Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Mario Volpato

Sulla assoluta continuità e sulla validità della classica formula di derivazione delle funzioni composte

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 37-47

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__37_0>

SULLA ASSOLUTA CONTINUITÀ E SULLA VALIDITÀ DELLA CLASSICA FORMULA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

Nota (*) *di* MARIO VOLPATO (*a Ferrara*)

Le funzioni composte, dal punto di vista della derivazione, sono state considerate, in questi ultimi anni, da M. Cinquini Cibrario e S. Cinquini [1]), G. Scorza Dragoni [2]), A. Scorza Toso [3]), A. Sambo [4]), C. Bonati Savorgnan [5]).

In questa Nota darò un teorema di assoluta continuità per una funzione composta del tipo $f[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$ e dimostrerò la validità, quasi ovunque, della classica formula di derivazione.

(*) Pervenuta in Redazione il 20 marzo 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matemativo, Università, Ferrara.

[1]) M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Sopra una forma più ampia del problema di Cauchy per l'equazione* $p = f(x, y, z, q)$. Ann. di Mat. pura e applicata, vol. XXXII, (1951), pp. 121-155, § 2, n. 5, e), p. 145. In questo passo è implicitamente contenuto un teorema di derivazione per un particolare tipo di funzioni composte.

[2]) G. SCORZA DRAGONI, *Un'osservazione sulla derivazione delle funzioni composte.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XX, (1951), pp. 462-467.

[3]) A. SCORZA TOSO, *Sulla derivazione di una funzione composta.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXI, (1952), pp. 198-201.

[4]) A. SAMBO, *Sulla derivazione delle funzioni composte.* Rend. Accad. Sc. Fis. e Mat. della Soc. Naz. di Sc. Lett. ed Arti, Napoli, serie 4, vol. XIX, (1952), pp.

[5]) C. BONATI SAVORGNAN, *Sulla derivazione di funzioni composte.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXII, (1953), pp. 258-264; *Sulla diferenziabilità secondo Stolz delle funzioni composte,* Ann. Univ. Ferrara (nuova serie) vol. III, (1953-54), pp. 17-24.

Il raffronto critico fra il risultato attuale e quelli precedenti posso lasciarlo al lettore: le differenze nelle ipotesi sono visibili anche ad un esame superficiale.

In un successivo lavoro darò applicazioni del mio teorema.

1. Enunciato del teorema. *Nell'intervallo* $R = I_1 \times I_2 \times \times \dots \times I_n$, $I_r = a_r \leq x_r \leq b_r$, *dello spazio reale euclideo ad n dimensioni, consideriamo una funzione reale* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *che abbia le seguenti proprietà:*

I) $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *è assolutamente continua, separatamente, rispetto alle singole variabili;*

II) *la derivata parziale prima* f'_{x_r}, *che per la* I) *esiste quasi ovunque in* R *riuscendovi misurabile, è continua rispetto alla* $(n-1)$*-upla* $(x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n)$ *per quasi tutti i valori* x_r *di* I_r [6]) *e soddisfa la disuguaglianza,*

$$|f'_{x_r}(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq L_r(x_r), \tag{1}$$

ove $L_r(x_r)$ *è una funzione non negativa, della sola variabile* x_r, *sommabile in* I_r, r *variando, naturalmente da* 1 *a* n.

Inoltre

III) *nell'intervallo* $I_t = c \leq t \leq d$ *siano date* n *funzioni:* $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ *assolutamente continue, soddisfacenti le limitazioni*

$$a_r \leq x_r(t) \leq b_r \qquad (r = 1, 2, \dots, n),$$

e tali che gli n *prodotti* $L_r[x_r(t)]x_r'(t)$, $r = 1, 2, \dots, n$, *sicuramente misurabili in* I_t [7]), *siano sommabili in* I_t.

---

[6]) Naturalmente perchè tale frase possa aver senso, f'_{x_r} deve esistere in tutto R a prescindere eventualmente da una conveniente porzione di misura (n-dimensionale) nulla la cui proiezione, sull'asse x_r, è di misura (lineare) nulla. Ricordo che la misura e l'integrazione sono intese, in questa Nota, nel senso di Lebesgue, e che tutte le considerazioni si svolgono nell'ambito della teoria delle funzioni di variabile reale.

[7]) Si vegga, per es., C. CARATHÉODORY, *Vorlesungen über Reelle Funktionen.* Chelsea Publ. Comp., New York, (1948), Kap. X, nn. 496-499, pp. 556-563.

In tali ipotesi, la funzione composta $f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$ *è assolutamente continua; in* I_t *vale quasi ovunque la solita formula di derivazione*

$$(2) \qquad \frac{d}{dt} f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] = \sum_1^n {}_r\, f'_{x_r}[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]x'_r(t);$$

gli n *prodotti* $f'_{x_r}[x_1(t)\ x_2(t), \dots, x_n(t)]x_r'(t)$ *sono misurabili, anzi sommabili in* I_t*, ed allora risulta anche*

$$(3) \qquad f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] - f[x_1(c), x_2(c), \dots, x_n(c)] =$$
$$= \sum_1^n {}_r \int_c^t f'_{x_r}[x_1(\xi), x_2(\xi), \dots, x_n(\xi)]x'_r(\xi)d\xi,$$

nell'intervallo I_t.

Se si interpreta il secondo membro della (3) come un integrale curvilineo della forma differenziale

$$(4) \qquad f'_{x_1}dx_1 + f'_{x_2}dx_2 + \dots + f'_{x_n}dx_n,$$

esteso alla curva rettificabile

$$(5) \qquad \Gamma: \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \dots\dots \\ x_n = x_n(t) \quad , \qquad c \leq t \leq d, \end{cases}$$

questo mio risultato, per lo meno nel caso di campi rettangolari, è una estensione di un noto teorema di De La Vallée Poussin [8]), perfezionato successivamente da L. Tonelli [9]), e, sempre per i campi rettangolari, restituisce questo teorema nel caso che le derivate prime di f siano continue in R.

La continuità di f'_{x_r} rispetto alle $(n-1)$ variabili $(x_1, \dots, x_{r-1}, x_{r+1}, \dots, x_n)$ per quasi tutti i valori x_r di I_r, assunta in II), può esere sostituita con la seguente condizione: per

[8]) Cfr. J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Cours d'Analyse.* T. II, 2e éd., (1912), p. 92.

[9]) Cfr. L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni.* Zanichelli, Bologna, (1921), cap. IV, § 7, n. 71, pp. 195.

quasi tutti gli x_r di I_r, la funzione

$$(6) \quad \varphi_r(x_r, t, h) = f'_{x_r}[x_1(t), \dots, x_{r-1}(t), x_r, x_{r+1}(t+h), \dots, x_n(t+h)]$$

sia continua rispetto a (t, h) nell'intervallo bidimensionale

$$c + \rho \leq t \leq d - \rho \quad , \quad -\rho \leq h \leq \rho$$

almeno se il numero ρ, positivo e indipendente da x_r, è abbastanza piccolo. Naturalmente le (6) si potrebbero sostituire, volendo, colle

$$(7) \quad \psi_r(x_r, t, h) = f'_{x_r}[x_1(t+h), \dots, x_{r-1}(t+h), x_r, x_{r+1}(t), \dots, x_n(t)].$$

La dimostrazione del teorema si basa essenzialmente su due lemmi: il primo si dimostra ricorrendo a ragionamenti usati da G. Scorza Dragoni [10]), il secondo affinando alcune considerazioni svolte da me in un mio recente lavoro [11]).

2. - LEMMA 1. *La funzione reale $\varphi(x, t, h)$, definita nell'intervallo $D = J_x \times J_t \times J_h$, $(J_x = a \leq x \leq b$; $J_t = \gamma \leq t \leq \delta$; $J_h = -h_0 \leq h \leq h_0$, $h_0 > 0)$ dello spazio reale euclideo tridimensionale sia misurabile rispetto ad x, continua rispetto alla coppia (t, h) per quasi tutti i valori di x in J_x e maggiorata, in modulo, da una funzione $M(x)$, della sola variabile x, sommabile in J_x. Inoltre, la funzione $\sigma(h)$ sia continua nell'intervallo $\bar{J}_h = -\bar{h}_0 \leq h \leq \bar{h}_0$, $0 < \bar{h}_0 \leq h_0$, sia nulla per $h = 0$ e per $h \neq 0$ abbia o sempre lo stesso segno di h, o sempre segno contrario a quello di h.*

---

[10]) G. SCORZA DRAGONI, *Una applicazione della quasi continuità semiregolare delle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile*. Rend. Accad. Naz. Lincei, serie VIII, vol. XII, (1952), pp. 55-61; *Sulla derivazione degli integrali indefiniti*, ibidem, vol. XX, (1956), pp. 711-714.

[11]) M. VOLPATO, *Sulla formula di Green nell'ambito delle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile*. Rend. Accad. Naz. Lincei, serie VIII, vol. XX, (1956), Nota I, pp. 30-37, Nota II, pp. 161-167, Nota III, pp. 299-306. Ricordo che nella Nota II, a p. 167, ho indicato delle condizioni sufficienti, diverse dalle attuali, per l'assoluta continuità di una funzione composta del tipo $F[\varphi(y), y]$. La relativa formula di derivazione non è del tipo classico.

In tali ipotesi sussistono le relazioni

$$(8)\quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sigma(h)}\int_x^{x+\sigma(h)}\varphi(\xi,\, t,\, h)d\xi=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sigma(h)}\int_x^{x+\sigma(h)}\varphi(\xi,\, t,\, 0)d\xi=\varphi(x,\, t,\, 0)$$

per ogni t di J_t e per tutti gli x di $J_x - E_x$, dove E_x è una conveniente porzione di J_x dotata di misura nulla e indipendente da t.

Osserviamo intanto che a norma di un teorema enunciato da G. Scorza Dragoni a conclusione del primo dei lavori citati in [10]), la seconda uguaglianza sussiste in tutto J_x a prescindere da una conveniente porzione di misura nulla indipendente da t.

Non ci resta allora che provare la validità della relazione

$$(9)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sigma(h)}\int_x^{x+\sigma(h)}\{\varphi(\xi,\, t,\, h)-\varphi(\xi,\, t,\, 0)\}\,d\xi=0,$$

sempre a prescindere in J_x da una conveniente porzione di misura nulla e indipendente da t [12]).

Come abbiamo detto, un ragionamento analogo a quello svolto da G. Scorza Dragoni ci servirà allo scopo. Eccolo nei dettagli.

La misurabilità rispetto ad x della funzione $\varphi(x,\, t,\, h)$ e la sua continuità rispetto alla coppia $(t,\, h)$, a norma di un altro teorema di G. Scorza Dragoni [13]), dimostrato per le funzioni di più variabili da G. Stampacchia [14]), implicano che ad ogni intero e positivo n si può associare una porzione chiusa D_n di D, avente una proiezione, $D_n(x)$, sull'asse x di misura

---

[12]) Nel caso in cui φ sia limitata e del tipo $f(x,\, t+h)$, la validità della (9) è stata provata da me in loc. cit. [11]), Nota I, n. 4, p. 34.

[13]) G. SCORZA DRAGONI, *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XVII, (1948), pp. 102-106.

[14]) G. STAMPACCHIA, *Sopra una classe di funzioni di n variabili.* Ricerche di Matematica, vol. I, (1952), pp. 27-54, p. 30.

maggiore di $b - a - \frac{1}{n}$ e tale che la $\varphi(x, t, h)$ sia uniformemente continua in D_n. Indichiamo con $D_n^*(x)$ l'insieme dei punti di $D_n(x)$ che sono di densità (lineare) uno per $D_n(x)$ e poniamo

$$D^*(x) = \bigcup_{1}^{+\infty}{}_n D_n^*(x), \tag{10}$$

di guisa che $D^*(x)$ è misurabile, ha la stessa misura di J_x ed appartiene all'interno di J_x. Sia poi $\overline{M}(x)$ la funzione che in J_x si identifica con $M(x)$ e che è nulla fuori di J_x. Detta E una qualsiasi porzione limitata e misurabile dell'asse x, indichiamo con $D_0(x)$ la porzione di $D^*(x)$ nella quale la funzione d'insieme

$$\int_E \overline{M}(\xi)d\xi \tag{11}$$

ha derivata in senso generale finita ed uguale ad $M(x)$.

Notoriamente risulta $\text{mis}[D_0(x)] = \text{mis}[D^*(x)]$. Ebbene: *in ogni punto di $D_0(x)$ sussiste la* (9).

Sia infatti x_0 un punto di $D_0(x)$, e precisamente un punto di $D_m^*(x)$. E sia $h_1, h_2, \ldots$ una successione monotona e infinitesima di numeri non nulli appartenenti a J_h.

Allora la successione $\sigma(h_1), \sigma(h_2), \ldots$ è pure infinitesima e i suoi termini sono tutti positivi o tutti negativi. Tanto per fissar le idee, supponiamo che questi termini siano tutti positivi e tali inoltre che i punti $x_0 + \sigma(h_1)$, $x_0 + \sigma(h_2)$, ... ap- appartengono a J_x. Allora, posto

$$j_n = x_0 \leq x \leq x_0 + \sigma(h_n), \quad \eta_n = D_m(x) \cap j_n, \tag{12}$$

le successioni $j_1, j_2, \ldots$, ed $\eta_1, \eta_2, \ldots$ sono regolari nel senso della derivazione delle funzioni di insieme [15]); e quindi, attesa la chiusura di η_n ed il fatto che x_0 appartiene tanto a $D_m^*(x)$

---

[15]) Cfr. S. SAKS, *Theory of integrale.* Monografie Matematyczne, Varsavia, (1937), seconda edizione, p. 106.

quanto a $D_0(x)$, sussistono le

(13) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{\text{mi }(\eta_n)}{\text{mis}(j_n)} = 1,$$

(14) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\text{mis}(\eta_n)} \int_{\eta_n} \overline{M}(\xi) d\xi = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\text{mis}(j_n)} \int_{j_n} \overline{M}(\xi) d\xi = \overline{M}(x_0);$$

e di conseguenza risulta anche

(15) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\text{mis}(j_n)} \int_{j_n - \eta_n} \overline{M}(\xi) d\xi = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\text{mis}(j_n)} \int_{j_n} \overline{M}(\xi) d\xi -$$
$$- \lim_{n \to +\infty} \frac{\text{mis}(\eta_n)}{\text{mis}(j_n)} \cdot \frac{1}{\text{mis}(\eta_n)} \int_{\eta_n} \overline{M}(\xi) d\xi = \overline{M}(x_0) - \overline{M}(x_0) = 0.$$

Inoltre, attesa l'uniforme continuità di $\varphi(x, t, h)$ in D_m, e il fatto che $\eta_n \subset D_m(x)$, sussiste anche la

(16) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\text{mis}(\eta_n)} \int_{\eta_n} \{ \varphi(\xi, t, h_n) - \varphi(\xi, t, 0) \} d\xi = 0.$$

Da queste circostanze, dalla disuguaglianza

(17) $$\left| \frac{1}{\sigma(h_n)} \int_{x_0}^{x_0+\sigma(h_n)} \{ \varphi(\xi, t, h_n) - \varphi(\xi, t, 0) \} d\xi \right| \leq$$
$$\leq \frac{\text{mis}(\eta_n)}{\text{mis}(j_n)} \cdot \frac{1}{\text{mis}(\eta_n)} \int_{\eta_n} | \varphi(\xi, t, h_n) - \varphi(\xi, t, 0) | d\xi +$$
$$+ \frac{2}{\text{mis}(j_n)} \int_{j_n - \eta_n} \overline{M}(\xi) d\xi,$$

e dall'arbitrarietà della successione $h_1, h_2, \dots,$ segue, appunto come volevamo, che la (9) è soddisfatta per $x = x_0$.

3. - LEMMA 2. *La funzione $\varphi(x, t, h)$ soddisfi le ipotesi del lemma 1. Inoltre, sia $\alpha(t)$ una funzione assolutamente continua in J_t, soddisfacente la: $a \leq \alpha(t) \leq b$, e tale che il prodotto*

(18) $$M[\alpha(t)]\alpha'(t)$$

sicuramente misurabile in J_t [16]), *sia sommabile in* J_t. *Allora, per quasi tutti i valori di t in* J_t, *sussistono le relazioni*

$$(19)\quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+h)}\varphi(\xi,\,t,\,h)d\xi=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{\alpha(t)}^{\alpha(t+h)}\varphi(\xi,\,t,\,0)d\xi=\varphi[\alpha(t),\,t,\,0)]\alpha'(t),$$

e il prodotto

$$\varphi[\alpha(t),\ t,\ 0]\alpha'(t)$$

risulta sommabile in J_t.

Siano:

e_t la porzione di J_t, misurabile e di misura uguale a quella di J_t, ove esiste finita $\alpha'(t)$;

e_t' la porzione di e_t ove $\alpha'(t)\neq 0$;

E_t l'insieme dei valori t di J_t per i quali $\alpha(t)$ appartiene ad E_x (E_x, ricordiamolo, essendo la porzione di J_x, dotata di misura nulla e indipendente da t, nella quale può non sussistere la (8)).

Osserviamo che l'assoluta continuità di $\alpha(t)$ e la misura nulla di E_x, implicano, per cose note [17]), $\alpha'(t)=0$ in quasi tutto E_t, di guisa che è di misura nulla l'intersezione $e_t'\cap E_t$.

Ebbene, dimostriamo intanto che *nell'insieme* $e_t'-e_t'\cap E_t$, cioè in quasi tutto e_t', sussiste la (19).

Infatti, se t_0 è un punto di $e_t'-e_t'\cap E_t$,

1) *esiste finita* $\alpha'(t_0)$,

2) *vale la disuguaglianza* $\alpha'(t_0)\neq 0$,

3) $\alpha(t_0)$ appartiene a J_x-E_x.

Supponiamo inoltre che t_0 sia interno a J_t, e, posto

$$T(h)=\alpha(t_0+h)-\alpha(t_0),$$

osserviamo che la funzione $T(h)$ è nulla per $h=0$, mentre per h diverso da zero, e contenuto in un opportuno intervallo chiuso $J_h(t_0)=-h(t_0)\leq h\leq h(t_0)$, $0<h(t_0)\leq h_0$, essa, in virtù del-

---

16) Cfr. loc. ct. nota 7).

17) Cfr. loc. ct. nota 9), p. 176, oppure E. J. MC SHANE, *Integration*, Princeton, (1947), p. 213.

la 2), o ha sempre lo stesso segno di h o ha sempre quello opposto, risultando, ovviamente, continua in $J_h(t_0)$. Pertanto, a norma del lemma 1,

4) *nel punto* $t = t_0$ *risulta*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{T(h)} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0)+T(h)} \varphi(\xi,\ t_0,\ h)d\xi = \tag{20}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{T(h)} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0)+T(h)} \varphi(\xi,\ t,\ 0)d\xi = \varphi[\alpha(t_0),\ t_0,\ 0].$$

Dopo di ciò la conclusione desiderata è ovvia, per $t = t_0$, perchè per ogni h di $J_h(t_0)$ risulta

$$\frac{1}{h} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0+h)} \varphi(\xi,\ t_0,\ h)d\xi = \frac{\alpha(t_0+h)-\alpha(t_0)}{h} \cdot \frac{1}{T(h)} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0)+T(h)} \varphi(\xi,\ t_0,\ h)d\xi, \tag{21}$$

ed

$$\frac{1}{h} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0+h)} \varphi(\xi,\ t_0,\ 0)d\xi = \frac{\alpha(t_0+h)-\alpha(t_0)}{h} \cdot \frac{1}{T(h)} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0)+T(h)} \varphi(\xi,\ t_0,\ 0)d\xi; \tag{22}$$

e così la validità della (19) è garantita intanto per quasi tutti i punti di e_t'.

Per dimostrare che la (19) sussiste anche in quasi tutto $e_t - e_t'$, indichiamo ora con t_0 un punto di $e_t - e_t'$ nel quale sussista la

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{t_0}^{t_0+h} M[\alpha(t)]\alpha'(t)dt = M[\alpha(t_0)]\alpha'(t_0) = 0, \tag{23}$$

di guisa che a t_0 son consentite quasi tutte le posizioni in $e_t - e_t'$. Allora risulta senz'altro

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0+h)} \varphi(\xi,\ t_0,\ h)d\xi = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0+h)} \varphi(\xi,\ t,\ 0)d\xi = 0, \tag{24}$$

appunto per la (23), la

$$(25) \qquad |\varphi(\xi, t, h)| \leq M(x)$$

e la

$$(26) \qquad \int_{\alpha(t_0)}^{\alpha(t_0+h)} M(\xi)d\xi = \int_{t_0}^{t_0+h} M[\alpha(t)]\alpha'(t)dt\,;$$

e la (24) porge di nuovo la (19), perchè stavolta $\alpha'(t_0)$ è nulla.

E la (19) vale così in quasi tutto J_t. Questa circostanza porge, ovviamente, la misurabilità del prodotto $\varphi[\alpha(t), t, 0]\alpha'(t)$ e quindi la sua sommabilità in tutto J_t, attesa la disuguaglianza

$$|\varphi[\alpha(t), t, 0]\alpha'(t)| \leq M[\alpha(t)]\,|\alpha'(t)|$$

e la sommabilità di questo secondo membro.

4. - Passiamo ora alla dimostrazione del nostro teorema.

Se t e $t+h$ sono due punti di I_t, la assoluta continuità della funzione f, separatamente rispetto alle singole variabili x_r $(r = 1, 2, \dots, n)$, porge la

$$(27) \qquad \frac{f[x_1(t+h), x_2(t+h), \dots, x_n(t+h)] - f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]}{h} =$$

$$= \sum_1^n{}_r \frac{1}{h} \int_{x_r(t)}^{x_r(t+h)} f'_{x_r}[x_1(t), \dots, x_{r-1}(t), \xi_r, x_{r+1}(t+h), \dots, x_n(t+h)]d\xi_r\,;$$

e quindi, attese le II) e III), la

$$(28) \qquad |f[x_1(t+h), x_2(t+h), \dots, x_n(t+h)] - f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]| \leq$$

$$\leq \sum_1^n{}_r \left| \int_{x_r(t)}^{x_r(t+h)} L_r(\xi_r)d\xi_r \right| \leq \sum_1^n{}_r \left| \int_t^{t+h} L_r[x_r(\xi)]x'_r(\xi)d\xi \right|.$$

Di qui, in maniera ovvia, l'assoluta continuità della funzione composta $f[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]$.

Questa è allora quasi ovunque derivabile; quindi per dimostrare quasi ovunque la (2), attesa la (27), basta provare che risulta

$$(29)\quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_r(t)}^{x_r(t+h)} f'_{x_r}[x_1(t),\ldots,\, x_{r-1}(t),\, \xi_r,\, x_{r+1}(t+h),\ldots,\, x_n(t+h)]d\xi_r =$$
$$= f'_{x_r}[x_1(t),\, x_2(t),\ldots,\, x_n(t)]x'_r(t),$$

in quasi tutto I_t.

Nel fatto, posto

$$(30)\quad \varphi_r(\xi_r,\, t,\, h) = f'_{x_r}[x_1(t),\ldots,\, x_{r-1}(t),\, \xi_r,\, x_{r+1}(t+h),\ldots,\, x_n(t+h)],$$

si riconosce che il lemma 2 dato nel n. 3 per le funzioni φ ed $\alpha(t)$ e gli intervalli J_x, J_t, J_h, si può applicare alle funzioni φ_r ed $x_r(t)$, relativamente agli intervalli: $a_r \leq x_r \leq b_r$, $c+\rho \leq t \leq d-\rho$, $-\rho \leq h \leq \rho$, ρ essendo un qualsiasi numero positivo e minore di $\dfrac{d-c}{2}$.

A norma di quel lemma e dell'arbitrarietà di ρ, in quasi tutto I_t sussiste l'uguaglianza

$$(31)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_r(t)}^{x_r(t+h)} \varphi_r(\xi_r,\, t,\, h)d\xi_r = \varphi_r[x_r(t),\, t,\, 0]x'_r(t),$$

ove

$$(32)\qquad \varphi_r[x_r(t),\, t,\, 0]x'_r(t) =$$
$$= f'_{x_r}[x_1(t),\ldots,\, x_{r-1}(t),\, x_r(t),\, x_{r+1}(t),\ldots,\, x_n(t)]x'_r(t)$$

è sommabile in I_t.

Di qui la (29) e quindi la (2). Per ottenere la (3) basta integrare la (2) sull'intervallo $(c,\, t)$, ricordare che $f[x_1(t), x_2(t),\ldots,\, x_n(t)]$ è assolutamente continua e che le funzioni (32) sono sommabili nell'intervallo I_t. Il teorema è provato.