^1\!/_2}(0,\ \tau;\ \xi,\ \eta)$$

$$(30_4) \qquad \sqrt{\pi}\,\alpha_2(Q\,;\,\tau) - 2\sqrt{\pi}\,\beta_2(Q\,;\,\tau) - \int_\eta^\tau A_3(\tau,\ \sigma)\alpha_1(Q\,;\,\sigma)d\sigma +$$

$$+\int_\eta^\tau A_4(\tau,\ \sigma)\beta_1(Q\,;\,\sigma)d\sigma = -\frac{1}{2}\,U_{1,\,{}^1\!/_2}(1,\ \tau;\ \xi,\ \eta),$$

$$(31_1) \qquad A_1(\tau,\ \sigma) = \frac{\partial}{\partial\tau}\int_\sigma^\tau \frac{U_{0,\,{}^1\!/_2}(0,\ z\,;\ 1,\ \sigma)}{\sqrt{\tau - z}}\,dz$$

$$(31_2) \qquad A_2(\tau,\ \sigma) = \frac{\partial}{\partial\tau}\int_\sigma^\tau \frac{U_{2,\,{}^3\!/_2}(0,\ z\,;\ 1,\ \sigma)}{\sqrt{\tau - z}}\,dz$$

$$(31_3) \qquad A_3(\tau,\ \sigma) = \frac{1}{2}\,U_{0,\,{}^3\!/_2}(0,\ \tau\,;\ 1,\ \sigma)$$

$$(31_4) \qquad A_4(\tau,\ \sigma) = 2U_{0,\,{}^3\!/_2}(0,\ \tau\,;\ 1,\ \sigma) - \frac{1}{2}\,U_{0,\,{}^5\!/_2}(0,\ \tau;\ 1,\ \sigma).$$

Allora, con ragionamenti analoghi a quelli svolti in *I*-**5** si prova che per la $\overline{G}$ e le sue derivate valgono limitazioni in tutto analoghe alle (20).

Proviamo ora la (28).

Il sistema $(30_{1,\,2,\,3,\,4})$ si può scrivere

$$(32) \qquad \boldsymbol{a}(Q\,;\,\tau) + \int_\eta^\tau \boldsymbol{K}(\tau,\ \sigma)\boldsymbol{a}(Q\,;\,\sigma)d\sigma = \boldsymbol{b}(Q\,;\,\tau)$$

ove $\boldsymbol{a}$ è il vettore di componenti α_1, α_2, β_1, β_2, $\boldsymbol{K}$ è una matrice quadrata del quarto ordine i cui termini sono combinazioni lineari a coefficienti costanti delle A_1, A_2, A_3, A_4 e $\boldsymbol{b}$ è un vettore le cui componenti sono combinazioni lineari a coefficienti costanti dei secondi membri delle $(30_{1,2,3,4})$. Si ha

$$\frac{\partial \boldsymbol{K}(\tau, \sigma)}{\partial \tau} = - \frac{\partial \boldsymbol{K}(\tau, \sigma)}{\partial \sigma}; \tag{33}$$

infatti si riconosce immediatamente che

$$\frac{\partial A_i(\tau, \sigma)}{\partial \tau} = - \frac{\partial A_i(\tau, \sigma)}{\partial \sigma}, \qquad i = 1, 2, 3, 4;$$

ciò è ovvio per $i = 3, 4$; supposto poi ad esempio $i = 1$ si ha con qualche integrazione parti

$$A_1 = \int_\sigma^\tau \frac{\frac{\partial}{\partial z} U_{0,1/2}(0, z; 1, \sigma)}{\sqrt{\tau - z}} dz, \qquad \frac{\partial A_1}{\partial \tau} = \int_\sigma^\tau \frac{\frac{\partial^2}{\partial z^2} U_{0,1/2}(0, z; 1, \sigma)}{\sqrt{\tau - z}} dz$$

e

$$\frac{\partial A_1}{\partial \sigma} = \int_\sigma^\tau \frac{\frac{\partial^2}{\partial \sigma \partial z} U_{0,1/2}(0, z; 1, \sigma)}{\sqrt{\tau - z}} dz = - \frac{\partial A_1}{\partial \tau}.$$

Analogamente si ha

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}(Q; \tau)}{\partial \tau} = - \frac{\partial \boldsymbol{b}(Q; \tau)}{\partial \eta}. \tag{34}$$

Da (33) e (34) segue

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \tau} + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \eta} = - \int_\eta^\tau \boldsymbol{K}(\tau, \sigma) \left(\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \sigma} + \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \eta} \right) d\sigma$$

da cui

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \tau} \equiv - \frac{\partial \boldsymbol{a}}{\partial \eta}. \tag{35}$$

Dalla (35) e dalla (29) si deduce la (28).

Dopo di ciò si possono ripetere sulla $w(P)$ i ragionamenti fatti sulla $v(P)$.

È infine facile riconoscere che se $f(x,\ 0) \equiv 0$, allora le derivate $\partial^2 u/\partial y^2$, $\partial^3 u/\partial x\, \partial y$, $\partial^4 u/\partial x^4$ si annullano per $y = 0$.

Ciò posto, consideriamo lo spazio Σ delle funzioni $u(P)$: continue in $\mathfrak{R}$; dotate di tutte le derivate che figurano in $\mathfrak{L}$ di classe $H^{(\mu)}$; tali che $u = \partial u/\partial x = 0$ per $x = 0,\ 1,\ 0 \leq y \leq h$, e u nulla insieme a tutte le derivate che figurano in $\mathfrak{L}$ per $y = 0$.

Lo spazio Σ risulta normale e completo assumendo come norma di u la

$$\| u \| = M_u + N_u \tag{36}$$

ove M_u indica la somma dei massimi dei moduli di tutte le derivate di u che figurano in $\mathfrak{L}$ ed N_u la somma di tutti i corrispondenti μ-coefficienti di Hölder.

Chiamiamo Σ' lo spazio delle funzioni $u'(P)$ continue in $\mathfrak{R}$, di classe $H^{(\mu)}$ e nulle per $y = 0$, reso normale e completo assumendo come norma di u' la

$$\| u' \| = \max_{\mathfrak{R}} | u' | + | u' |_\mu \tag{36'}$$

essendo $| u' |_\mu$ il μ-coefficiente di Hölder della u'.

Chiamiamo infine Σ_ω lo spazio dei vettori

$$\omega \equiv (a(P),\ b_0(P),\ b_1(P),\ b_2(P),\ b_3(P),\ c(P),\ d(P))$$

a componenti di classe $H^{(\mu)}$ in $\mathfrak{R}$, con $a(P) \geq \delta$, ove δ è un assegnato numero positivo < 1, reso normale e completo assumendo come norma di ω la

$$\| \omega \| = M_\omega + N_\omega \tag{36''}$$

ove M_ω è la somma dei massimi dei moduli delle componenti di ω ed N_ω la somma dei corrispondenti μ-coefficienti di Hölder.

Ciò posto, consideriamo la trasformazione lineare

$$u' = \mathfrak{T}(u,\ \omega) = \mathfrak{L}[u] \tag{37}$$

che, per ogni $\omega \in \Sigma_\omega$, trasforma un elemento $u \in \Sigma$ in uno $u' \in \Sigma'$.

Poniamo

$$\omega_0 = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0).$$

Per $\omega = \omega_0$ la (37) è completamente invertibile a causa dei risultati ottenuti nel presente n. **4**. Si ha poi subito per un opportuno $k > 0$

$$\| \mathfrak{T}(u,\ \omega_1) - \mathfrak{T}(u,\ \omega_2) \| \leq k \| \omega_1 - \omega_2 \| \cdot \| u \| .$$

Perciò, in base a un criterio d'invertibilità locale [2]), la trasformazione (37) è invertibile in un intorno di ω_0.

5. Un ulteriore problema.

Il problema fin qui trattato è il corrispondente parabolico del problema consistente nella determinazione di una soluzione dell'equazione

$$\sum_{0 \leq i+j \leq 4} a_{ij}(x,\ y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = f(x,\ y), \tag{38}$$

in un certo dominio ove $\sum_{i+j=4} a_{ij} \lambda^i \mu^j$ è una forma definita, quando siano prefissati i valori di u e du/dn sulla frontiera del dominio.

Per l'equazione (38) ci si può anche proporre di determinare una soluzione avendo assegnati i valori di u e d^2u/dn^2. Questo problema in certi casi può risultare banale dal punto di vista delle equazioni del quarto ordine; così per l'equazione $\Delta\Delta u = f$ esso è equivalente, in ipotesi di opportuna regolarità della frontiera del dominio e dei dati, al problema consistente nell'assegnare i valori di u e Δu.

In modo del tutto analogo per l'equazione (3) ci si può proporre la determinazione di una soluzione in $\mathfrak{R}$ avendo

---

[2]) Cfr. per esempio C. MIRANDA, *Problemi di esistenza in analisi funzionale*, Pisa 1948-49 n. 8, III, pp. 65-66 e il successivo esempio 2°, pp. 70-73.

prefissati i valori di

$$u(0, y),\ u(1, y),\ \frac{\partial^2 u(0, y)}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 u(1, y)}{\partial x^2} \quad \text{per} \quad 0 \leq y \leq h,$$

$$u(x, 0),\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} \qquad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Anche questo problema in certi casi è banale; ad esempio per l'equazione (22) esso è equivalente al problema consistente nel determinare una soluzione avendo prefissati i valori di u e di $\partial^2 u/\partial x^2 - \partial u/\partial y$ per $x = 0$, 1 e $y = 0$. Però se si ha a che fare con l'equazione completa (3) il problema ora detto non è banale. Esso si può trattare con procedimento analogo a quello finora seguito.

Anzitutto sussiste il seguente teorema di unicità:

Se i coefficienti di (3) *hanno la regolarità specificata in I*-**2** *ed è* $a > 0$, *esiste al più una funzione* $u(x, y)$ *continua in* $\mathfrak{R}$ *insieme a* $\partial u/\partial x$, $\partial^2 u/\partial x^2$, $\partial^3 u/\partial x^3$, $\partial u/\partial y$, $\partial^2 u/\partial x \partial y$, *che per* $0 < x < 1$, $0 < y \leq h$ *soddisfa la* (3) *ed è tale che* u *e* $\partial^2 u/\partial x^2$ *assumono assegnati valori per* $x = 0$, 1, $0 \leq y \leq h$, *mentre* u *e* $\partial u/\partial y$ *assumono assegnati valori per* $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$ (*beninteso che questi valori soddisfino le condizioni di regolarità e compatibilità richieste dalla regolarità imposta alla* u).

La dimostrazione è quella stessa svolta in *I*-**2**.

Attualmente la costruzione di una *funzione compensatrice*, la quale permette di costruire una *quasi-funzione di Green*, è più semplice che per il primo problema; infatti per l'equazione (5) associata alla (3) nell'ipotesi di a costante > 0, è possibile, così come succede per l'equazione del calore, la costruzione esplicita della funzione di Green.

Supponiamo dapprima che sia $a > 1$ e siano λ_1 e λ_2 le radici dell'equazione

$$\lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0.$$

Osserviamo anzitutto che nella *I*-(26) si può sostituire $-\infty$ con 0 nell'estremo inferiore d'integrazione. Il *metodo delle immagini* permette allora di scrivere subito la funzione di Green:

$$
\begin{aligned}
(39)\quad G_0(P,\,Q) = \sqrt{\lambda_2}\,\Big\{ & 2\sqrt{y-\eta}\,\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \left(\exp\left[-\frac{\lambda_1(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right]-\right.\\
& \left.-\exp\left[-\frac{\lambda_1(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right)+\lambda_1\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[(x-\xi+2n)\int_0^{\frac{x-\xi+2n}{\sqrt{y-\eta}}}\exp\left[-\frac{\lambda_1 t^2}{4}\right]dt-\right.\\
& \left.-(x+\xi+2n)\int_0^{\frac{x+\xi+2n}{\sqrt{y-\eta}}}\exp\left[-\frac{\lambda_1 t}{4}\right]dt\right]\Big\}-\\
& -\sqrt{\lambda_1}\Big\{2\sqrt{y-\eta}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left(\exp\left[-\frac{\lambda_2(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right]-\exp\left[-\frac{\lambda_2(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right)+\\
& +\lambda_2\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n\left[(x-\xi+2n)\int_0^{\frac{x-\xi+2n}{\sqrt{y-\eta}}}\exp\left[-\frac{\lambda_2 t^2}{4}\right]dt-\right.\\
& \left.-(x+\xi+2n)\int_0^{\frac{x+\xi+2n}{\sqrt{y-\eta}}}\exp\left[-\frac{\lambda_2 t^2}{4}\right]dt\right]\Big\}.
\end{aligned}
$$

La I-(26) andrà invece sostituita con la (23) se è $a=1$; con la (13) se è $0<a<1$.

Limitiamoci a titolo d'esempio al primo caso.

Per $n>2$ e per $0\le x,\ \xi\le 1$ è $(2n\pm x\pm\xi)^2\ge 4(n-2)^2+ (x-\xi)^2$ onde in $\mathfrak{R}$ si ha, indicando con c una costante positiva e con k un prefissato arbitrario numero naturale,

$$
(40)\qquad \exp\left[-c\,\frac{(2n\pm x\pm\xi)^2}{4(y-\eta)}\right]<\frac{k!\,h^k}{c^k(n-2)^{2k}}\exp\left[-c\,\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right].
$$

Tenendo presente che se p e q sono due costanti positive di cui la seconda <1 e α è una variabile ≥ 0, esiste una costante positiva K tale che

$$
(41)\qquad \alpha^p\exp(-\alpha)<K\exp(-q\alpha),
$$

si ha che la prima e la terza serie in (39) convergono uniformemente insieme a tutte le derivate d'ordine non superiore a un assegnato arbitrario numero naturale in un arbitrario insieme chiuso cui sia esterno il punto $P \equiv Q$. La somma dei quattro integrali corrispondenti a un valore di $n \geq 1$ e al suo opposto nella seconda serie di (39), e analogamente nella quarta, è

$$2n\left(\int_{\frac{2n-x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}}^{\frac{2n+x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}} - \int_{\frac{2n-x+\xi}{\sqrt{y-\eta}}}^{\frac{2n+x+\xi}{\sqrt{y-\eta}}}\right)\exp\left[-\frac{\lambda_1 t^2}{4}\right]dt - x\left(\int_{\frac{2n+x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}}^{\frac{2n+x+\xi}{\sqrt{y-\eta}}} + \int_{\frac{2n-x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}}^{\frac{2n-x+\xi}{\sqrt{y-\eta}}}\right)\exp\left[-\frac{\lambda_1 t^2}{4}\right]dt -$$

$$-\xi\left(\int_{\frac{2n-x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}}^{\frac{2n+x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}} + \int_{\frac{2n-x+\xi}{\sqrt{y-\eta}}}^{\frac{2n+x+\xi}{\sqrt{y-\eta}}}\right)\exp\left[-\frac{\lambda_1 t^2}{4}\right]dt$$

e per $n \geq 1$ è

$$\int_{\frac{2n-(x+\xi)}{\sqrt{y-\eta}}}^{\frac{2n+(x+\xi)}{\sqrt{y-\eta}}} \exp\left[-\frac{\lambda_1 t^2}{4}\right]dt < \frac{2(x+\xi)}{\sqrt{y-\eta}}\exp\left[-\frac{\lambda_1(2n-x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right]$$

onde tenendo presenti le (41) e (40) si ha che anche la terza e quarta serie in (39) convergono uniformemente insieme a tutte le loro derivate d'ordine non superiore a un assegnato arbitrario numero naturale in un prefissato arbitrario insieme chiuso cui sia esterno il punto $P \equiv Q$. È immediato riconoscere che per ogni P tale che $0 < x < 1$, $0 < y \leq h$ è $G_0(P, Q) = 0$ per $\xi = 0$ e $\xi = 1$. Inoltre poichè

$$\frac{\partial^2 G_0}{\partial \xi^2} = \frac{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}}{\sqrt{y-\eta}} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \left\{ \sqrt{\lambda_1}\left(\exp\left[-\lambda_1 \frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right] - \right.\right.$$

$$\left. - \exp\left[-\lambda_1 \frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right) -$$

$$\left. - \sqrt{\lambda_2}\left(\exp\left[-\lambda_2 \frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\lambda_2 \frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right)\right\},$$

si ha che per ogni P come il precedente è $\partial^2 G_0/\partial\xi^2 = 0$ per $\xi = 0$ e $\xi = 1$.

Dopo di ciò, se $u(P)$ è soluzione di $\mathfrak{L}_0[u] = 0$ in $\mathcal{R}$ ed è

$$u(0,\ \eta) = \varphi_1(\eta),\ u(1,\ \eta) = \varphi_2(\eta),\ \frac{\partial^2 u(0,\ \eta)}{\partial\xi^2} = \psi_1(\eta),$$

$$\frac{\partial^2 u(1,\ \eta)}{\partial\xi^2} = \psi_2(\eta),\ u(\xi,\ 0) = f_1(\xi),\ \frac{\partial u(\xi,\ 0)}{\partial\eta} = f_2(\xi)$$

con φ_i, ψ_i, f_i, f_1' continue e $f_1(0) = \varphi_1(0)$, $f_1(1) = \varphi_2(0)$, si ha

$$u(P) = \frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{2\sqrt{\pi}(\lambda_1 - \lambda_2)}\Bigg\{\int_0^y \left[\varphi_1(\eta)\left(\frac{\partial^3 G_0}{\partial\xi^3} + 2a\frac{\partial^2 G_0}{\partial\xi\partial\eta}\right) + \psi_1(\eta)\frac{\partial G_0}{\partial\xi}\right]_{\xi=0} d\eta -$$

$$- \int_0^y \left[\varphi_2(\eta)\left(\frac{\partial^3 G_0}{\partial\xi^3} + 2a\frac{\partial^2 G_0}{\partial\xi\partial\eta}\right) + \psi_2(\eta)\frac{\partial G_0}{\partial\xi}\right]_{\xi=1} d\eta +$$

$$+ \int_0^1 \left[f_1(\xi)\frac{\partial G_0}{\partial\eta} - f_2(\xi)G_0 - 2af_1'(\xi)\frac{\partial G_0}{\partial\xi}\right]_{\eta=0} d\xi\Bigg\}.$$

Si prova poi facilmente che esistono tre costanti positive C_1, C_2, c tali che

$$|G_0| < C_1\sqrt{y-\eta}\exp\left[-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right] + C_2|x-\xi|$$

$$\left|\frac{\partial G_0}{\partial x}\right| < C_1\exp\left[-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right] + C_2$$

$$\left|\frac{\partial^{i+j} G_0}{\partial x^i\partial y^j}\right| < \frac{C_1}{(y-\eta)^{\frac{i+2j-1}{2}}}\exp\left[-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right]$$

per $j \geq 1$ o $i+j \geq 2$ e $i+j$ non superiore a un prefissato arbitrario numero naturale.

Sulla base di queste maggiorazioni è possibile fare ragionamenti analoghi a quelli di *I*-**4**, **5**; onde:

Se i coefficienti di (3) *e il termine noto sono funzioni continue con le derivate prime; se i dati assegnati su* $x=0$, 1, $0 \leq y \leq h$ *e* $y=0$, $0 \leq x \leq 1$ *sono la traccia di una funzione* φ *continua in* $\mathfrak{R}$ *insieme a tutte le derivate che figurano in* $\mathfrak{L}$ *e con* $\mathfrak{L}[\varphi]$ *hölderiana, allora il problema in argomento ha una soluzione. Questa è unica nelle ipotesi di regolarità dei coefficienti specificate in I*-**2**.