RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

Sulle equazioni paraboliche lineari del quarto ordine, I

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 319-349

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__319_0>

SULLE EQUAZIONI PARABOLICHE LINEARI DEL QUARTO ORDINE, *I*

Nota (*) *di* BRUNO PINI (*a Modena*)

Proseguendo [1]) nello studio delle equazioni paraboliche lineari del quarto ordine studiamo presentemente l'equazione

$$(1) \qquad \bar{a}(x, y)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\bar{b}(x, y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \bar{c}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum_{0}^{3}{}_i\, \bar{a}_i(x, y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i} +$$

$$+ \bar{d}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \bar{e}(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = \bar{f}(x, y),$$

essendo i coefficienti e il termine noto funzioni continue in un campo $\mathcal{A}$ del piano x, y ove si suppone che $\bar{a}$ e c siano di segno costante.

Siano $x = \chi_i(y)$, $\alpha \leq y \leq \beta$, $i = 1, 2$, due funzioni continue tali che $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ per $\alpha \leq y \leq \beta$ e indichiamo con $\mathfrak{D}$ il dominio $\alpha \leq y \leq \beta$, $\chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$, che supponiamo contenuto in $\mathcal{A}$, con γ_i la curva $x = \chi_i(y)$, $\alpha \leq y \leq \beta$, e con $\mathcal{C}$ il segmento di caratteristica $y = \alpha$, $\chi_1(\alpha) \leq x \leq \chi_2(\alpha)$. I problemi di valori al contorno che si pongono per l'equazione (1) e per il dominio $\mathfrak{D}$ sono di varia natura secondochè l'equazione

$$(2) \qquad at^2 + 2bt + \bar{c} = 0$$

(*) Pervenuta in Redazione il 9 agosto 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Modena.

1) B. PINI, *Sul problema fondamentale di valori al contorno per una classe di equazioni paraboliche lineari*, Annali Mat. pura appl., 4, 43 (1957).

ha due radici reali dello stesso segno o due radici complesse coniugate, oppure due radici reali di segni contrari. Sono da considerare a parte i casi, che diremo *di degenerazione,* di $c=0$, $b\neq 0$ e $b=c=0$, $d\neq 0$; in questi casi l'equazione (1) partecipa anche di una certa natura iperbolica per cui, oltre a problemi di soli valori al contorno, possono porsi problemi in cui si assegnano anche dati su uno o due archi del tipo dei γ_i, interni a $\mathfrak{D}$.

In questa prima Nota consideriamo il caso che l'equazione (2) abbia in $\mathfrak{A}$ due radici reali dello stesso segno, distinte; il sottocaso di una radice reale doppia va trattato a parte; noi però non ce ne occuperemo essendo in altre Note [2]) contenuto quanto è sufficiente per la estensione dei risultati che qui seguono; dalla trattazione resta però escluso il caso che, pur essendo le due radici di (2) dello stesso segno, esse possano in una parte di $\mathfrak{D}$ coincidere e nella parte restante essere distinte.

I problemi che consideriamo sono tutti ordinari; risulterà tuttavia evidente come possano trattarsi anche problemi generalizzati del tipo di quello considerato nella seconda delle Note citate in [2]).

1. Riduzione a forma canonica.

L'equazione (1) è formalmente invariante per una trasformazione regolare di variabili

$$\xi=\xi(x,y), \qquad \eta=\eta(x,y) \tag{3}$$

se è

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}\equiv 0. \tag{4}$$

---

[2]) B. PINI, *Traduzione in equazioni integrali di un problema analogo al problema biarmonico fondamentale,* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 22 (1953); *Su una generalizzazione del problema fondamentale di valori al contorno per l'equazione del calore iterata,* Rend. Sem. Fac. Sci. Cagliari, 26 (1956).

Poichè l'equazione (2) diventa

$$(2') \qquad \bar{a}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^4 t^2 + 2\bar{b}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} t + \bar{c}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = 0$$

ed è

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} \neq 0,$$

si ha che, secondochè la (2) ha due radici reali dello stesso segno oppure di segni contrari oppure due radici complesse coniugate, anche la (2′) ha, rispettivamente, due radici reali dello stesso segno, oppure di segni contrari, oppure due radici complesse coniugate.

Se è $\chi_1(y) < \chi_2(y)$, $\alpha \leq y \leq \beta$, e le $\chi_i(y)$ hanno le derivate seconde continue in $\alpha \leq y \leq \beta$, la trasformazione

$$(3') \qquad \xi = \frac{x - \chi_1(y)}{\chi_2(y) - \chi_1(y)}, \qquad \eta = \int_\alpha^y \frac{dz}{[\chi_2(z) - \chi_1(z)]^2}$$

lascia formalmente invariata l'equazione (1) e muta il dominio $\mathfrak{D}$ nel rettangolo $\mathfrak{R}$: $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq h$, essendo

$$h = \int_\alpha^\beta \frac{dz}{[\chi_2(z) - \chi_1(z)]^2}.$$

Se i coefficienti $\bar{a}$ e $\bar{c}$ sono dotati delle derivate $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial^2/\partial x^2$, $\partial^2/\partial x \partial y$, $\partial^2/\partial y^2$, $\partial^3/\partial x^3$ continue, tenendo presente che $\bar{a}$ e $\bar{c}$ hanno lo stesso segno se, come attualmente si suppone, la (2) ha due radici reali dello stesso segno, la trasformazione

$$(3'') \qquad \xi = \int_{x_0}^x \sqrt[4]{\frac{\bar{c}(z, y)}{\bar{a}(z, y)}}\, dz, \qquad \eta = y$$

muta l'equazione (1) nell'equazione

$$(1') \qquad \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + 2\frac{\bar{b}}{\sqrt{\bar{a}\,\bar{c}}}\frac{\partial^3 u}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \dots = \frac{\bar{f}}{\bar{c}}.$$

Combinando (3′) e (3″), se le $\chi_i(y)$ e i coefficienti $\bar{a}$ e $\bar{c}$ hanno le regolarità specificate, ci si può ricondurre a una equazione del tipo

$$(5)\qquad \mathcal{L}[u]=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-2a(x,y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\sum_0^3{}_i\, b_i(x,y)\frac{\partial^i u}{\partial x^i}+$$

$$+c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+d(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=f(x,y)$$

e a un dominio rettangolare $\mathcal{R}$, sia $0\leq x\leq 1,\ \ 0\leq y\leq h$.

Possiamo supporre che sia sempre

$$(6)\qquad a(x,y)>0 \qquad (a(x,y)>1)$$

perchè, se fosse sempre $a(x,y)<0$ $(a(x,y)<-1)$, ci si potrebbe ricondurre al caso precedente mutando di segno la y.

Se poi $b_3(x,y)$ è dotata delle derivate $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial^2/\partial x^2$, $\partial^2/\partial x\partial y$, $\partial^2/\partial y^2$, $\partial^3/\partial x^3$ continue, operando la trasformazione

$$(7)\qquad u(x,y)=v(x,y)\exp\left[-\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x} b_3(z,y)dz+\omega(y)\right]$$

con $\omega(y)$ funzione due volte derivabile su $0\leq y\leq h$, la (5) diventa

$$(5')\qquad \mathcal{L}'[v]=\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}-2a(x,y)\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\sum_0^2{}_i\, b_i'(x,y)\frac{\partial^i v}{\partial x_i}+$$

$$+c'(x,y)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+d'(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}=f'(x,y)$$

che si può dire la *forma canonica* della (1).

2. Problema di valori al contorno e relativo teorema di unicità.

Il problema che si pone naturalmente per la (5) relativamente a $\mathcal{R}$ è quello consistente nella determinazione di una funzione u continua in $\mathcal{R}$ insieme alle derivate $\partial u/\partial x$

e $\partial u/\partial y$, tale che

$$\mathfrak{L}[u] = f \quad \text{per } 0 < x < 1,\ 0 < y \leq h,$$

della quale siano prefissati i valori

$$u(x, 0), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} \quad \text{per } 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, y), \quad u(1, y), \quad \frac{\partial u(0, y)}{\partial x}, \quad \frac{\partial u(1, y)}{\partial x} \quad \text{per } 0 \leq y \leq h.$$

Riferendoci all'equazione in forma canonica si ha che:

Se $\partial b_2'/\partial x$, $\partial b_2'/\partial y$, $\partial c'/\partial x$, $\partial b_0'/\partial y$, $\partial^2 a/\partial x^2$ sono continue in $\mathfrak{R}$ (ferma restando l'ipotesi della continuità di tutti i coefficienti di (5')), esiste al più una soluzione del problema specificato continua in $\mathfrak{R}$ insieme alle derivate $\partial/\partial x$, $\partial^2/\partial x^2$, $\partial^3/\partial x^3$, $\partial/\partial y$, $\partial^2/\partial x\partial y$.

Sia $v(x, y)$ una soluzione di $\mathfrak{L}'[v] = 0$ avente la regolarità specificata e tale che

$$v(x, 0) = \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$v(0, y) = v(1, y) = \frac{\partial v(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(1, y)}{\partial x} = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq y \leq h.$$

Si ha

$$(8) \qquad 0 = \iint_{\mathfrak{R}} \frac{\partial v}{\partial y} \mathfrak{L}'[v] dx dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - b_2' \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + b_0' v^2 \right]_{y=h} dx + \iint_{\mathfrak{R}} \left[2a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial b_2'}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right.$$

$$+ \left(- \frac{\partial b_2'}{\partial x} + b_1' \right) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \left(- \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial c'}{\partial x} + d' \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 -$$

$$\left. - \frac{1}{2} \frac{\partial b_0'}{\partial y} v^2 \right] dx dy.$$

Indicando col simbolo [...] certe espressioni dipendenti esclusivamente dai coefficienti di (5), dalle derivate prime, seconde, terze e $\partial^4/\partial x^3 \partial y$ di b_3, dalle derivate prime di b_2 e c, dalle derivate $\partial/\partial y$ di b_0, b_1 e d e dalle derivate prime e $\partial^2/\partial x^2$ di a (l'esistenza e continuità delle quali è assicurata dalle ipotesi fatte sui coefficienti di $\mathfrak{L}'$), si ha

$$b_2' = [...] - 2a \frac{d\omega}{dy}, \qquad \frac{\partial b_2'}{\partial y} = [...] - 2 \frac{\partial a}{\partial y} \frac{d\omega}{dy} - 2a \frac{d^2\omega}{dy^2},$$

$$-\frac{\partial b_2'}{\partial x} + b_1' = [...] + \left(2 \frac{\partial a}{\partial x} + ab_3 + c\right) \frac{d\omega}{dy},$$

$$-\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial c'}{\partial x} + d' = [...] + 2 \frac{d\omega}{dy},$$

$$b_0' = [...] + [...] \frac{d\omega}{dy} + \left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2 + \frac{d^2\omega}{dy^2}, \qquad \frac{\partial b'}{\partial y} = [...] + [...] \frac{d\omega}{dy} +$$

$$+ [...] \frac{d^2\omega}{dy^2} + 2 \frac{d\omega}{dy} \frac{d^2\omega}{dy^2} + \frac{d^3\omega}{dy^3}.$$

Indicando con M una certa costante positiva, poniamo

$$\omega(y) = -\exp\,[M(2h - y)];$$

tenendo presente che per $0 \leq y \leq h$ è $\exp\,[M(2h - y)] \geq$ $\geq \exp\,[Mh]$, si ha che per M abbastanza grande riesce

$$b_2' < 0, \qquad \frac{\partial b_2'}{\partial y} > 0. \tag{9}$$

Inoltre

$$\frac{\partial b_2'}{\partial y} \backsim 2aM^2 \exp\,[M(2h - y)],$$

$$-\frac{\partial b_2'}{\partial x} + b_1' \backsim \left(2 \frac{\partial a}{\partial x} + ab_3 + c\right) M \exp\,[M(2h - y)],$$

$$-\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial c'}{\partial x} + d' \backsim 2M \exp\,[M(2 \quad - y)];$$

ne segue che per $0 \leq y \leq h$ ed M abbastanza grande, la forma quadratica

$$(10) \qquad \frac{1}{2}\frac{\partial b_2'}{\partial y}\lambda^2 + \left(-\frac{\partial b_2'}{\partial x} + b_1'\right)\lambda\mu + \left(-\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial c'}{\partial x} + d'\right)\mu^2$$

è definita positiva.

È poi

$$\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2 + \frac{d^2\omega}{dy^2} \geq M^2 \exp[M(2h-y)](\exp[Mh]-1) >$$
$$> M^3 h \exp[M(2h-y)]$$

e quindi per M abbastanza grande è

$$(11) \qquad b_0' > 0.$$

Infine

$$2\frac{d\omega}{dy}\frac{d^2\omega}{dy^2} + \frac{d^3\omega}{dy^3} < -M^3 \exp[2M(2h-y)]$$

e quindi per M abbastanza grande è

$$(12) \qquad \frac{\partial b_0'}{\partial y} < 0.$$

Dalle (9), (11), e (12), poichè la (10) è definita positiva, segue che la (8) è ammissibile solo a patto che sia $v \equiv 0$.

Nella dimostrazione ora fatta si è sfruttata la possibilità di trasformare $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{R}$.

Ciò richiede che sia lecita la (3') e quindi che sia $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ per $\alpha \leq y \leq \beta$ e le $\chi_i(y)$ siano dotate di derivate seconde continue. Supponiamo, più in generale, che le $\chi_i(y)$ abbiano derivate seconde continue e sian tali che $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ solo per $\alpha < y \leq \beta$ e sia $\chi_1(\alpha) = \chi_2(\alpha)$. Ebbene:

Nelle precedenti ipotesi sui coefficienti sussiste ancora il teorema di unicità se esiste un δ, $\alpha<\delta<\beta$, tale che $\frac{d}{dy}\chi_1(y) \leq 0$, $\frac{d}{dy}\chi_2(y) \geq 0$ su $\alpha < y \leq \delta$ e le $\frac{d}{dy}\chi_i(y)$ sono integrabili $\alpha \leq y \leq \beta$.

È evidente che basta limitarci al dominio $\mathfrak{D}_\delta(\alpha \leq y \leq \delta$, $\chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y))$ perchè su $\mathfrak{D} - \mathfrak{D}_\delta$ si può ripetere il ragionamento precedente.

Indichiamo con γ l'arco composto dalle porzioni di γ_1 e γ_2 appartenenti a $\mathfrak{D}_\delta$ e intendiamo che esso, come facente parte di $\mathfrak{F}\mathfrak{D}_\delta$, sia percorso positivamente. Ci riferiamo senz'altro all'equazione (5′) supponendo già effettuate le trasformazioni (3″) (3′) e (7).

Causa la regolarità ammessa per u, da $v(\chi_i(y), y) \equiv \equiv \frac{\partial}{\partial x} v(\chi_i(y), y) \equiv 0$ per $\alpha \leq y \leq \beta$, segue anche $\frac{\partial}{\partial y} v(\chi_i(y), y) \equiv 0$ per $\alpha \leq y \leq \beta$ e quindi

$$0 = \iint_{\mathfrak{D}_\delta} \frac{\partial v}{\partial y} \mathfrak{L}'[v] dx dy = \frac{1}{2} \int_{\chi_1(\delta)}^{\chi_2(\delta)} \left[\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - b_2'\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + b_0' v^2\right]_{y=\delta} dx +$$

$$+ \iint_{\mathfrak{D}_\delta} \left[2a\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial b_2'}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(-\frac{\partial b_2'}{\partial x} + b_1'\right)\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} +\right.$$

$$\left. + \left(-\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial c'}{\partial x} + d'\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial b_0'}{\partial y} v^2\right] dx dy +$$

$$+ \int_\gamma \left[-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx\right].$$

Ma se la derivata $\partial^3/\partial x^2 \partial y$ di v esiste limitata in $\mathfrak{D}_\delta$ è

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dy + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx\right)_\gamma = \left(d\frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)_\gamma = 0,$$

onde l'ultimo integrale si può sostituire con

$$\frac{1}{2} \int_\gamma \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

e questo è ≥ 0, per le ipotesi fatte sulle $\frac{d}{dy} \chi_i(y)$.

3. Il problema per l'equazione ridotta.

D'ora in poi ci riferiamo all'equazione (5) e al rettangolo $\mathfrak{R}$. Consideriamo l'*equazione ridotta*

$$\mathfrak{L}_0[u] = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2a \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{13}$$

ove a indica una costante > 1. Dette λ_1 e λ_2 le radici (positive) dell'equazione $\lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0$, la (13) si può scrivere

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}\right) u = 0.$$

Si può allora esprimere un integrale di (13) come somma d'integrali delle equazioni

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \lambda_i \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad i = 1, 2.$$

Ora se x_0 e x_1 sono due numeri tali che $x_0 < 0$, $x_1 > 1$, e $\omega_i(x)$, $i = 1, 2$, due funzioni continue su $x_0 \leq x \leq x_1$, posto

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \sum_1^2 {}_i \sqrt{\lambda_i} \int_{x_0}^{x_1} \exp\left[- \lambda_i \frac{(x - \xi)^2}{4y}\right] \omega_i(\xi) d\xi, \tag{14}$$

si ha

$$\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ y \to 0+}} u(x, y) = \sum_1^2 {}_i \, \omega_i(\bar{x}), \qquad 0 \leq \bar{x} \leq 1.$$

Se, di più, le $\omega_i(x)$ si suppongono dotate di derivate seconde continue, eseguendo alcune integrazioni per parti, si riconosce che

$$\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ y \to 0+}} \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_1^2 {}_i \frac{1}{\lambda_i} \frac{d^2 \omega_i(\bar{x})}{dx^2}.$$

Pertanto se si richiede che sia

$$u(x, 0) = f_1(x), \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = f_2(x), \qquad 0 \leq x \leq 1, \tag{15}$$

nell'ipotesi che su tutto $0 \leq x \leq 1$ la $f_1(x)$ sia continua con la derivata seconda e la $f_2(x)$ sia continua, basta prolungare le $f_i(x)$ su tutto $x_0 \leq x \leq x_1$ in modo che abbiano ivi la regolarità già specificata e determinare le $\omega_i(x)$ in modo che sia

$$\sum_1^2{}_i\, \omega_i(x) = f_1(x), \qquad \sum_1^2{}_i\, \frac{1}{\lambda_i} \frac{d^2\omega_i(x)}{dx^2} = f_2(x),$$

cioè, ad esempio,

$$\omega_1(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{\xi} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(\lambda_2 f_2(t) - \frac{d^2 f_1(t)}{dt^2}\right) dt d\xi$$

$$\omega_2(x) = f_1(x) - \omega_1(x).$$

Con ciò la (14) è soluzione di (13) per $y > 0$ verificante le condizioni (15).

Pertanto il problema

$$\mathfrak{L}_0[u] = 0 \qquad \text{per} \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y \leq h$$

$$u(x,\ 0) = f_1(x), \quad \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial y} = f_2(x) \qquad \text{per} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,\ y) = \bar{\varphi}_1(y), \quad u(1,\ y) = \bar{\varphi}_2(y), \quad \frac{\partial u(0,\ y)}{\partial x} = \bar{\psi}_1(y),$$

$$\frac{\partial u(1,\ y)}{\partial x} \bar{\psi}_2(y) \qquad \text{per} \qquad 0 \leq y \leq h,$$

nell'ipotesi che $f_1(x)$ sia continua con la derivata seconda ed $f_2(x)$ continua e sia $f_1(0) = \bar{\varphi}_1(0)$, $f_1(1) = \bar{\varphi}_2(0)$, si può ricondurre al problema

$$\mathfrak{L}_0[u] = 0 \qquad \text{per} \qquad 0 < x < 1,\ 0 < y \leq h$$

$$u(x,\ 0) = \frac{\partial u(x,\ 0)}{\partial y} = 0 \qquad \text{per} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

$$u(0,\ y) = \varphi_1(y), \quad u(1,\ y) = \varphi_2(y), \quad \frac{\partial u(0,\ y)}{\partial x} = \psi_1(y),$$

$$\frac{\partial u(1, y)}{\partial x} = \psi_2(y) \qquad \text{per} \qquad 0 \leq y \leq h,$$

essendo $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$.

Si può cercare di risolvere questo problema ponendo

$$u(x, y) = \sum_1^2{}_i \int_0^y [U_i(x, y;\ 0, \eta)\alpha_i(\eta) + U_i(x, y;\ 1, \eta)\beta_i(\eta)]d\eta$$

essendo

$$(16) \quad U_i(x, y;\ \xi, \eta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{y-\eta}} \exp\left[-\lambda_i \dfrac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right] & \text{per} \quad y > \eta \\ 0 & \text{per} \quad y \leq \eta. \end{cases}$$

Si è allora condotti a risolvere il sistema

$$(17) \quad \begin{cases} \sum_1^2{}_i \int_0^y [U_i(0, y;\ 0, \eta)\alpha_i(\eta) + U_i(0, y;\ 1, \eta)\beta_i(\eta)]d\eta = \varphi_1(y) \\ \sum_1^2{}_i \int_0^y [U_i(1, y;\ 0, \eta)\alpha_i(\eta) + U_i(1, y;\ 1, \eta)\beta_i(\eta)]d\eta = \varphi_2(y) \end{cases}$$

$$(18) \quad \begin{cases} -\sqrt{\pi} \sum_1^2{}_i \sqrt{\lambda_i}\, \alpha_i(y) + \dfrac{1}{2} \sum_1^2{}_i \displaystyle\int_0^y \lambda_i \frac{U_i(0, y;\ 1, \eta)}{y-\eta} \beta_i(\eta)d\eta = \psi_1(\eta) \\ \sqrt{\pi} \sum_1^1{}_i \sqrt{\lambda_i}\, \beta_i(y) - \dfrac{1}{2} \sum_1^2{}_i \displaystyle\int_0^y \lambda_i \frac{U_i(1, y;\ 0, \eta)}{y-\eta} \alpha_i(\eta)d\eta = \psi_2(y). \end{cases}$$

Supponiamo che le $\varphi_i(y)$ siano dotate di derivate prime continue; allora le equazioni (17) si possono trasformare nelle due seguenti equazioni di Volterra di seconda specie

$$
(19)\quad \begin{cases}
\pi \sum_1^2 {}_i\, \alpha_i(y) + \sum_1^2 {}_i \int_0^y \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_\eta^y \frac{U_i(0, z;\ 1, \eta)}{\sqrt{y-z}} dz \right) \beta_i(\eta) d\eta = \\
\qquad = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-z}} \frac{d\varphi_1(z)}{dz} dz \\
\pi \sum_1^2 {}_i\, \beta_i(y) + \sum_1^2 {}_i \int_0^y \left(\frac{\partial}{\partial y} \int_\eta^y \frac{U_i(1, z;\ 0, \eta)}{\sqrt{y-z}} dz \right) \alpha_i(\eta) d\eta = \\
\qquad = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-z}} \frac{d\varphi_2(z)}{dz} dz.
\end{cases}
$$

Il determinante dei termini integrati in (19)-(18) è eguale a $\pi^8(\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1})^2$; pertanto il sistema (19)-(18) si può scrivere

$$
(20)\qquad \boldsymbol{a}(y) + \int_0^y \boldsymbol{K}(y, \eta) \boldsymbol{a}(\eta) d\eta = \boldsymbol{b}(y)
$$

ove $\boldsymbol{a}(y)$ è il vettore di componenti $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, $\boldsymbol{b}(y)$ è un vettore le cui componenti sono combinazioni lineari a coefficienti costanti di

$$
\int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-z}} \frac{d\varphi_i(z)}{dz} dz, \qquad \psi_i(y), \qquad i = 1, 2,
$$

e $\boldsymbol{K}(y, \eta)$ è una matrice del quart'ordine i cui termini sono combinazioni lineari a coefficienti costanti di

$$
\frac{U_i(0, y;\ 1, \eta)}{y - \eta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} \int_\eta^y \frac{U_i(0, z;\ 1, \eta)}{\sqrt{y-z}} dz, \quad i = 1, 2.
$$

Si noti che la matrice $\boldsymbol{K}(y, \eta)$ è continua anche per $y = \eta$;

da

$$\frac{\partial^h}{\partial y^h}\int_\eta^y \frac{U_i(0,\, z;\; 1,\, \eta)}{\sqrt{y-z}}\, dz = \int_\eta^y \frac{1}{\sqrt{y-z}}\, \frac{\partial^h}{\partial z^h} U_i(0,\, z,\, 1,\, \eta) dz$$

segue, del che avremo occasione di servirci nel seguito, che anche le sue derivate prima e seconda rispetto a y (e così pure rispetto ad η) sono continue anche per $y = \eta$.

4. Preliminari al problema per l'equazione completa.

Sia $v(x, y)$ una soluzione dell'equazione

$$\mathfrak{M}_0[v] = \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + 2a \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

aggiunta della (13). Sia $Q \equiv (\xi, \eta)$ un punto tale che $0 < \xi < 1$, $0 \leq \eta < 1$; $P \equiv (x, y)$ un punto variabile in $\mathfrak{R}$; $\mathfrak{R}_\eta^*$ il rettangolo $\eta \leq y \leq h$, $0 \leq x \leq 1$. La formula di reciprocità

$$\iint_{\mathfrak{R}_\eta^*} (v\mathfrak{L}_0[u] - u\mathfrak{M}_0[v]) dP =$$

$$= \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{R}_\eta^*} \Big\{ \left[v \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - u \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \right.$$

$$\left. - 2a\left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] dy - \left[v\frac{\partial u}{\partial y} - u\frac{\partial v}{\partial y} - 2av\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] dx \Big\}$$

suggerisce di scegliere quale soluzione fondamentale della (13) una funzione $V(P, Q) \equiv V(x, y;\, \xi, \eta)$ soluzione di $\mathfrak{L}_0[u] = 0$ in P e di $\mathfrak{M}_0[v] = 0$ in Q, regolare per $P \neq Q$, e tale che

$$(21) \quad \begin{cases} \lim\limits_{y \to \eta+} \displaystyle\int_0^1 V(Q, P) f(x) dx = 0 \\[2ex] \lim\limits_{\substack{\xi \to \bar{x} \\ y \to \eta+}} \displaystyle\int_0 \frac{\partial V(Q, P)}{\partial y} f(x) dx = \begin{cases} \delta f(\bar{x}) & \text{per} \quad 0 < \bar{x} < 1 \\ 0 & \text{per} \quad \bar{x} < 0,\ \bar{x} > 1, \end{cases} \end{cases}$$

essendo δ una costante, per ogni funzione $f(x)$ continua su $0 \leq x \leq 1$.

Seguendo Block [3]) cerchiamo una soluzione di (13) del tipo

$$\int_0^{+\infty} \exp\,[-\mu^2(y-\eta) + i\sqrt{\lambda}\,\mu(x-\xi)]d\mu \qquad \begin{matrix} \text{per} \quad y > \eta \\ (i \text{ unità immaginaria}). \end{matrix}$$

Si è condotti a porre $\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2$. Ora si ha

$$\int_0^{+\infty} \exp\,[-\mu^2(y-\eta)] \cdot \cos\,[\sqrt{\lambda_i}\,\mu(x-\xi)]d\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,U_i(P,\,Q),$$

essendo $U_i(P,\,Q) \equiv U_i(x,\,y;\,\xi,\,\eta)$ la funzione (16). Scriviamo la $U_i(P,\,Q)$ al modo seguente

$$(y-\eta)^{-1/2}f(t) \qquad \text{con} \qquad t = \frac{x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}.$$

Posto

$$D_h = h - \frac{t}{2}\frac{d}{dt}.$$

una funzione del tipo

$$(y-\eta)^h\varphi(t) \tag{22}$$

è soluzione di (13) se

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4} - 2a\frac{d^2}{dt^2}D_h\varphi + D_{h-1}D_h\varphi = 0. \tag{23}$$

Se vogliamo che sia

$$\frac{\partial}{\partial y}[(y-\eta)^h\varphi(t)] = (y-\eta)^{-1/2}f(t)$$

---

3) H. BLOCK, *Sur les équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples*, Arkiv för Mat. Astr. och Fys., 7 (1912) [n. 13 e n. 21] e 8 (1912-13) [n. 23].

si dovrà scegliere $h = 1/2$ e $\varphi(t)$ in modo che sia

$$D_{1/2}\varphi = f\,;$$

perciò

$$\varphi(t) = Kt - 2t\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau^2}\,d\tau \tag{24}$$

ove K e t_0 sono due costanti arbitrarie e $t_0 \neq 0$; si dovrà prendere $t_0 > 0$ per $t > 0$ e $t_0 < 0$ per $t < 0$. Si verifica immediatamente che la (24) con $K = 0$ verifica la (23) ove si prenda $h = 1/2$. Ma una soluzione di (23) è una funzione intera di t. La funzione

$$t\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{\tau^2}\,d\tau \tag{25}$$

può servire solo per $t > 0$ oppure per $t < 0$; d'altra parte, supposto ad esempio $t < 0$, prendendo $t_0 = -\infty$, con una integrazione per parti la (25) si scrive

$$-\frac{1}{2}\left(2\exp\left[-\frac{\lambda t^2}{4}\right] + \lambda t\int_{-\infty}^{t}\exp\left[-\frac{\lambda\tau^2}{4}\right]d\tau\right)$$

la quale è regolare qualunque sia t. Si è così condotti alle due seguenti soluzioni di (13)

$$2\sqrt{y-\eta}\,\exp\left[-\lambda_i\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right] + \lambda_i(x-\xi)\int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}}\exp\left[-\frac{\lambda_i\tau^2}{4}\right]d\tau,$$
$$i = 1,\ 2,$$

le quali hanno per derivate rispetto a y funzioni che hanno lo stesso comportamento di quella che usualmente si assume come soluzione fondamentale dell'equazione del calore. Dopo di ciò è immediato riconoscere che le condizioni (21) sono soddisfatte dalla funzione

$$
(26)\qquad \begin{cases} V(x,\,y;\;\xi,\,\eta) = \sqrt{\lambda_2}\Big\{2\sqrt{y-\eta}\,\exp\left[-\dfrac{\lambda_1(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right]+ \\ \quad + \lambda_1(x-\xi)\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}}\exp\left[-\dfrac{\lambda_1 t^2}{4}\right]dt\Big\} - \sqrt{\lambda_1}\Big\{2\sqrt{y-\eta}\,\exp\Big[- \\ \quad -\dfrac{\lambda_2(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\Big] + \lambda_2(x-\xi)\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}}\exp\left[-\dfrac{\lambda_2 t^2}{4}\right]dt\Big\} \qquad \text{per } \; y > \eta \\ V(x,\,y;\;\xi,\,\eta) = 0 \qquad\qquad \text{per } \; y \leq \eta \end{cases}
$$

che assumeremo come *soluzione fondamentale* della (13). In particolare nella seconda delle (21) è

$$
\delta = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\,.
$$

Ciò posto, consideriamo la funzione

$$
(27)\qquad u(P) = \iint_{\mathcal{R}_y} V(P,\,Q)f(Q)dQ
$$

ove $\mathcal{R}_y$ indica il rettangolo $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq y$.

Nell'ipotesi che la funzione $f(P)$ sia continua in $\mathcal{R}$ e verifichi una condizione di Hölder in ogni punto P tale che $0 < x < 1$, $0 < y \leq h$, poichè

$$
(21_1')\qquad \lim_{y-\eta \to 0+} \int_0^1 V(P,\,Q)f(Q)d\xi = 0,
$$

si ha

$$
(28)\qquad \frac{\partial^{i+j}u}{\partial x^i \partial y^j} = \iint_{\mathcal{R}_y} \frac{\partial^{i+j}V}{\partial x^i \partial y^j} f(Q)dQ
$$

per $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 1$ e $i + j \leq 3$, escluso il caso di $i = 2$,

$j = 1$. Si ha poi

$$(29_1)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\,f(P) +$$

$$+ \iint\limits_{\mathfrak{R}_y} [f(Q) - f(P)]\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,dQ + f(P)\int_0^y d\eta\left(\int_0^1 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\,d\xi\right)$$

$$(29_2)\qquad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \iint\limits_{\mathfrak{R}_y} [f(Q) - f(P)]\,\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y}\,dQ + f(P)\int_0^y d\eta\left(\int_0^1 \frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y}\,d\xi\right)$$

$$(29_3)\qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \iint\limits_{\mathfrak{R}_y} [f(Q) - f(P)]\,\frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\,dQ + f(P)\int_0^y d\eta\left(\int_0^1 \frac{\partial^4 V}{\partial x^4}\,d\xi\right).$$

Le $(29_{1,\,2,\,3})$ seguono da cose note, tenendo presente che

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \sqrt{\lambda_2}\,U_1 - \sqrt{\lambda_1}\,U_2, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,(\sqrt{\lambda_1}\,U_1 - \sqrt{\lambda_2}\,U_2)$$

e che

$$(21_2')\qquad \lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ y,\,\eta \to \bar{y}}} \int_0^1 \frac{\partial V(P,\,Q)}{\partial y}\,f(Q)\,d\xi = \delta f(\bar{x},\,\bar{y}).$$

Ne segue che

$$(30)\qquad \mathfrak{L}_0[u] = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}\,f(P).$$

Indichiamo ora con $\lambda_1(Q)$ e $\lambda_2(Q)$ le radici dell'equazione

$$\lambda^2 - 2a(Q)\lambda + 1 = 0$$

e ricordiamo che si è supposto $a(P) > 1$ in tutto $\mathfrak{R}$. Indichiamo con $V(Q;\,P,\,Q)$ la funzione che si ottiene dalla (26) ponendo $\lambda_i(Q)$ al posto di λ_i.

Se supponiamo che $a(P)$ abbia le derivate prime continue in tutto $\mathfrak{R}$, allora anche le $\lambda_i(P)$ hanno le derivate prime continue; in tali ipotesi sussistono ancora le (21') con $V(Q\,;P,Q)$

al posto di $V(P, Q)$ e

$$\delta = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\lambda_2(P) - \lambda_1(P)}{\sqrt{\lambda_1(\bar{P})\lambda_2(\bar{P})}},$$

essendo $\bar{P}$ il punto $(\bar{x}, \bar{y})$.

Pertanto per la funzione

$$v(P) = \iint_{\mathfrak{R}_y} V(Q;\ P,\ Q) f(Q) dQ \tag{31}$$

sussistono, nell'ipotesi che $f(P)$ sia continua in $\mathfrak{R}$ e hölderiana per $0 < x < 1$, $0 < y \leq h$, formole perfettamente simili alle (28) e $(29_{1,2,3})$ con la sola variante che nella (29_1) al posto di λ_i si deve porre $\lambda_i(P)$. Si ha perciò

$$\mathfrak{L}_0[v(P)] = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\lambda_2(P) - \lambda_1(P)}{\sqrt{\lambda_1(P)\lambda_2(P)}} f(P). \tag{30'}$$

Dimostriamo ora che:

Esistono due costanti positive C e c di cui la seconda $< \min_{\mathfrak{R}} (\lambda_1(P), \lambda_2(P))$, tali che per $y > \eta$ è

$$\left|\frac{\partial^{i+j} V(Q;\ P,\ Q)}{\partial x^i \partial y^j}\right| < \frac{C}{(y-\eta)^{\frac{i+2j-1}{2}}} \exp\left[-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right] \tag{32}$$

per $i+j$ minore di un prefissato numero naturale.

Si riconosce subito che la funzione

$$\int_{-\infty}^{\frac{x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}} \left(\sqrt{\lambda_1(Q)}\exp\left[-\lambda_1(Q)\frac{t^2}{4}\right] - \sqrt{\lambda_2(Q)}\exp\left[-\lambda_2(Q)\frac{t^2}{4}\right]\right) dt$$

è maggiorata in modulo da un'espressione come quella che figura al secondo membro della (32) ove si ponga $i = 1$, $j = 0$, se è $x \leq \xi$; ciò è però vero anche per $x > \xi$ perchè il precedente integrale si può scrivere

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\frac{x-\xi}{\sqrt{y-\eta}}}^{+\infty}\right)\left(\sqrt{\lambda_1(Q)}\exp\left[-\lambda_1(Q)\frac{t^2}{4}\right] - \sqrt{\lambda_2(Q)}\exp\left[-\lambda_2(Q)\frac{t^2}{4}\right]\right)dt$$

e qui il primo integrale è nullo.

D'altra parte se p e k sono due costanti positive con $0 < k < 1$ e α è una variabile ≥ 0, esiste una costante positiva K tale che

$$\alpha^p \exp(-\alpha) < K \exp(-k\alpha).$$

Questa e la precedente osservazione bastano ad assicurare la validità delle (32).

Consideriamo ora la funzione

$$\bar{v}(P) = \iint_{\mathfrak{R}_y} \mathfrak{L}[V(Q;\ P, Q)]\varphi(Q)dQ. \tag{33}$$

Osserviamo che, essendo

$$\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} - 2a(Q)\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0,$$

riesce

$$\mathfrak{L}[V] = 2[a(Q) - a(P)]\frac{\partial^3 V}{\partial x^2 \partial y} + \sum_0^3{}_i\, b_i(P)\frac{\partial_i V}{\partial x^i} + \tag{34}$$

$$+ c(P)\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + d(P)\frac{\partial V}{\partial y}.$$

Dimostriamo che:

Se i coefficienti di (5) *sono dotati di derivate prime continue in* $\mathfrak{R}$ *e* $\varphi(P)$ *è continua in* $\mathfrak{R}$*, la funzione* (33) *verifica in ogni punto* P*, con* $0 < x < 1$ *e* $0 < y \leq h$*, una condizione di Hölder.*

Anzitutto l'integrale in (33) esiste perchè, per le (32) e tenendo presente la (34), si ha

$$|\mathfrak{L}[V]| < \frac{C_1}{y-\eta} \exp\left[-c\frac{(x-\xi)}{4(y-\eta)}\right],$$

ove C_1 è una opportuna costante positiva, ricordando l'ipotesi fatta su $a(P)$.

Per dimostrare la proposizione enunciata proviamo, più in generale, che *se $W(P, Q)$ è una funzione tale che, per due certe costanti positive C e c, riesce*

$$|W| < \frac{C}{y-\eta} \exp\left[-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right]$$

$$\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right| < \frac{C}{(y-\eta)^{3/2}} \exp\left[-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right],$$

$$\left|\frac{\partial W}{\partial y}\right| < \frac{C}{(y-\eta)^2} \exp\left[-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right],$$

e se $\varphi(P)$ è continua in $\mathfrak{R}$, allora la funzione

$$w(P) = \iint\limits_{\mathfrak{R}_y} W(P, Q)\varphi(Q)dQ$$

verifica una condizione di Hölder.

Si ha

$$\Delta_x w = \int\limits_{y-(\Delta x)^2}^{y}\int\limits_0^1 W(P+\Delta x, Q)\varphi(Q)dQ - \int\limits_{y-(\Delta x)^2}^{y}\int\limits_0^1 W(P, Q)\varphi(Q)dQ +$$

$$+ \Delta x \int\limits_0^{y-(\Delta x)^2}\int\limits_0^1 \frac{\partial W(P+\theta\Delta x, Q)}{\partial x}\varphi(Q)dQ = I_1 + I_2 + I_3,$$

indicando con θ un opportuno numero compreso tra 0 e 1.

Si ha subito, posto $\Phi = \max_{\mathfrak{R}}|\varphi|$ e indicando con K una opportuna costante positiva,

$$|I_2| < 2C\Phi \int_{y-(\Delta x)^2}^{y} \frac{d\eta}{\sqrt{y-\eta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ct^2]dt < K\,|\Delta x|\,;$$

analogamente

$$|I_1| < K\,|\Delta x|\,.$$

Poichè in I_3 è $y - \eta \geq (\Delta x)^2$, si ha poi

$$|I_3| < 2C\Phi\,|\Delta x|^{1-\varepsilon} \int_0^{y-(\Delta x)^2} \frac{d\eta}{(y-\eta)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-ct^2]dt < K_\varepsilon\,|\Delta x|^{1-\varepsilon}$$

avendo indicato con ε un numero positivo < 1, scelto d'altronde a piacere, e con K_ε una opportuna costante positiva.

È poi, supponendo ad esempio $\Delta y > 0$,

$$\Delta_y w = \int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} \int_0^1 W(P + \Delta y,\, Q)\varphi(Q)dQ - \int_{y-\Delta y}^{y} \int_0^1 W(P,\, Q)\varphi(Q)dQ +$$

$$+ \Delta y \int_0^{y-\Delta y} \int_0^1 \frac{\partial W(P + \theta\Delta y,\, Q)}{\partial y}\varphi(Q)dQ = J_1 + J_2 + J_3\,,$$

essendo θ un opportuno numero compreso tra 0 e 1.

Poichè esiste finito il

$$\lim_{y \to \eta+} \int_0^1 \frac{\exp\left[-c\,\dfrac{(x-\xi)^2}{4(y-\eta)}\right]}{\sqrt{y-\eta}}\, d\xi,$$

si ha subito

$$|J_1| + |J_2| < \bar{K}(\Delta y)^{1/2}$$

per una opportuna costante positiva $\bar{K}$.

In J_3 è $\Delta y < y + \theta\Delta y - \eta$ onde

$$|J_3| < (\Delta y)^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\int_0^{y-\Delta y}\int_0^1 \frac{C\Phi}{(y+\theta\Delta y-\eta)^{2-\frac{1}{2}-\varepsilon}}\exp\left[-c\frac{(x-\xi)^2}{4(y+\theta\Delta y-\eta)}\right]d\xi d\eta < \overline{K}_\varepsilon(\Delta y)^{\frac{1}{2}-\varepsilon},$$

essendo ε un numero positivo $< 1/2$, d'altronde scelto a piacere, e $\overline{K}_\varepsilon$ una opportuna costante positiva dipendente da ε ma non da θ.

Dunque:

Fissato un ε *tale che* $0 < \varepsilon < 1/2$, *esiste una costante positiva* K_ε *tale che*

$$|\Delta_x\overline{v}(P)| < K_\varepsilon |\Delta x|^{1-\varepsilon}, \qquad |\Delta_y\overline{v}(P)| < K_\varepsilon |\Delta y|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}.$$

5. Il problema per l'equazione completa.

Riferiamoci all'equazione (5) e al rettangolo $\mathfrak{R}$. Supponiamo che i coefficienti di (5) abbiano le derivate prime continue. Supponiamo che i valori assegnati a $u(x, y)$ per $x = 0$ e $x = 1$, $0 \leq y \leq h$, e per $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, quelli assegnati a $\partial u/\partial y$ per $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, e quelli assegnati a $\partial u/\partial x$ per $x = 0$ e $x = 1$, $0 \leq y \leq h$, siano i corrispondenti valori di una funzione $\varphi(x, y)$ continua in tutto $\mathfrak{R}$ insieme a tutte le derivate che figurano in $\mathcal{L}$ e tale che $\mathcal{L}[\varphi]$ sia hölderiana in ogni punto P, $0 < x < 1$, $0 < y \leq h$. Posto $u = v + \varphi$ il problema è ricondotto a cercare una funzione $v(x, y)$ continua in $\mathfrak{R}$ e tale che

$$(35)\quad \begin{cases} \mathcal{L}[v] = f - \mathcal{L}[\varphi] = F(x, y) \quad \text{per} \quad 0 < x < 1,\ 0 < y \leq h \\[2mm] v(x, 0) = \dfrac{\partial v(x, 0)}{\partial y} = 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq 1 \\[2mm] v(0, y) = v(1, y) = \dfrac{\partial v(0, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(1, y)}{\partial x} = 0 \ \text{per} \ 0 \leq y \leq h. \end{cases}$$

Indicato con S il punto (σ, τ) di $\mathfrak{R}$, supponiamo di disporre di una *funzione compensatrice* $G(P, S)$ continua in $\mathfrak{R}$; tale che tutte le derivate che figurano in $\mathcal{L}$ di essa siano continue per $0 < x < 1$, $0 < y \leq h$; esistano due costanti positive K e k tali che

$$\left|\frac{\partial^{i+j} G}{\partial x^i \partial y^j}\right| < \frac{K}{(y-\tau)^{\frac{i+2j-1}{2}}} \exp\left[-k\frac{(x-\sigma)^2}{4(y-\tau)}\right] \tag{36}$$

$$|\mathcal{L}[G]| < \frac{K}{y-\tau} \exp\left[-k\frac{(x-\sigma)^2}{4(y-\tau)}\right]; \tag{37}$$

la funzione $V(S; P, S) - G(P, S)$ tenda a zero se P dall'interno di $\mathfrak{R}$ tende a un punto $(0, y)$ o $(1, y)$, $0 \leq y \leq h$, o a un punto $(x, 0)$, $0 \leq x \leq 1$; $\frac{\partial}{\partial x}[V(S; P, S) - G(P, S)]$ tenda a zero se P tende a un punto $(0, y)$ o $(1, y)$, $0 \leq y \leq h$; $\frac{\partial}{\partial y}[V(S; P, S) - G(P, S)]$ tenda a zero se P tende a un punto $(x, 0)$, $0 \leq x \leq 1$.

Allora la funzione

$$v(P) = \iint_{\mathfrak{R}_y} [V(S; P, S) - G(P, S)]\psi(S)dS \tag{38}$$

risolve il problema (35) se $\psi(P)$ è soluzione dell'equazione

$$2\sqrt{\pi}\frac{\lambda_2(P) - \lambda_1(P)}{\sqrt{\lambda_1(P)\lambda_2(P)}}\psi(P) + \tag{39}$$

$$+ \iint_{\mathfrak{R}_y} \mathcal{L}[V(S; P, S) - G(P, S)]\psi(S)dS = F(P).$$

Per quanto si è detto nel n. **4** e per le ipotesi fatte su $F(P)$ e sui coefficienti di (5), una soluzione di (39) verifica una condizione di Hölder onde per (30′) si ha

$$\mathcal{L}[v(P)] = F(P).$$

Cominciamo col provare che l'equazione (39) ha una soluzione continua; successivamente costruiremo la funzione $G(P, S)$.

Più in generale consideriamo l'equazione

$$\omega(P) = \alpha(P) + \iint\limits_{\mathcal{R}_y} W(P, Q)\omega(Q)dQ$$

con $\alpha(P)$ continua e $W(P, Q)$ continua in P e Q per $P \neq Q$ e tale che per due certe costanti positive K e k sia

$$| W(P, Q) | < \frac{K}{y - \eta} \exp\left[- k \frac{(x - \xi)^2}{4(y - \eta)}\right].$$

Sia

$$| \alpha |_{\mathcal{R}} \leq A.$$

È

$$\int_0^1 \frac{\exp\left[- k \frac{(x - \xi)^2}{4(y - \eta)}\right]}{\sqrt{y - \eta}} d\xi < 2 \sqrt{\frac{\pi}{k}} = H.$$

Si ha

$$\omega(P) = \alpha(P) + \sum_1^\infty{}_n \iint\limits_{\mathcal{R}_y} W(P, Q_1)dQ_1 \ldots \iint\limits_{\mathcal{R}_{\eta_{n-1}}} W(Q_{n-1}, Q_n)\alpha(Q_n)dQ_n$$

e la serie a secondo membro converge totalmente perchè il modulo del termine n-simo è maggiorato da

$$K^n H^n A \int_0^y \frac{d\eta_1}{\sqrt{y - \eta_1}} \ldots \int_0^{\eta_{n-1}} \frac{d\eta_n}{\sqrt{\eta_{n-1} - \eta_n}} =$$

$$= (KH)^n A \cdot \begin{cases} \dfrac{(2\pi y)^{\frac{n}{2}}}{n!!} & \text{per} \quad n \text{ pari} \\[2ex] 2 \dfrac{(2\pi y)^{\frac{n-1}{2}} y^{\frac{1}{2}}}{n!!} & \text{per} \quad n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Passiamo ora alla costruzione della funzione $G(P, S)$. Fissato il punto S, $0 < \sigma < 1$, $0 < \tau \leq h$, sia $G(P, S)$ soluzione del problema

$$(40) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^4 G}{\partial x^4} - 2a(S)\dfrac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial y} + \dfrac{\partial^2 G}{\partial y^2} = 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < 1, \ \tau < y \leq h, \\ G = \dfrac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad \text{per} \quad y = \tau, \ 0 \leq x \leq 1 \\ G = V, \ \dfrac{\partial G}{\partial x} = \dfrac{\partial V}{\partial x} \quad \begin{matrix} \text{per} & x = 0, \ \tau \leq y \leq h \\ \text{e} & x = 1, \ \tau \leq y \leq h. \end{matrix} \end{cases}$$

Questo problema è risolto dalla funzione

$$(41) \quad G(P, S) = \sum_{1}^{2}{}_i \int_{\tau}^{y} [U_i(S; P; 0, \eta)\alpha_i(S; \eta) + U_i(S; P; 1, \eta)\beta_i(S; \eta)] d\eta$$

ove $U_i(S; P, Q)$ è la funzione che si ottiene dalla (16) ponendo $\lambda_i(S)$ al posto di λ_i; α_1, α_2, β_1, β_2 sono le componenti del vettore $\boldsymbol{a}(S; \eta)$ fornito da

$$(42) \qquad \boldsymbol{a}(S; \eta) = \int_{\tau}^{\eta} \boldsymbol{H}(S; \eta, y)\boldsymbol{b}(S; y)dy + \boldsymbol{b}(S; \eta)$$

essendo $\boldsymbol{H}$ la matrice nucleare risolvente di un nucleo $\boldsymbol{K}$ analogo a quello che figura nella (20), e $\boldsymbol{b}(S; \eta)$ è un vettore le cui componenti sono certe combinazioni lineari, a coefficienti funzioni continue e limitate di $\lambda_1(S)$ e $\lambda_2(S)$, di

$$(43) \quad \int_{\tau}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{\eta - y}} \frac{\partial}{\partial y} V(S; 0, y; S)dy, \quad \int_{\tau}^{\eta} \frac{1}{\sqrt{\eta - y}} \frac{\partial}{\partial y} V(S; 1, y; S)dy,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} V(S; 0, \eta; S), \quad \frac{\partial}{\partial x} V(S; 1, \eta; S).$$

Risultano intanto soddisfatte le condizioni (40) per ogni fissato S tale che $0 < \sigma < 1$, $0 < \tau \leq h$, intendendo che la

$G(P, S)$ sia prolungata con lo zero in $\mathcal{R}_\tau$; inoltre

$$(44) \qquad \mathcal{L}[G] = 2[a(S) - a(P)] \frac{\partial^3 G}{\partial x^2 \partial y} + \sum_0^3{}_i \, b_i(P) \frac{\partial^i G}{\partial x^i} + $$

$$+ c(P) \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} + d(P) \frac{\partial G}{\partial y}$$

è continua rispetto a P ed S per $0 < x, \sigma < 1, 0 < y, \tau \leq h$.

Mantenendo a c il significato del n. **4**, proviamo che esiste una costante positiva $\bar{C}$ tale che

$$(45) \qquad \left| \frac{\partial^i a(S; \eta)}{\partial \eta^i} \right| < \frac{\bar{C}}{(\eta - \tau)^i} \left(\exp\left[- c \frac{\sigma^2}{4(\eta - \tau)} \right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[- c \frac{(1-\sigma)^2}{4(\eta - \tau)} \right] \right), \qquad i = 0, 1, 2.$$

È

$$\int_\tau^\eta \frac{1}{\sqrt{\eta - y}} \frac{\partial}{\partial y} V(S; x, y; S) dy = \int_\tau^{\frac{\eta+\tau}{2}} \frac{d_y V}{\sqrt{\eta - y}} +$$

$$+ \int_{\frac{\eta+\tau}{2}}^\eta \frac{1}{\sqrt{\eta - y}} \frac{\partial V}{\partial y} dy = I_1 + I_2;$$

indichiamo con $C_1, C_2, \ldots,$ delle costanti positive, indipendenti da P e da S, che non interessa specificare, e che possono variare dall'una all'altra delle formole scritte; per le (32) si ha

$$|I_1| = \left| \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\eta - \tau}} V\left(S; x, \frac{\eta + \tau}{2}; S\right) - \frac{1}{2} \int_\tau^{\frac{\eta+\tau}{2}} \frac{V(S; x, y; S)}{(\eta - y)^{3/2}} dy \right| <$$

$$< C_1 \exp\left[- c \frac{(x - \sigma)^2}{2(\eta - \tau)} \right] + \frac{C_2}{(\eta - \tau)^{3/2}} \int_\tau^{\frac{\eta+\tau}{2}} \sqrt{y - \tau} \exp\left[- \right.$$

$$-c\frac{(x-\sigma)^2}{4(y-\tau)}\Bigg]dy < C_3 \exp\left[-c\frac{(x-\sigma)^2}{2(y-\tau)}\right]$$

sostituendo nell'integrando $(\eta+\tau)/2$ a y; è poi

$$|I_2| < \frac{C\sqrt{2}}{\sqrt{\eta-\tau}}\int\limits_{\frac{\eta+\tau}{2}}^{\eta}\frac{\exp\left[-c\dfrac{(x-\sigma)^2}{4(y-\tau)}\right]}{\sqrt{\eta-y}}dy < 2C\exp\left[-c\frac{(x-\sigma)^2}{4(\eta-\tau)}\right].$$

Pertanto si ha che il modulo del vettore $\boldsymbol{b}(S;\,\eta)$ è maggiorato da un'espressione come quella che figura al secondo membro della (45) ove si ponga $i=0$.

Poichè il nucleo $\boldsymbol{H}(S;\,\eta,\,y)$ è continuo, dalla (42) si deduce che vale la (45) per $i=0$.

Si ha poi

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{\tau}^{\eta}\frac{1}{\sqrt{\eta-y}}\frac{\partial}{\partial y}V(S;\,x,\,y;\,S)dy =$$

$$=\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{\tau}^{\frac{\eta+\tau}{2}}\frac{d_yV}{\sqrt{\eta-y}} - 2\frac{\partial}{\partial\eta}\int\limits_{\frac{\eta+\tau}{2}}^{\eta}\frac{\partial V}{\partial y}d_y\sqrt{\eta-y}\,;$$

integrando per parti come è suggerito e derivando poi rispetto ad η si ha

$$\frac{\sqrt{2}}{(\eta-\tau)^{1/2}}\frac{\partial}{\partial y}V\left(S;\,x,\,\frac{\eta+\tau}{2};\,S\right)-\frac{\sqrt{2}}{(\eta-\tau)^{3/2}}V\left(S;\,x,\frac{\eta+\tau}{2};\,S\right)+$$

$$+\frac{3}{4}\int\limits_{\tau}^{\frac{\eta+\tau}{2}}\frac{V}{(\eta-y)^{5/2}}dy+\int\limits_{\frac{\eta+\tau}{2}}^{\eta}\frac{1}{\sqrt{\eta-y}}\frac{\partial^2V}{\partial y^2}dy,$$

da cui, tenendo presenti le (32) si ha che la derivata rispetto ad η del vettore $\boldsymbol{b}$ è in modulo maggiorata da un'espressione come quella che figura nel secondo membro della (45) ove si ponga $i = 1$. Dalla

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}(S;\ \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial \boldsymbol{b}(S;\ \eta)}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{\tau}^{\eta} \boldsymbol{K}(S;\ \eta,\ y)\boldsymbol{a}(S;\ y)dy,$$

poichè la matrice $\boldsymbol{K}$, come si è osservato in fine del n. **3**, è dotata di derivate rispetto ad y ed η continue, segue che vale la (45) anche per $i = 1$.

Con ragionamenti analoghi a quelli ora fatti si verifica che la (45) vale anche per $i = 2$.

Proviamo ora che la funzione (41) soddisfa le (36) e (37). Una volta provate le (36), la (37) segue dalla (44) e dall'ipotesi che i coefficienti di (5) hanno le derivate prime continue.

Supponiamo dapprima che $|x - \sigma|$ non superi una certa quantità, per esempio $1/4$.

Indichiamo con $\bar{x}$ indifferentemente 0 oppure 1, con $\delta_n(S;\ \eta)$ indifferentemente $\alpha_n(S;\ \eta)$ oppure $\beta_n(S;\ \eta)$, e poniamo $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1$. Si ha per $n = 1,\ 2$

$$\left| \int_{\tau}^{y} U_n(S;\ x,\ y;\ \bar{x},\ \eta)\delta_n(S;\ \eta)d\eta \right| <$$

$$< \bar{C} \sum_{1}^{2}{}_m \int_{\tau}^{y} \frac{\exp\left[-c\dfrac{(x-\bar{x})^2}{4(y-\eta)}\right]}{\sqrt{y-\eta}} \exp\left[-c\frac{(\sigma-\sigma_m)^2}{4(\eta-\tau)}\right] d\eta <$$

$$< C_1(y-\tau)^{1/2} \exp\left[-c\frac{(x-\sigma)^2}{8(y-\tau)}\right],$$

tenendo presente che per $|x - \sigma| \leq 1/4$ è

$$\frac{(x-\bar{x})^2}{y-\eta} + \frac{(\sigma-\sigma_m)^2}{\eta-\tau} > \frac{(x-\sigma)^2}{2(y-\tau)}. \tag{46}$$

È così provata la (36) per $i = j = 0$.

Si ha poi

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{\tau}^{y} U_n(S;\ x,\ y;\ \bar{x},\ \eta)\delta_n(S;\ \eta)\,d\eta =$$

$$= \int_{\tau}^{\frac{y+\tau}{2}} \frac{\partial U_n}{\partial y}\delta_n d\eta + \int_{\frac{y+\tau}{2}}^{y} \frac{\partial U_n}{\partial y}\delta_n d\eta = J_1 + J_2 .$$

Per le (45) e (46) è

$$|J_1| < C_1 \sum_{1}^{2}{}_m \int_{\tau}^{\frac{y+\tau}{2}} \frac{\exp\left[-c\dfrac{(x-\bar{x})^2}{4(y-\eta)}\right]}{(y-\eta)^{3/2}} \exp\left[-c\frac{(\sigma-\sigma_m)^2}{4(\eta-\tau)}\right] d\eta <$$

$$< \frac{C_2}{\sqrt{y-\tau}} \exp\left[-c\frac{(x-\sigma)^2}{8(y-\tau)}\right].$$

Poichè $\partial U_n/\partial y = -\partial U_n/\partial \eta$ si ha poi

$$J_2 = \delta_n\left(S;\ \frac{y+\tau}{2}\right) U_n\left(S;\ x,\ y;\ \bar{x},\ \frac{y+\tau}{2}\right) +$$

$$+ \int_{\frac{y+\tau}{2}}^{y} \frac{\partial \delta_n(S;\ \eta)}{\partial \eta} U_n(S;\ x,\ y;\ \bar{x},\ \eta)\,d\eta\,;$$

qui l'integrale è in modulo maggiorato da

$$C_3 \sum_{1}^{2}{}_m \int_{\frac{y+\tau}{2}}^{y} \frac{1}{\eta-\tau} \exp\left[-c\frac{(\sigma-\sigma_m)^2}{4(\eta-\tau)}\right] \frac{\exp\left[-c\dfrac{(x-\bar{x})^2}{4(y-\eta)}\right]}{\sqrt{y-\eta}}\, d\eta <$$

$$< C_4 \frac{\exp\left[-c\dfrac{(x-\sigma)^2}{8(y-\tau)}\right]}{\sqrt{y-\tau}}.$$

Resta così provata la (36) per $i = 0$, $j = 1$.

Con analoghi ragionamenti si prova che vale la (36) anche per $i = 0$, $j = 2$.

Ne segue che la (36) è valida anche per $i = 2$, $j = 0$, per $i = 2$, $j = 1$, e per $i = 4$, $j = 0$.

Si ha poi, convenendo di prendere il segno $+$ se $x > \sigma$, il segno $-$ se $x \leq \sigma$,

$$\left|\frac{\partial G(P, S)}{\partial x}\right| = \left|\int_{\pm\infty}^{x} \frac{\partial^2 G(t, y;\, S)}{\partial t^2}\, dt\right| < C_5 \left|\int_{\pm\infty}^{x} \frac{\exp\left[-c\dfrac{(t-\sigma)^2}{8(y-\tau)}\right]}{\sqrt{y-\tau}}\, dt\right| <$$

$$< C_6 \exp\left[-c\frac{(x-\sigma)^2}{16(y-\tau)}\right] \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{ct^2}{16}\right) dt;$$

perciò la (36) è vera anche per $i = 1$, $j = 0$; analogamente si prova che è vera anche per $i = 3$, $j = 0$.

Togliamo ora la restrizione che sia $|x - \sigma| \leq 1/4$.

Se $1/8 \leq \sigma \leq 7/8$ le limitazioni (36) e (37) seguono dai ragionamenti precedenti osservando che nel secondo membro della (45), prendendo opportunamente la $\bar{C}$, si può sopprimere l'uno o l'altro, indifferentemente, dei due esponenziali e che la (46) è ovviamente vera se $\bar{x}$ e σ_m sono entrambi eguali a 0 oppure entrambi eguali a 1.

Supponiamo poi $0 \leq \sigma \leq 1/8$ oppure $7/8 \leq \sigma \leq 1$; ad esempio $7/8 \leq \sigma \leq 1$. Basta supporre $0 \leq x \leq 3/4$ perchè altrimenti si ha $|x - \sigma| \leq 1/4$, caso già esaminato. Le funzioni che si ottengono da (43) ponendo $G(0, \frac{y}{\eta};\, S)$ e $G(\frac{3}{4}, \frac{y}{\eta};\, S)$ al posto di $V(S;\, 0, \frac{y}{\eta};\, S)$, $V(S;\, 1, \frac{y}{\eta};\, S)$ sono continue con tutte le loro derivate rispetto ad η e le derivate i-sime sono in modulo maggiorabili con una funzione del tipo

$$\frac{H}{(\eta-\tau)^i} \exp\left[-\frac{h}{4(\eta-\tau)}\right]$$

ove H e h sono due certe costanti positive.

Posto

$$G(P, S) = \sum_1^2{}_i \int_\tau^y \left[U_i(S; P; 0, \eta)\alpha_i^*(S; \eta) + \right.$$

$$\left. + U_i\left(S; P; \frac{3}{4}, \eta\right)\beta_i^*(S; \eta) \right] d\eta,$$

le α_i^* e β_i^*, definite da un'equazione analoga alla (42), hanno lo stesso comportamento delle funzioni ora dette; ci troviamo così in condizioni analoghe a quelle del caso precedente di $1/8 \leq \sigma \leq 7/8$.

Possiamo perciò concludere che:

Se i coefficienti di (5) *e il termine noto sono funzioni dotate di derivate prime continue; se i dati assegnati su* $x = 0, 1$, $0 \leq y \leq h$ *e* $y = 0$, $0 \leq x \leq 1$, *sono la traccia di una funzione* φ *continua su* $\mathfrak{R}$ *insieme a tutte le derivate che figurano in* $\mathfrak{L}$ *ed è* $\mathfrak{L}[\varphi]$ *hölderiana, allora il problema in esame ha una soluzione.*

Nelle ulteriori ipotesi di regolarità dei coefficienti di $\mathfrak{L}$ *specificate nel teorema del* n. **2**, *questa è unica.*

Infatti la (38) ha la regolarità richiesta dal teorema di unicità.