RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Ipergruppoidi di ordine minimo in cui una data terna è isolata

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 350-374

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__350_0>

IPERGRUPPOIDI DI ORDINE MINIMO IN CUI UNA DATA TERNA È ISOLATA

Nota (*) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*)

Il presente lavoro si può considerare come la continuazione di un precedente ([1] [1]), nel quale è stato studiato e risolto il problema dell'indipendenza delle condizioni di associatività negli ipergruppoidi (propri), (si veda l'introduzione di [1]).

Si ricordi ([1], n.° 2) che una terna di elementi di un ipergruppoide H^0 si dice isolata in H^0, se essa è l'unica terna non associativa in H^0.

In [1] il problema suddetto è stato risolto dimostrando (cfr. [1], teor. del n.° 2, e n.° 3) che esistono sempre cinque ipergruppoidi (propri) di sostegno H in cui sono risp. isolate le cinque terne (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a), (a, a, a), (a, b, c), H essendo un qualunque insieme contenente i tre elementi (distinti) a, b, c. Inoltre esistono tre ipergruppoidi (propri) di sostegno $\{a, b\}$ in cui sono risp. isolate le prime tre di queste terne, mentre non ne esiste alcuno in cui è isolata la quarta.

Nella presente nota viene considerato il problema (già risolto per i gruppoidi — moltiplicazione univoca — da Al. Climescu, in [2]), di determinare (a meno di isomorfismi) tutti gli ipergruppoidi (propri) di ordine minimo in cui una data terna è isolata, problema immediatamente riconducibile (v. il preced. capov. e il n.° 3 di [1]) ai due seguenti:

(*) Pervenuta in Redazione il 12 agosto 1957.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

I) Determinare tutti gli ipergruppoidi (propri) di sostegno $\{a, b\}$ in cui sono risp. isolate le terne (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a).

II) Determinare tutti gli ipergruppoidi (propri) di sostegno $\{a, b, c\}$ in cui sono risp. isolate le terne (a, a, a), (a, b, c).

Nella 1ª parte del § 1 (n.ⁱ 1 e 2) il problema I) viene competamente risolto mediante i teoremi 1, 2 e 3.

Nella 2ª parte del § 1 (n.ⁱ 3-6), il teor. 3 viene sfruttato per dimostrare (n.º 6, corollario) che una terna di elementi di un insieme H può essere isolata in un ipergruppoide (proprio) di sostegno H, senza esserlo invece nell'uniformizzante di alcun ipergruppoide (proprio) di sostegno H; (l'uniformizzante di un ipergruppoide di sostegno H è un gruppoide avente come elementi i sottinsiemi non vuoti di H: n.º 3).

Nel § 2 (n.ⁱ 7-12) viene iniziata la soluzione del problema II) determinando, mediante i teoremi 4, 5, 6 e 7, tutti gli ipergruppoidi (propri) di sostegno $\{a, b, c\}$ in cui è isolata la terna (a, a, a) e nei quali sono simultaneamente soddisfatte le due seguenti, ulteriori condizioni:

1) $aa = D$;

2) la coppia (ab, ba) è eguale ad una delle coppie (a, c), (b, c), (D, c), (a, E), (b, E), (D, E), (a, F), dove si è posto $D = \{a, b\}$, $E = \{a, c\}$, $F = \{b, c\}$.

Si sono così trovati (oltre a quello segnalato in [1]) altri 23 ipergruppoidi (propri) di sostegno $\{a, b, c\}$ in cui la terna (a, a, a) è isolata.

§ 1

1. - Manteniamo tutte le definizioni e le notazioni adottate in [1].

In [1] (n.º 6, I), II), III)) è stata dimostrata l'esistenza di tre ipergruppoidi propri di sostegno $H = \{a, b\}$ in cui sono rispettivam. isolate le tre terne (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a). Ora ci proponiamo di determinare tutti gli ipergruppoidi propri di sostegno $H = \{a, b\}$ in cui ciascuna di queste tre terne è isolata.

TEOREMA 1: *L'unico ipergruppoide proprio di sostegno $H = \{a, b\}$ in cui la terna (a, a, b) è isolata è quello definito dalla seguente tabella*:

$$(1) \qquad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & H & b \\ b & H & H \end{array}$$

Infatti, sappiamo già che in questo ipergruppoide la terna (a, a, b) è isolata ([1], n.° 6, I)). Basta dunque dimostrare l'unicità, la quale risulta appunto dalle otto proposizioni seguenti, (si ricordi la definiz. (16), [1], n.° 7).

La terna (a, a, b) non è isolata in $H^0(a, A_2, A_3, A_4)$, qualunque siano A_2, A_3, A_4. Infatti, in $H^0(a, A_2, A_3, A_4)$ la terna (a, a, b) è associativa, (se $A_2 = a$, $(aa)b = a(ab) = a$; se $A_2 = b$, $(aa)b = a(ab) = b$; se $A_2 = H$, $(aa)b = a(ab) = H$).

La terna (a, a, b) non è isolata in $H^0(b, A_2, A_3, A_4)$, qualunque siano A_2, A_3, A_4. Infatti, se $A_2 \neq A_3$ la terna (a, a, a) non è associativa $(A_2 = ab = a(aa)$, $A_3 = ba = (aa)a)$; distinguiamo allora i tre casi $A_2 = A_3 = a, b, H$. Se (a, a, b) fosse isolata in $H^0(b, a, a, A_4)$, allora sarebbe $A_4 = bb = b(aa) = (ba)a = aa = b$, contro l'ipotesi che qualche A_i sia $= H$. Se (a, a, b) fosse isolata in $H^0(b, b, b, A_4)$, allora sarebbe $A_4 = bb = b(aa) = (ba)a = ba = b$, pure contro l'ipotesi. Se infine (a, a, b) fosse isolata in $H^0(b, H, H, A_4)$, allora dovrebbe essere $A_4 = bb = b(aa) = (ba)a = Ha = H$, il che è assurdo poichè in $H^0(b, H, H, H)$ la terna (a, a, b) è associativa $((aa)b = bb = H,\ a(ab) = aH = H)$.

Se la terna (a, a, b) è isolata in $H^0(H, A_2, A_3, A_4)$, allora $A_2 \neq H$. Infatti in $H^0(H, H, A_3, A_4)$ la terna (a, a, b) è associativa $((aa)b = Hb = H,\ a(ab) = aH = H)$.

La terna (a, a, b) non è isolata in $H^0(H, a, A_3, A_4)$, qualunque siano A_3, A_4. Infatti, se (a, a, b) fosse isolata in $H^0(H, a, A_3, A_4)$, sarebbe necessariamente $A_4 = a$, qualunque sia A_3; e invero, dovrebbe allora (a, a, b) non essere associativa, quindi, poichè $a(ab) = aa = H$, dovrebbe $Hb (= (aa)b)$ essere $\neq H$, ossia, dato che $Hb = ab + bb = a + A_4$ ([1], n.° 2: in tutto il presente lavoro il simbolo

$$(2) \qquad I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

denoterà la riunione degli insiemi $I_1, I_2, \dots, I_n$) [2]), dovrebbe appunto essere $A_4 \neq b, H$. Ne seguirebbe che $A_3 = ba = bA_4 = b(bb) = (bb)b = A_4 b = ab = a$, il che è assurdo, poichè in $H^0(H, a, a, a)$ la terna (b, b, a) non è associativa $((bb)a = aa = H,\ b(ba) = ba = a)$.

Se la terna (a, a, b) *è isolata in* $H^0(H, b, A_3, A_4)$, *allora* $A_4 \neq b$. Infatti, in tale ipotesi, poichè in $H^0(H, b, A_3, A_4)$ è $a(ab) = ab = b$, $(aa)b = Hb = ab + bb = b + A_4$, deve essere $b \neq b + A_4$, quindi appunto $A_4 \neq b$.

La terna (a, a, b) *non è isolata in* $H^0(H, b, A_3, a)$, *qualunque sia* A_3. Infatti, se (a, a, b) fosse isolata in $H^0(H, b, A_3, a)$, sarebbe $A_3 = ba = b(bb) = (bb)b = ab = b$, il che è assurdo, poichè in $H^0(H, b, b, a)$ la terna (b, a, a) non è associativa $((ba)a = ba = b,\ b(aa) = bH = ba + bb = b + a = H)$.

Se la terna (a, a, b) *è isolata in* $H^0(H, b, A_3, H)$, *allora* $A_3 \neq a$. Infatti, in tale ipotesi, poichè in $H^0(H, b, A_3, H)$ è $H = bb = b(ab) = (ba)b = A_3 b$, dev'essere appunto $A_3 \neq a$, quindi $A_3 = b$ oppure $A_3 = H$.

Se la terna (a, a, b) *è isolata in* $H^0(H, b, A_3, H)$, *allora* $A_3 = H$. Infatti, per quanto visto nel preced. capov., non può essere $A_3 = a$. Non può nemmeno essere $A_3 = b$, poichè in $H^0(H, b, b, H)$ la terna (b, a, a) non è associativa $((ba)a = ba = b,\ b(aa) = bH = ba + bb = H)$.

In conclusione abbiamo visto che, se la terna (a, a, b) è isolata in $H^0(A_1, A_2, A_3, A_4)$, allora necessariamente $A_1 = H$, $A_2 = b$, $A_3 = H$, $A_4 = H$, e perciò il teor. 1 è dimostrato.

TEOREMA 2: *L'unico ipergruppoide, proprio di sostegno* $H = \{a, b\}$ *in cui la terna* (b, a, a) *è isolata è quello definito dalla seguente tabella*:

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & H & H \\ b & b & H \end{array} \tag{3}$$

Infatti, questo teorema è una conseguenza immediata del precedente teor. 1 e del lemma 5 di [1] (n.° 5).

[2]) Cfr. le (5) del successivo n.° 3.

2. - Resta dunque da considerare la terna (a, b, a). Vale, al proposito, il seguente

TEOREMA 3: *Gli unici due ipergruppoidi propri di sostegno* $H = \{a, b\}$ *in cui la terna* (a, b, a) *è isolata sono quelli definiti dalle seguenti tabelle*:

$$(4) \qquad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & H & a \\ b & b & b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & H & b \\ b & a & b \end{array}$$

Infatti, sappiamo già che la terna (a, b, a) è isolata nel primo di questi due ipergruppoidi ([1], n.° 6, III)). Ma allora (per il lemma 5 di [1], n.° 5) essa è isolata anche nel secondo (che è opposto del primo). Basta dunque dimostrare che (a, b, a) non è isolata in nessun altro ipergruppoide proprio di sostegno $H = \{a, b\}$, e ciò risulta appunto dalle cinque proposizioni seguenti.

La terna (a, b, a) *non è isolata in* $H^0(a, A_2, A_3, A_4)$, *qualunque siano* A_2, A_3, A_4. Infatti, in $H^0(a, A_2, A_3, A_4)$ la terna (a, b, a) è associativa. E invero, se $A_2 = a$, a è uno zero scalare sinistro; se $A_2 = b$, a è un'unità scalare sinistra ([1], n.° 5, lemmi 3 e 2); se $A_2 = H$, allora $(ab)a = Ha = = aa + ba = a + A_3$, $a(ba) = aA_3$, ed è appunto $a + A_3 = = aA_3$, come subito si verifica distinguendo i tre casi $A_3 = = a, b, H$.

La terna (a, b, a) *non è isolata in* $H^0(b, A_2, A_3, A_4)$, *qualunque siano* A_2, A_3, A_4. Infatti, se $A_2 \neq A_3$, *la terna* (a, a, a) non è associativa ($A_2 = ab = a(aa)$, $A_3 = ba = (aa)a$); se $A_2 = A_3$, la terna (a, b, a) è associativa, come subito si riconosce distinguendo i tre casi $A_2 = a, b, H$ ($(ab)a = A_2a$, $a(ba) = aA_3 = aA_2$).

Se la terna (a, b, a) *è isolata in* $H^0(H, A_2, A_3, A_4)$, *allora* $A_2 \neq H$. Infatti, in $H^0(H, H, A_3, A_4)$ la terna (a, b, a) è associativa, qualunque siano A_3, A_4 ($(ab)a = Ha = H$, $a(ba) = = aA_3 = H$ qualunque sia A_3).

Se la terna (a, b, a) *è isolata in* $H^0(H, a, A_3, A_4)$, *allora* $(A_3, A_4) = (b, b)$, ([1], n.° 6, fine del 2° capov.). Infatti, in $H^0(H, a, a, A_4)$ e in $H^0(H, a, H, A_4)$ la terna (a, b, a) è associativa $((ab)a = a(ba) = H)$; quindi dev'essere $A_3 = b$, e di conseguenza $A_4 = bb = A_3 b = (ba)b = b(ab) = bA_2 = ba = = A_3 = b$.

Se la terna (a, b, a) *è isolata in* $H^0(H, b, A_3, A_4)$, *allora* $(A_3, A_4) = (a, b)$. Infatti in $H^0(H, b, b, A_4)$ la terna (a, b, a) è associativa $((ab)a = a(ba) = b)$ e così pure in $H^0(H, b, H, A_4)$ $((ab)a = a(ba) = H)$; quindi $A_3 = a$, e di conseguenza $A_4 = = bb = bA_2 = b(ab) = (ba)b = A_3 b = ab = A_2 = b$.

In conclusione abbiamo visto che, se la terna (a, b, a) è isolata in $H^0(A_1, A_2, A_3, A_4)$, allora necessariamente $(A_1, A_2, A_3, A_4) = (H, a, b, b)$, oppure $(A_1, A_2, A_3, A_4) = = (H, b, a, b)$, e perciò il teor. 3 è dimostrato.

3. - Sia ora H un insieme non vuoto qualsiasi, ed H^0 un ipergruppoide di sostegno H.

Denotiamo con $U[H]$ l'insieme i cui elementi sono i sottinsiemi non vuoti di H. la moltiplicazione di H^0 (definita in H) dà luogo, mediante la definizione (1) di [1] (n.° 2), ad una moltiplicazione univoca definita in $U[H]$, rispetto alla quale questo insieme diventa un gruppoide, che denoteremo con $U[H^0]$ e che chiameremo (cfr. [3], p. 159) l'*uniformizzante* dell'ipergruppoide H^0.

Un ipergruppoide, oppure un gruppoide, dicesi *associativo*, se, qualunque siano i suoi elementi x, y, z, si ha $(xy)z = x(yz)$.

Facilmente si verifica che: Affinchè un ipergruppoide H^0 sia associativo è necessario e sufficiente che sia associativo il suo uniformizzante $U[H^0]$.

E invero, la sufficienza essendo evidente ([1], n.° 2, 1° e 2° capov.), sia H^0 associativo e siano X, Y, Z elementi di $U[H^0]$. Allora, se $v \in (XY)Z$, esistono $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$, tali che $v \in (xy)z$. Ma poichè, per ipotesi, $(xy)z \subseteq x(yz)$, ne segue che $v \in x(yz) \subseteq X(YZ)$. Quindi $(XY)Z \subseteq X(YZ)$; e analogamente si vede che $X(YZ) \subseteq (XY)Z$. Dunque appunto $(XY)Z = = X(YZ)$.

Se H^0 è l'ipergruppoide associato ([1], n.° 1, penult. capov.) ad un gruppoide G^0 $(G = H)$, diremo *uniformizzante* del gruppoide G^0 l'uniformizzante di H^0, e lo denoteremo con $U[G^0]$. G^0 è evidentemente isomorfo ad un sottogruppoide proprio di

$U[G^0]$, (cosicchè l'osservazione precedente — penult. capov. — permette ad esempio di ampliare ogni gruppoide associativo ad un nuovo gruppoide pure associativo).

Se H^0 è un ipergruppoide, e se $X, Y, Z \in U[H]$, si verifica immediatamente (ricordata la definiz. (2) del n.° 1) che in $U[H^0]$ si ha (cfr. [3], p. 159):

$$(5) \qquad X(Y+Z)=XY+XZ, \quad (X+Y)Z=XZ+YZ.$$

Dunque: L'uniformizzante $U[H^0]$ di un ipergruppoide H^0 è il « gruppoide moltiplicativo » di un « sistema a doppia composizione » (cfr. [5], p. 41) in cui la moltiplicazione è distributiva rispetto all'addizione (v. (5)) e in cui quest'ultima è associativa, commutativa e idempotente. Un tale sistema (a doppia composizione) verrà detto *di tipo* Δ.

Da quanto detto nei due precedenti capoversi risulta poi in particolare che: Ogni gruppoide G^0 è isomorfo ad un sottogruppoide *proprio* del gruppoide moltiplicativo (l'uniformizzante di G^0) di un sistema a doppia composizione di tipo Δ.

4. - È chiaro che un dato gruppoide $\mathfrak{G}^0$, il cui *sostegno* $\mathfrak{G}$ (insieme degli elementi di $\mathfrak{G}^0$) abbia lo stesso numero cardinale dell'insieme $U[H]$ dei sottinsiemi non vuoti di un insieme H, non è in generale isomorfo all'uniformizzante $U[H^0]$ di qualche ipergruppoide H^0 di sostegno H.

Basta infatti pensare al caso in cui l'*ordine* del gruppoide $\mathfrak{G}^0$ (cioè il numero cardinale del suo sostegno $\mathfrak{G}$) è 3, quindi il numero cardinale di H è $2: H=\{a, b\}$. In tal caso gli ipergruppoidi di sostegno H (e quindi i loro uniformizzanti) sono $3^4=81$, mentre i gruppoidi di sostegno $U[H]=\{a, b, H\}$ ([1], n.° 1, 3° capov.), ad uno dei quali (e a non più di $3!=6$) $\mathfrak{G}^0$ è isomorfo, sono $3^9=19683$.

È pure chiaro che: Affinchè una terna (x, y, z) di elementi di un ipergruppoide H^0 sia associativa in H^0, è necessario e sufficiente che essa sia associativa nell'uniformizzante $U[H^0]$ di H^0.

Basta infatti ricordare la definizione (2) del n.° 2 di [1]. Naturalmente dire che « la terna (x, y, z) è associativa in $U[H^0]$ » significa dire ([1], n.° 1, 3° capov.) che in $U[H^0]$

è associativa la terna $(\{x\}, \{y\}, \{z\})$. E dire che la terna (u, v, w) di elementi di un gruppoide G^0 è associativa (in G^0) significa dire che $(uv)w = u(vw)$.

Se x, y, z sono elementi di un gruppoide G^0, la terna (x, y, z) si dirà *isolata* in G^0, se essa non è associativa (in G^0), mentre tutte le rimanenti terne (di elementi di G^0) sono invece associative.

In base all'ultima osservazione (terzult. capov.) è dunque evidente che: *Se una terna (x, y, z) di elementi di un ipergruppoide H^0 è isolata nell'uniformizzante di H^0, allora essa è pure isolata in H^0.*

5. - Il viceversa di quest'ultima affermazione non è però vero, ossia: *Una terna isolata in un ipergruppoide H^0* (proprio o non) *può benissimo non essere isolata nell'uniformizzante di H^0.*

Infatti, gli uniformizzanti dei due ipergruppoidi propri definiti dalle tabelle (4) (nei quali la terna (a, b, a) è isolata) sono risp. rappresentati dalle tabelle seguenti $(H = \{a, b\})$:

(6)

	a	b	H
a	H	a	H
b	b	b	b
H	H	H	H

	a	b	H
a	H	b	H
b	a	b	H
H	H	b	H

Che questi due gruppoidi (6) risultino opposti (due gruppoidi diconsi *opposti* se hanno lo stesso sostegno G e se il prodotto di u e v eseguito nell'uno coincide col prodotto di v ed u eseguito nell'altro, qualunque siano $u, v \in G$), è in accordo con l'osservazione (8) di [1], n.° 5. Ebbene, la terna (a, b, a) non è appunto isolata né nel primo di questi gruppoidi (6) (perchè qui la terna (a, b, H) non è associativa: $(ab)H = aH = H$, $a(bH) = ab = a$), né nel secondo (perchè qui non è associativa la terna (H, b, a) — cfr. [1]: lemma 5 del n.° 5 e penult. capov. del n.° 1 —).

Un altro esempio è fornito dall'ipergruppoide proprio H^0 di sostegno $H = \{a, b, c\}$ definito dalla tabella (12) in [1], n.° 6. La terna (a, b, c), isolata in H^0, non è appunto isolata in $U[H^0]$ (poichè qui la terna (a, b, E), con $E = \{a, c\}$ non è associativa: $(ab)E = bE = E$, $a(bE) = aE = a$).

Esempi relativi ad ipergruppoidi non propri si ottengono pure facilmente, sfruttando alcuni risultati di G. Szász ([4], p. 23) e di Al. Climescu ([2], p. 4), in base ai quali la terna (a, a, b) è isolata in ciascuno dei tre gruppoidi definiti dalle seguenti tabelle:

$$(7)\qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & c & a & a \\ b & a & b & c \\ c & a & b & c \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & c & b & c \\ b & b & b & b \\ c & c & c & c \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & c & b & c \\ b & c & c & c \\ c & c & c & c \end{array}$$

Ebbene, posto $D = \{a, b\}$, $E = \{a, c\}$, $F = \{b, c\}$, si vede subito che (a, a, b) non è appunto isolata né nell'uniformizzante del gruppoide $(7)_1$ $((Da)b \neq D(ab))$, né in quello del $(7)_2$ $((Ea)b \neq E(ab))$, né in quello del (7_3) $((DE)F \neq D(EF))$.

A proposito degli esempi addotti nei tre precedenti capoversi, si osservi che, se la terna (u, v, w) è isolata in un ipergruppoide H^0, e se X, Y, Z sono elementi qualsiasi di $U[H^0]$, allora la terna (X, Y, Z) può essere non associativa in $U[H^0]$ soltanto se $u \in X$, $v \in Y$, $w \in Z$. Infatti è chiaro che, se tutte le terne (x, y, z) con $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ son distinte da (u, v, w), e quindi sono associative in H^0, si ha $(XY)Z = X(YZ)$ (cfr. n.° 3, 5° capov.). D'altra parte, se $u \in X$, $v \in Y$, $w \in Z$, la terna (X, Y, Z) può benissimo essere associativa (ad es., nell'uniformizzante del gruppoide $(7)_1$, la terna (D, E, D) è associativa nonostante $a \in D$, $a \in E$, $b \in D$). L'esame diretto degli esempi su addotti (anche solo di quelli dell'ultimo capoverso) mostrerebbe inoltre come il numero delle terne associative fra quelle (X, Y, Z) con $u \in X$, $v \in Y$, $w \in Z$ possa subire forti variazioni al variare dell'ipergruppoide esaminato. Può anche darsi che tali terne, tranne la (u, v, w), siano tutte associative, ossia:

Può effettivamente darsi che una terna di element di un ipergruppoide H^0 sia isolata in H^0 e nell'uniformizzante di H^0.

Infatti, gli uniformizzanti dei due ipergruppoidi definiti dalle tabelle (1) e (3) sono risp. rappresentati dalle tabelle seguenti ($H = \{a, b\}$):

(8)

	a	b	H
a	H	b	H
b	H	H	H
H	H	H	H

	a	b	H
a	H	H	H
b	b	H	H
H	H	H	H

Ebbene, la terna (a, a, b), isolata nell'ipergruppoide (1), lo è appunto pure nel relativo uniformizzante, poichè la tabella $(8)_1$ di questo non è altro (salvo lo scambio di H con c) che la tabella (3) di [4], § 3. Così pure la terna (b, a, a) è isolata sia nell'ipergruppoide (3), sia nel relativo uniformizzante $(8)_2$ (v. [4], § 3, (4)).

6. - Dal teorema 3 del n.° 2, in virtù di due osservazioni fatte nei precedenti n.[1] 4 e 5, discende subito il seguente

Corollario: *Può darsi che una terna di elementi di un insieme H* (avente numero cardinale ≥ 2) *sia isolata in un ipergruppoide proprio di sostegno H, e non sia invece isolata nell'uniformizzante di alcun ipergruppoide proprio di sostegno H.*

Infatti, dimostreremo che la terna (a, b, a) non è isolata nell'uniformizzante di alcun ipergruppoide proprio di sostegno $H = \{a, b\}$.

E invero, (a, b, a) non è isolata negli uniformizzanti dei due ipergruppoidi propri di sostegno H definiti dalle tabelle (4) (n.° 5, 2° capov.). Inoltre (a, b, a) non può essere isolata nell'uniformizzante $U[H^0]$ di un ipergruppoide proprio H^0 (di sostegno H) diverso dai due ipergruppoidi (4), perchè, ammesso che lo fosse, dovrebbe essere isolata anche in H^0 (ult. capov. del n.° 4), il che non è possibile per il teorema 3.

Osserveremo che il precedente corollario può anche dedursi direttamente da un risultato di Climescu ([2], Teorema III), in base al quale i due gruppoidi definiti dalle seguenti tabelle

(9)

	a	b	H
a	a	H	H
b	a	b	H
H	H	H	H

	a	b	H
a	a	a	H
b	H	b	H
H	H	H	H

sono gli unici gruppoidi di sostegno $\{a, b, H\}$ in cui la terna (a, b, a) è isolata. E invero, né l'uno né l'altro di questi due gruppoidi (9) è l'uniformizzante di un ipergruppoide proprio di sostegno $H = \{a, b\}$: tali ipergruppoidi propri dovrebbero essere infatti rispettivam. rappresentati dalle due tabelle seguenti:

(10)

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & H \\ b & a & b \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & a & a \\ b & H & b \end{array}$$

mentre si verifica immediatamente che gli uniformizzanti di questi ipergruppoidi (10) sono appunto rispettivam. distinti dai due gruppoidi (9).

Incidentalmente, osserveremo pure che vale un risultato analogo al precedente corollario per gli ipergruppoidi non propri. Infatti, la terna (a, a, b) non è isolata nell'uniformizzante di alcun gruppoide di sostegno $\{a, b, c\}$. Ciò discende subito (con ragionamento analogo a quello fatto nel 4º capov. di questo n.º 6) da un altro risultato di Climescu ([2], p. 4), in base al quale i tre gruppoidi definiti dalle tabelle (7) sono gli unici gruppoidi di sostegno $\{a, b, c\}$ in cui la terna (a, a, b) *è isolata.*

Il corollario dimostrato in questo n.º 6 e le considerazioni svolte nei n.^{i} 4 e 5 sono particolarmente interessanti nei riguardi del problema (risolto nel precedente lavoro [1]) dell'indipendenza delle condizioni di associatività negli ipergruppoidi propri. Tali considerazioni dimostrano infatti l'impossibilità di ricondurre fruttuosamente (o addirittura banalmente) la soluzione di quel problema (tramite il concetto di uniformizzante) alla soluzione dello stesso problema per i gruppoidi (data da Szász in [4]), e giustificano quindi pienamente la necessità dello studio diretto eseguito in [1], (cfr. [1], ult. capov. del n.º 4).

§ 2

7. - Recentemente Climescu ha determinato (a meno d'isomorfismi) tutti i gruppoidi di ordine minimo in cui le diverse terne sono isolate ([2], Teorema III).

Chi scrive avrebbe desiderato di portare a termine l'analoga ricerca (già iniziata nei n.[i] 1 e 2) di tutti gli ipergruppoidi propri di ordine minimo in cui le varie terne sono isolate; ma, essendosi imposto dei limiti di tempo, ha dovuto desistere (almeno per ora) da tale proposito.

Ciò perchè la determinazione di tutti gli ipergruppoidi propri (non isomorfi) di sostegno $H = \{a, b, c\}$ in cui è isolata la terna (a, a, a), e di quelli in cui è isolata la terna (a, b, c), (terminazione che, in virtù del teor. del n.° 2 di [1] e delle osservazioni del n.° 3 di [1], sarebbe sufficiente per completare tale ricerca), si è rivelata più difficoltosa e, soprattutto, molto più lunga del previsto.

L'autore della presente nota ha comunque deciso di riportare qui ugualmente la maggior parte dei risultati parziali già ottenuti, (relativi alla determinazione degli ipergruppoidi propri di sostegno $H = \{a, b, c\}$ in cui è isolata la terna (a, a, a)), ritenendo abbastanza interessanti anche le relative dimostrazioni. Di tale ricerca sistematica, e delle difficoltà che essa può presentare, nulla era stato detto infatti nel n.° 6 di [1], dove gli esempi di ipergruppoidi occorrenti eran stati addotti senza accennare alla loro determinazione.

8. - Dato l'insieme $H = \{a, b, c\}$, e posto

$$D = \{a, b\}, \qquad E = \{a, c\}, \qquad F = \{b, c\}, \tag{11}$$

è chiaro che, dare la tabella (di moltiplicazione)

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ b & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ c & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{array} \qquad (A_{rs} = a, b, c, D\ E, F, H;\ r, s = 1, 2, 3) \tag{12}$$

di un ipergruppoide H° di sostegno H, equivale a dare la 9-upla ordinata

$$(A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}),$$

onde si può parlare di *tab.* $(A_{11}, \dots, A_{33})$.

Vi sono dunque tanti ipergruppoidi (distinti) di sostegno $H=\{a, b, c\}$ quante sono le disposizioni con ripetizione di classe 9 dei sette oggetti a, b, c, D, E, F, H, cioè $7^9 = 40353607$. Siccome, fra questi, vi sono $3^9=19683$ ipergruppoidi non propri, *gli ipergruppoidi propri di sostegno* $H=\{a, b, c\}$ *sono* 40333924 $(=7^9-3^9)$.

L'ipergruppoide *proprio* H^0 di sostegno $H=\{a, b, c\}$, definito dalla tab. $(A_{11}, \ldots, A_{33})$ verrà denotato con

$$H^0(A_{11}, \ldots, A_{33}). \tag{13}$$

Ove a, b, c vengano risp. chiamati *il 1°, il 2°, il 3° elemento* dell'insieme $H=\{a, b, c\}$, si osservi che A_{rs} $(r, s=1, 2, 3)$ denota il prodotto dell'r-esimo e dell's-esimo elemento di H.

9. - Se in $H^0(A_{11}, \ldots, A_{33})$ la terna (a, a, a) è isolata, allora necessariamente $A_{11} \neq a$ ([1], n.° 5, lemma 4). I casi $A_{11}=b$, $A_{11}=c$ sono riconducibili l'uno all'altro per isomorfismo (mediante la corrispondenza biunivoca f di H su sé stesso in cui $f(a)=a$, $f(b)=c$, $f(c)=b$), e lo stesso dicasi dei casi $A_{11}=D$, $A_{11}=E$. Per ricercare gli $H^0(A_{11}, \ldots, A_{33})$ in cui (a, a, a) è isolata, bisogna dunque esaminare direttamente i quattro casi seguenti:

$$A_{11}=b, \quad A_{11}=D, \quad A_{11}=F, \quad A_{11}=H. \tag{14}$$

Ciascuno dei casi (14) può dar luogo a dei nuovi sottocasi, che bisogna pure esaminare direttamente, e così via.

Nel seguito verrà esaminato soltanto, e non completamente, il 2° dei casi (14):

$$A_{11}=D,$$

(i successivi teoremi 4, 5, 6 e 7 esauriscono lo studio della metà circa dei relativi sottocasi).

Cominciamo ad osservare che:

Se la terna (a, a, a) *è isolata in* $H^0(D, A_{12}, \ldots, A_{33})$, *allora* c *appartiene ad uno, e ad uno solo, dei due sottinsiemi* A_{12}, A_{21} (*di* H). Infatti (si ricordino la (2) del n.° 1 e le

(5) del n.° 3): $(aa)a = Da = (a + b)a = aa + ba = D + A_{21}$, $a(aa) = aD = a(a + b) = aa + ab = D + A_{12}$, e dev'essere $(aa)a \neq a(aa)$.

Poniamo ([1], n.° 1, 3° capov.):

$$U_1 = \{a, b, D\}, \qquad U_2 = \{c, E, F, H\}. \tag{15}$$

Se (a, a, a) è isolata in $H^0(D, A_{12}, \ldots, A_{33})$, dev'essere dunque

$$A_{12} \in U_1, \quad A_{21} \in U_2, \tag{16}$$

oppure

$$A_{12} \in U_2, \quad A_{21} \in U_1. \tag{16'}$$

Di questi 24 sottocasi (16) e (16′), cui dà luogo il caso $A_{11} = D$, basterà esaminare direttamente i soli (16). E infatti ciascuno dei sottocasi (16′) è riconducibile ad uno dei (16) mediante il lemma 5 del n.° 5 di [1].

Come già avvertito, considereremo soltanto una parte dei 12 sottocasi (16), e precisamente i 7 seguenti ([1], n.° 6, fine 3° capov.):

$$\begin{aligned}(A_{12}, A_{21}) = (a, c),\ (b, c),\ (D, c),& \\ (a, E),\ (b, E),\ (D, E),\ (a, F).&\end{aligned} \tag{17}$$

10. - Lo studio del 1°, 4°, 5° e 7° dei casi (17) dà luogo al seguente

TEOREMA 4: *Non esiste alcun ipergruppoide proprio di sostgno* $H = \{a, b, c\}$ *nel quale* (fatte le posizioni (11)) *siano simultaneamente soddisfatte le tre condizioni seguenti:*

I) *La terna* (a, a, a) *è isolata;*

II) $aa = D$*;*

III) *La coppia* (ab, ba) *è eguale ad una delle coppie* (a, c), (a, E), (b, E), (a, F).

Dividiamo la dimostrazione in quattro parti.

1) In $H^0(A_{11}, \ldots, A_{33})$ sia (a, a, a) isolata e sia

$$A_{11} = D, \ A_{12} = a, \ A_{21} = c.$$

Allora si ha $(aa)b = (a+b)b = ab + bb = a + A_{22}$, $a(ab) = aa = D$, quindi $a + A_{22} = D$, da cui $b \in A_{22}$ e $A \subseteq D$, cioè $A_{22} = b$ oppure $A_{22} = D$.

1_1) Ferme le altre ipotesi di 1), sia inoltre

$$A_{22} = b.$$

Allora $A_{13} = ac = a(ba) = (ab)a = aa = D$, $A_{31} = ca = (ba)a = b(aa) = b(a+b) = ba + bb = c + b = F$; ne segue $(ac)a = Da = (a+b)a = aa + ba = D + c = H$, $a(ca) = aF = a(b+c) = ab + ac = a + D = D$, il che è assurdo.

1_2) Ferme le altre ipotesi di 1), sia

$$A_{22} = D.$$

Allora (cfr. 1_1)) $A_{13} = D$, $A_{31} = ca = ba + bb = c + D = H$, donde $(ac)a = H$, $a(ca) = aH = a(a+b+c) = aa + ab + ac = D + a + D$, il che è assurdo.

2) In $H^0(A_{11}, \dots, A_{33})$ sia (a, a, a) isolata e sia

$$A_{11} = D, \; A_{12} = a, \; A_{21} = E.$$

Allora (cfr. 1)) $(aa)b = a + A_{22}$, $a(ab) = D$, donde $A_{22} = b$ oppure $A_{22} = D$; ma, poichè $(ab)b = ab = a$, $a(bb) = aA_{22}$, non può essere $A_{22} = D$, quindi

$$A_{22} = b.$$

Inoltre $(ab)a = aa = D$, $a(ba) = aE = a(a+c) = D + A_{13}$ implica $A_{13} \subseteq D$, cioè $A_{13} = a, b, D$ (s'intenda, e così pure nel seguito, $A_{13} = a$, oppure $= b$, oppure $= D$). Ne segue $(aa)c = (a+b)c = ac + bc = A_{13} + A_{23} = a + A_{23}, b + A_{23}, D + A_{23}$, mentre $a(ac) = aA_{13} = aa, ab, aD$, cioè $a(ac) = D, a, D$; quindi non può essere $A_{13} = b$, e perciò $A_{13} = a, D$, e inoltre $A_{23} \subseteq D$, cioè $A_{23} = a, b, D$. Da qui segue $(bb)c = bc = A_{23} = a, b, D$, mentre $b(bc) = bA_{23} = ba, bb, bD$, cioè $b(bc) = E, b, H$, donde

$$A_{23} = b.$$

Ma allora $(bb)a = ba = E$, $b(ba) = bE = b(a+c) = ba + bc = E + b = H$, il che è assurdo.

3) In $H^0(A_{11}, \dots, A_{33})$ sia (a, a, a) isolata e sia

$$A_{11} = D,\ A_{12} = b,\ A_{21} = E.$$

Allora $(ab)a = ba = E$, $a(ba) = aE = a(a + c) = D + A_{13}$, donde $E = D + A_{13}$, e quindi $D \subseteq E$, il che è assurdo.

4) In $H^0(A_{11}, \dots, A_{33})$ sia (a, a, a) isolata e sia

$$A_{11} = D,\ A_{12} = a,\ A_{21} = F.$$

Allora, come in 2), si vede che

$$A_{22} = b.$$

Inoltre $(ab)a = aa = D$, $a(ba) = aF = a(b + c) = ab + ac = = a + A_{13}$ implica $A_{13} = b, D$. Ne segue $(aa)c = (a + b)c = = ac + bc = A_{13} + A_{23} = b + A_{23},\ D + A_{23}$, mentre $a(ac) = = aA_{13} = ab, aD$, cioè $a(ac) = a, D$, donde

$$A_{13} = D$$

e $A_{23} \subseteq D$, cioè $A_{23} = a, b, D$. Da qui segue $(ab)c = ac = D$, $a(bc) = aA_{23} = aa, ab, aD$, cioè $a(bc) = D, a, D$, donde $A_{23} = a, D$. Ma allora $(bb)c = bc = A_{23} = a, D$, mentre $b(bc) = bA_{23} = = ba, bD$, cioè $b(bc) = F$, il che è assurdo.

Il teorema 4 è dunque dimostrato.

11. - Lo studio del 2° e del 3° dei casi (17) dà luogo risp. ai due seguenti teoremi 5 e 6.

TEOREMA 5: *L'unico ipergruppoide proprio di sostegno $H = = \{a, b, c\}$, con*

$$aa = D,\ ab = b,\ ba = c,$$

nel quale la terna (a, a, a) è isolata, è quello definito dalla seguente tabella:

$$(18)\qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & D & b & c \\ b & c & b & c \\ c & F & b & c \end{array} \qquad (D = \{a, b\},\ F = \{b, c\}).$$

Infatti, in $H^0(A_{11}, \ldots, A_{33})$ sia (a, a, a) isolata e sia

$$A_{11} = D, \ A_{12} = b, \ A_{21} = c.$$

Allora $(aa)b = (a + b)b = ab + bb = b + A_{22}$, $a(ab) = ab = b$, donde $A_{22} = b$. Quindi $A_{23} = bc = b(ba) = (bb)a = ba = c$, $A_{31} = ca = (ba)a = b(aa) = b(a + b) = ba + bb = c + b = F$, $A_{32} = cb = (ba)b = b(ab) = bb = b$. Inoltre $A_{13} = c = a(ba) = (ab)a = ba = c$, $A_{33} = cc = c(ba) = (cb)a = ba = c$. Si ottiene dunque appunto la tabella (18).

Viceversa, si verifica assai facilmente, ricordando il lemma 3 del n.° 5 di [1] (si osservi che b, c sono zeri scalari destri), che nell'ipergruppoide definito dalla (18) la terna (a, a, a) è effettivamente isolata.

TEOREMA 6: *L'unico ipergruppoide proprio di sostegno $H = \{a, b, c\}$, con*

$$aa = D, \ ab = D, \ ba = c,$$

nel quale la terna (a, a, a) è isolata, è quello definito dalla seguente tabella:

$$(19) \qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & D & D & H \\ b & c & b & c \\ c & F & F & F \end{array} \qquad (D = \{a, b\}, \ F = \{b, c\}).$$

Infatti, in $H^0(A_{11}, \ldots, A_{33})$ sia (a, a, a) isolata e sia

$$A_{11} = D, \ A_{12} = D, \ A_{21} = c.$$

Allora $(aa)b = (a + b)b = ab + bb = D + A_{22}$, $a(ab) = a(a + b) = D + D = D$, donde $A_{22} \subseteq D$, e quindi $A_{22} = a, b, D$. Occupiamoci separatamente di questi tre casi.

1) Sia inoltre

$$A_{22} = a.$$

Allora $A_{31} = ca = (ba)a = b(aa) = b(a + b) = ba + bb = c + a = E$, $A_{32} = cb = (ba)b = b(ab) = b(a + b) = E$, donde $(ca)a = Ea = (a + c)a = aa + ca = D + E = H$, mentre $c(aa) = c(a + b) = ca + cb = E + E = E$, il che è assurdo.

2) Sia inoltre

$$A_{22} = b.$$

Allora $A_{13} = ac = a(ba) = (ab)a = (a + b)a = aa + ba = = D + c = H$, $A_{23} = bc = b(ba) = (bb)a = ba = c$, $A_{31} = ca = = (ba)a = b(aa) = b(a + b) = c + b = F$, $A_{32} = cb = (ba)b = = b(ab) = b(a + b) = F$, $A_{33} = cc = (ba)c = b(ac) = bH = = b(a + b + c) = ba + bb + bc = c + b + c = F$. Dunque si ottiene appunto la tabella (19). Viceversa, si verifica facilmente che nell'ipergruppoide definito dalla (19) la terna (a, a, a) è effettivamente isolata, (l'associatività delle 9 terne (x, y, z) con $x = c$ risulta immediatamente dall'osservare che $ct = F$ ed $Ft = F$ per ogni $t \in H$; si osservi inoltre che l'associatività delle 5 terne (a, b, a), (b, b, a), (b, a, a), (b, a, b), (b, a, c) è stata già implicitamente provata qui sopra; esclusa ancora la terna (a, a, a), basta dunque esaminare direttamente 12 terne soltanto fra le 27 di H^3).

3) Sia inoltre

$$A_{22} = D.$$

Allora $(bb)b = Db = (a + b)b = ab + bb = D + D = D$, mentre $b(bb) = b(a + b) = ba + bb = c + D = H$, il che è assurdo.

12. - Consideriamo adesso il 6° dei casi (17), che è l'unico non ancora esaminato.

In $H^0(A_{11}, \dots, A_{33})$ sia dunque (a, a, a) isolata e sia

$$A_{11} = D, \ A_{12} = D, \ A_{21} = E.$$

Allora $(aa)b = (a + b)b = ab + bb = D + A_{22}$, $a(ab) = = a(a + b) = D + D = D$, donde $A_{22} = a, b, D$. Inoltre $(ba)a = = Ea = (a + c)a = aa + ca = D + A_{31}$, $b(aa) = b(a + b) = = ba + bb = E + A_{22}$, quindi $D + A_{31} \subseteq E + A_{22}$, da cui $b \in A_{22}$, perciò $A_{22} = b, D$. Ma, poichè $(bb)b = A_{22}b$, mentre $b(bb) = bA_{22}$, non può essere $A_{22} = D$ $(Db = D + A_{22}, bD = = E + A_{22})$, dunque

$$A_{22} = b.$$

Ne segue $E = A_{21} = ba = (bb)a = b(ba) = bE = b(a + c) = = ba + bc = E + A_{23}$, donde $A_{23} \subseteq E$, cioè $A_{23} = a, c, E$. Quindi, poichè $A_{23} = bc = (bb)c = b(bc) = bA_{23}$ (donde si vede che non può essere $A_{23} = a$), dev'essere $A_{23} = c$, oppure $A_{23} = E$. Occupiamoci separatamente di questi due casi.

1) Sia inoltre

$$A_{23} = c.$$

Allora $a(bc) = ac = A_{13}$, $(ab)c = Dc = (a + b)c = ac + bc = A_{13} + c$, donde $c \in A_{13}$, quindi $A_{13} = c, E, F, H$. D'altra parte $(aa)c = Dc = A_{13} + c = A_{13}$, $a(ac) = aA_{13}$, quindi $A_{13} = aA_{13}$, donde si vede che non può essere $A_{13} = E$, né $A_{13} = F$; perciò $A_{13} = c, H$. Inoltre $b(ac) = bA_{13}$, $(ba)c = Ec = (a + c)c = ac + cc = A_{13} + A_{33}$, quindi $bA_{13} = A_{13} + A_{33}$; da qui si vede che $A_{13} = c$ implica $A_{33} = c$. Invece $A_{13} = H$ implica $c \in A_{33}$; ciò perchè $(ac)c = A_{13}c$, $a(cc) = aA_{33}$, quindi $A_{13}c = aA_{33}$, donde l'asserto.

1_1) Sia inoltre

$$A_{13} = c.$$

Allora, come già osservato, risulta pure

$$A_{33} = c.$$

Poichè (2° capov. di questo n.°) $E + A_{22} \subseteq D + A_{31}$, si ha $c \in A_{31}$, cioè $A_{31} = c, E, F, H$. Inoltre, essendo $(ba)b = Eb = (a + c)b = ab + cb = D + A_{32}$, $b(ab) = b(a + b) = ba + bb = E + A_{22}$, quindi $D + A_{32} = E + A_{22}$, si ha pure $c \in A_{32}$, cioè $A_{32} = c, E, F, H$. Ma, poichè $a(ca) = aA_{31}$, $(ac)a = ca = A_{31}$, quindi $A_{31} = aA_{31}$, si vede che non può essere $A_{31} = E$, né $A_{31} = F$, dunque $A_{31} = c, H$. Inoltre $(ac)b = cb = A_{32}$, $a(cb) = aA_{32}$ implica $A_{32} = aA_{32}$, donde pure $A_{32} = c, H$. Avendosi poi $c(aa) = c(a + b) = ca + cb = A_{31} + A_{32}$, $(ca)a = A_{31}a$, quindi $A_{31}a = A_{31} + A_{32}$, si vede che $A_{31} = c$ implica $A_{32} = c$, cioè che $(A_{31}, A_{32}) \neq (c, H)$. Abbiamo dunque ottenuto le tre tabelle seguenti:

(20)

	a	b	c
a	D	D	c
b	E	b	c
c	A_{31}	A_{32}	c

dove

$$(A_{31}, A_{32}) = (c, c), (H, c), (H, H).$$

Viceversa, si verifica facilmente (osservato che c è uno zero scalare destro: [1], n.° 5, lemma 3) che in ciascuno degli ipergruppoidi definiti da queste tre tabelle la terna (a, a, a) è effettivamente isolata. Questa verifica è ulteriormente facilitata dal 2° dei due lemmi seguenti, gran parte della cui semplice dimostrazione è stata già fatta implicitamente in questo n.°; essi saranno utili anche in seguito.

LEMMA 1: Se, in $H^0(A_{11}, \dots, A_{33})$, $A_{11} = D$, $A_{12} = D$, $A_{21} = E$, $A_{22} = b$, $A_{23} = c$ oppure $= E$, $c \in A_{13}$, $c \in A_{31}$, $c \in A_{32}$, allora le terne (a, a, b), (a, b, a), (a, b, b), (b, a, a), (b, a, b), (b, b, a), (b, b, b), (b, b, c) sono associative.

LEMMA 2: Se, in $H^0(A_{11}, \dots, A_{33})$, $A_{11} = D$, $A_{12} = D$, $A_{21} = E$, $A_{22} = b$, $A_{23} = c$, $A_{13} = c$ oppure $= H$, $c \in A_{31}$, $c \in A_{32}$, $c \in A_{33}$, e se, inoltre, (A_{13}, A_{33}) è diversa da ciascuna delle tre coppie (c, E), (c, F), (c, H), allora, oltre alle otto terne elencate nel precedente lemma 1, sono associative anche le seguenti: (a, a, c), (a, b, c), (a, c, c), (b, a, c), (b, c, a), (b, c, b), (b, c, c).

1_2) Sia inoltre

$$A_{13} = H.$$

Allora, come già osservato, A_{31}, A_{32}, $A_{33} = c, E, F, H$. Poichè $c(bb) = cb = A_{32}$, $(cb)b = A_{32}b$, quindi $A_{32} = A_{32}b$, si vede che non può essere $A_{32} = E$; perciò $A_{32} = c, F, H$.

$1_{2,1}$) Sia inoltre

$$A_{32} = c.$$

Allora $A_{31} = ca = (cb)a = c(ba) = cE = (a + c) = ca + cc = A_{31} + A_{33}$, quindi $A_{33} \subseteq A_{31}$. Ne segue, poichè $(ca)c = A_{31}c$, $c(ac) = cH = c(a + b + c) = A_{31} + A_{32} + A_{33}$, che $A_{31}c = A_{31} + A_{32} = A_{31} + c = A_{31}$, donde risulta che non può essere $A_{31} = E$, ($A_{31}c = cc, Ec, Fc, Hc$, cioè $A_{31}c = A_{33}$, $A_{33} + H$, $A_{33} + c$, $A_{33} + H + c$, e si ricordi che $A_{33} \subseteq A_{31}$); perciò $A_{31} = c, F, H$. Inoltre, avendosi $A_{33} = cc = c(cb) = (cc)b = A_{33}b$, dev'essere $A_{33} \neq E$, quindi pure $A_{33} = c, F, H$. Poichè dev'essere $A_{33} \subseteq A_{31}$, si vede poi che (A_{31}, A_{33}) è diversa da ciascuna delle tre coppie (c, F), (c, H), (F, H). Essendo poi $(cc)a = A_{33}a$, $c(ca) = cA_{31}$, quindi $A_{33}a = cA_{31}$, si vede che (A_{31}, A_{33}) è pure diversa da ciascuna delle due coppie (F, c), (F, F), $(cA_{31} = cc, cF, cH$, cioè $cA_{31} = A_{33}, A_{33}, H$, mentre $A_{33}a = ca, Fa, Ha$, cioè $A_{33}a = A_{31}, A_{31} + E, H)$. Abbiamo così trovato le quattro tabelle seguenti:

(21)

	a	b	c
a	D	D	H
b	E	b	c
c	A_{31}	c	A_{33}

dove

$$(A_{31}, A_{33}) = (c, c), (H, c), (H, F), (H, H).$$

Viceversa, si verifica facilmente (con l'aiuto del preced. lemma 2) che in ciascuno degli ipergruppoidi definiti da queste quattro tabelle la terna (a, a, a) è effettivament isolata.

$1_{2,2}$) Sia inoltre

$$A_{32} = F.$$

Avendosi $(cc)c = A_{33}c$, $c(cc) = cA_{33}$, quindi $A_{33}c = cA_{33}$, risulta allora (A_{31}, A_{33}) diversa da ciascuna delle due coppie (c, E), (E, E), $(A_{33}c = cc, Ec, Fc, Hc$, cioè $A_{33}c = c, H, F, H$, mentre $cA_{33} = cc, cE, cF, cH$, cioè $cA_{33} = c, E + A_{31}, F, H)$. Inoltre $c(aa) = c(a + b) = A_{31} + A_{32} = A_{31} + F = c + F, E + F, F + F, H + F$, cioè $c(aa) = F, H, F, H$, mentre $(ca)a = A_{31}a = ca, Ea, Fa, Ha$, cioè $(ca)a = c, H, H, H$, dunque dev'essere $A_{31} \neq c$, $A_{31} \neq F$; perciò $A_{31} = E, H$. D'altra parte, dovendo essere (c, c, a) associativa, dev'essere $A_{33}a = cA_{31}$, donde risulta $(A_{31}, A_{33}) \neq (E, F)$, $(cA_{31} = cE, cH$, cioè $cA_{31} = E + A_{33}, H$, mentre $A_{33}a = ca, Ea, Fa, Ha$, cioè $A_{33}a = A_{31}, H, A_{31} + E, H)$. Si ha poi $(cb)a = Fa = (b + c)a = ba + ca = E + A_{31} = E + E, E + H$, cioè $(cb)a = E, H$, mentre $c(ba) = cE = c(a + c) = ca + cc = A_{31} + A_{33} = E + A_{33}, H + A_{33}$, cioè $c(ba) = E + A_{33}, H$; ne risulta $(A_{31}, A_{33}) \neq (E, H)$. Abbiamo dunque trovato le cinque tabelle seguenti:

(22)
$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & D & D & H \\ b & E & b & c \\ c & A_{31} & F & A_{33} \end{array}$$

dove

$$(A_{31}, A_{33}) = (E, c), \ (H, c), \ (H, E), \ (H, F), \ (H, H).$$

Viceversa, si verifica facilmente (lemma 2) che, in ciascuno degli ipergruppoidi definiti da queste cinque tabelle, (a, a, a) è isolata.

$1_{2,3}$) Sia inoltre

$$A_{32} = H.$$

Allora $(cb)c = Hc = (a + b + c)c = H + c + A_{33} = H$, $c(bc) = = cc = A_{33}$, dunque

$$A_{33} = H.$$

Poichè inoltre $(ca)a = A_{31}a = ca, Ea, Fa, Ha$, cioè $(ca)a = c$, H, H, H, mentre $c(aa) = c(a + b) = A_{31} + H = H$, dev'essere $A_{31} \neq c$, quindi $A_{31} = E, F, H$. Abbiamo dunque le tre tabelle seguenti:

(23)
$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & D & D & H \\ b & E & b & c \\ c & A_{31} & H & H \end{array} \qquad (A_{31} = E, F, H),$$

e si verifica facilmente (lemma 2) che, in ciascuno dei tre ipergruppoidi da esse definiti, (a, a, a) è isolata.

2) Sia inoltre (v. 3° capov. di questo n.°):

$$A_{23} = E.$$

Si ha $(ab)a = Da = (a + b)a = D + E = H$, $a(ba) = aE = = a(a + c) = aa + ac = D + A_{13}$, quindi $H = D + A_{13}$, donde $c \in A_{13}$, cioè $A_{13} = c, E, F, H$. Inoltre $(ab)c = (a + b)c = = ac + bc = A_{13} + E$, $a(bc) = aE = a(a + c) = aa + ac = = D + A_{13}$, quindi $A_{13} + E = A_{13} + D$, donde $b \in A_{13}$; perciò $A_{13} = F, H$. Si osservi poi che (come risulta — cfr. 1_1) — dalla considerazione delle due terne (b, a, a), (b, a, b)) A_{31}, $A_{32} = c$, E, F, H.

2_1) Sia inoltre

$$A_{13} = F.$$

Allora $(ba)c = Ec = (a + c)c = ac + cc = F + A_{33}$, $b(ac) = = bF = b(b + c) = bb + bc = b + E = H$, quindi $H = F + A_{33}$, donde $a \in A_{33}$, cioè $A_{33} = a, D, E, H$. Ma, poichè $(bc)c = Ec = = (a + c)c = ac + cc = F + A_{33}$, $b(cc) = bA_{33}$, quindi $bA_{33} = = F + A_{33} = H$, si vede che dev'essere $A_{33} \neq a, E$; dunque $A_{33} = D, H$. Inoltre $(ac)c = Fc = (b + c)c = bc + cc = E + A_{33}$, $a(cc) = aA_{33}$, quindi $aA_{33} = E + A_{33}$, donde $A_{33} \neq D$: perciò

$$A_{33} = H.$$

Si ha $(ac)b = Fb = (b + c)b = bb + cb = b + A_{32} = b + c$, $b + E$, $b + F$, $b + H$, cioè $(ac)b = F, H, F, H$, mentre $a(cb) = = aA_{32} = ac, aE, aF, aH$, cioè $a(cb) = F, H, H, H$, donde $A_{32} \neq F$; quindi $A_{32} = c, E, H$. Inoltre $(bc)b = Eb = (a + c)b = = ab + cb = D + A_{32} = H$, $b(cb) = bA_{32} = bc, bE, bH$, cioè $b(cb) = E, E, H$, donde $A_{32} \neq c, E$, dunque

$$A_{32} = H.$$

Avendosi poi $(bc)a = Ea = (a + c)a = D + A_{31} = H$, $b(ca) = = bA_{31} = bc, bE, bF, bH$, cioè $b(ca) = E, E, H, H$, risulta $A_{31} \neq c, E$, quindi $A_{31} = F, H$. Abbiamo così le due tabelle seguenti:

$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & D & D & F \\ b & E & b & E \\ c & A_{31} & H & H \end{array} \qquad (A_{31} = F, H), \tag{24}$$

e si verifica facilmente che (a, a, a) è isolata in ciascuno dei due ipergruppoidi da esse definiti (lemma 1).

2_2) Sia inoltre

$$A_{13} = H.$$

Si osservi che (come risulta — cfr. 2_1) — dall'associatività delle due terne (b, c, a), (b, c, b)) A_{31}, $A_{32} = F, H$. Si ha poi

$(ac)c = Hc = (a+b+c)c = H$, $a(cc) = aA_{33}$, quindi $H = aA_{33}$, donde $A_{33} = c, E, F, H$. Ma $(bc)c = Ec = (a+c)c = ac + cc = H$, $b(cc) = bA_{33} = bc, bE, bF, bH$, quindi $A_{33} \neq c, E$; perciò $A_{33} = F, H$. Osserviamo ora che $(cb)c = A_{32}c = Fc, Hc$, cioè $(cb)c = H$, mentre $c(bc) = cE = c(a+c) = ca + cc = A_{31} + A_{33}$, quindi $A_{31} + A_{33} = H$, donde $(A_{31}, A_{33}) \neq (F, F)$. Inoltre $(ca)a = A_{31}a = Fa, Ha$, cioè $(ca)a = H$, mentre $c(aa) = = c(a+b) = A_{31} + A_{32}$, quindi $A_{31} + A_{32} = H$, donde $(A_{31}, A_{32}) \neq \neq (F, F)$. Infine $(cc)c = A_{33}c = Fc, Hc$, cioè $(cc)c = H$, mentre $c(cc) = cA_{33} = cF, cH$, cioè $c(cc) = A_{32} + F, H$, donde $(A_{32}, A_{33}) \neq (F, F)$. Abbiamo dunque ottenuto le quattro tabelle seguenti:

(25)

	a	b	c
a	D	D	H
b	E	b	E
c	A_{31}	A_{32}	A_{33}

dove

$$(A_{31}, A_{32}, A_{33}) = (F, H, H), \ (H, F, H), \ (H, H, F), \ (H, H, H).$$

Viceversa si verifica facilmente (tenendo conto del lemma 1 e delle terne già considerate in 2_2)) che la terna (a, a, a) è effettivamente isolata in ciascuno dei quattro ipergruppoidi definiti dalle (25).

Lo studio del 6° dei casi (17) (fatto in questo n.° 12) dà dunque luogo al seguente

TEOREMA 7: *Gli ipergruppoidi propri di sostegno* $H = \{a, b, c\}$, *con*

$$aa = D, \ ab = D, \ ba = E,$$

in cui la terna (a, a, a) *è isolata, sono* 21, *e precisamente quelli definiti* (in base alle posizioni (11)) *dalle tabelle* (20), (21), (22), (23), (24), (25).

BIBLIOGRAFIA

[1] BOCCIONI, D.: *Indipendenza delle condizioni di associatività negli ipergruppoidi,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 27 (1957), pp. 228-244.

[2] CLIMESCU, AL.: *Independenta conditiilor de asociativitate,* Bul Inst. Polit. Iasi (S. N.), tomul 1 (5), fasc. 1-2 (1955), pp. 1-8.

[3] KUNTZMANN, J.: *Contribution à l'étude des systèmes multiformes,* Annales Fac. Sci. Univ. Toulouse (IV), vol. 3 (1939), pp. 155-194.

[4] SZÁSZ, G.: *Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen,* Acta Scientiarum Math., vol. 15 (1953), pp. 20-28.

[5] VAN DER WAERDEN, B. L.: *Moderne Algebra, I,* dritte Auf., Springer (1950).

ERRATA

In [1] (v. preced. bibliografia), p. 243, righe 12-13 dall'alto, si legga: « ciascuna di esse non è soddisfatta e le altre cinque sì » invece di: « ciascuna di esse è soddisfatta e le altre cinque no ».