Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Calogero Vinti

Una ripartizione del continuo ed una osservazione sulle funzioni continue rispetto ad una e non misurabili rispetto ad un' altra variabile

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 253-266

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__253_0>

UNA RIPARTIZIONE DEL CONTINUO ED UNA OSSERVAZIONE SULLE FUNZIONI CONTINUE RISPETTO AD UNA E NON MISURABILI RISPETTO AD UN'ALTRA VARIABILE

Nota (*) *di* CALOGERO VINTI (*a Palermo*) [1]

1. - INTRODUZIONE. Nel N. 2 di questa nota stabiliremo una opportuna ripartizione dei punti dell'intervallo (0,1) in una successione di insiemi a due a due senza punti a comune.

G. Tolstov [2]) in una sua memoria aveva fornito un esempio che mostrava che non è vera l'estensione diretta del teorema di Severini-Egorov alle funzioni misurabili dipendenti da un parametro continuo, e P. B. Frumkin [3]) esegue questa estensione facendo uso della convergenza in modo « essenziale ».

Tali questioni sono intimamente collegate con quanto noi ci occupiamo in questo lavoro, vorremmo però osservare che l'esempio di Tolstov è poco comprensibile per gli errori materiali che si riscontrano, per la stringatezza e le omissioni, e poi riporta la questione ad una memoria di N. Lusin [4]) che non è di facile consultazione.

(*) Pervenuta in Redazione il 10 luglio 1957.
Indirizzo dell'A.: Seminario di Analisi matematica, Università, Palermo.

1) Ringrazio il Prof. E. Baiada per i consigli che mi ha dato.

2) G. TOLSTOV: *Une remarque sur le théorème de D. F. Egorov.* Comptes Rendus Ac. Sciences U.R.S.S. N.S. 22 (305-307) 1939.

3) P. B. FRUMKIN: *Circa un teorema di D. F. Egorov sulle funzioni misurabili.* Doklady Akad Nauk S.S.S.R. (N.S.) 60, 973-975 in russo.

4) N. LUSIN: *Sur la structure des foncions mesurables.* Note III

La nostra ripartizione del continuo mette in chiaro e precisa, come faremo vedere nel N. 3, le considerazioni di Tolstov su di una questione di notevole interesse.

L. Tibaldo [5]) ha dimostrato per le funzioni di due variabili reali, continue rispetto ad una e misurabili rispetto all'altra, il seguente teorema di G. Scorza Dragoni: *Se* $f(x, y)$ *è una funzione definita in* R: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, *misurabile rispetto ad* x *e continua rispetto ad* y, *allora fissato un numero positivo* $\varepsilon > 0$, *si può determinare una porzione misurabile* i *di* (a, b) *tale che risulti* $m(i) > b - a - \varepsilon$ *e che* $f(x, y)$ *sia uniformemente continua rispetto ad* y *nella porzione* I *di* R *costituita da quei punti di* R *che hanno l'ascissa in* i.

Leggendo la nota di L. Tibaldo si constata immediatamente che basta imporre alla $f(x, y)$ la continuità rispetto ad y, e la misurabilità rispetto ad x non per ogni y di (c, d) ma soltanto per ogni y_n $(n = 1, 2, 3, ...)$, essendo y_n una successione ovunque densa in (c, d), per dedurre la proposizione sopra enunciata. Sembrerebbe allora che l'ipotesi della misurabilità della $f(x, y)$ rispetto ad x per ogni y di (c, d) fosse sovrabbondante, ma va osservato che una funzione $f(x, y)$ definita in R: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, continua rispetto ad y e misurabile rispetto ad x per ogni y_n $(n = 1, 2, 3, ...)$, y_n essendo una successione ovunque densa in (c, d), risulta misurabile rispetto ad x per ogni y di (c, d); infatti detto y_0 un qualsiasi punto di (c, d), e denotando con $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}, \ldots$ una successione staccata dalla successione y_n e convergente ad y_0, la successione: $f(x, y_{i_1}), f(x, y_{i_2}), \ldots, f(x, y_{i_n}), \ldots$, costituita da funzioni misurabili in (a, b), converge in (a, b) ad $f(x, y_0)$, in virtù della continuità rispetto ad y della $f(x, y)$, e quindi $f(x, y_0)$ risulta misurabile in (a, b).

à l'édition russe du livre de M. LEBESGUE: *Sur l'integration et les recherches des fonctions primitives*, Moscou 1934.

Non c'è riuscito consultare questa nota perchè questa edizione dell'opera del LEBESGUE c'è risultata irreperibile.

[5]) L. TIBALDO: *Un teorema sulle funzioni misurabili rispetto ad una e continue rispetto ad un'altra variabile.* Rendiconti Ac. Lincei. Vol. II, fasc. 2 (1947).

Mentre poi appare ovvio per la validità della proposizione di G.. Scorza Dragoni che l'ipotesi della continuità della $f(x, y)$ rispetto ad y (a meno di un insieme di verticali che si proiettano sull'asse delle x in un insieme di misura nulla) è indispensabile, non è affatto immediato affermare che altrettanto avviene per la misurabilità rispetto ad x, nel senso che se $f(x, y)$ è continua rispetto ad y ma non misurabile rispetto ad x nulla si può dire sulla validità della proposizione.

Riteniamo opportuno di prendere in considerazione le funzioni $f(x, y)$ di due variabili reali definite in R: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, continue rispetto ad y che soddisfano per definizione alla proposizione di G. Scorza Dragoni anche se non sono misurabili rispetto ad x.

Queste funzioni noi le chiameremo continue rispetto ad y in modo semiuniforme in R [6]).

Nel n. 4 di questo lavoro definiremo nel quadrato unitario Q del piano (x, y) una funzione limitata, continua rispetto ad y, ma non misurabile rispetto ad x, la quale non ha la proprietà della continuità rispetto ad y in modo semiuniforme in Q, e nel n. 5 una funzione $f(x, y)$ limitata, continua rispetto ad y, non misurabile rispetto ad x, la quale ha la proprietà della continuità rispetto ad y in modo semiuniforme in Q.

Osserviamo infine che l'esempio dato al n. 5, che può essere variato in infinite maniere, ci mostra che le funzioni non misurabili rispetto ad x e continue rispetto ad y in modo semiuniforme in R formano una vasta classe. Un immediato esempio di tali funzioni sarebbe naturalmente una funzione $f(x, y)$ non misurabile rispetto ad x e costante rispetto ad y.

---

6) Tale denominazione è stata ispirata da quelle introdotte da G. SCORZA-DRAGONI e da E. BAIADA.

G. SCORZA-DRAGONI: *Un teorema sulle funzioni continue rispetto ad una e misurabili rispetto ad un'altra variabile.* Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Vol. XVII (1948), pp. 102-106.

E. BAIADA: *Sulle funzioni continue separatamente rispetto alle variabili e gli integrali curvilinei.* Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova. Vol. XVII (1948), pp. 201-218.

2. - Ripartiamo tutti i punti dell'intervallo (0,1) in una successione di insiemi a due a due senza punti a comune, con $m_i(\sum_{n=1}^{m} E_n)=0$ (m essendo un intero positivo qualsivoglia). A tale scopo ricordiamo che G. Vitali ci dà un esempio d'insieme non misurabile procedendo nel seguente modo [7]: Ripartisce tutti i punti della retta r in una classe H d'insiemi X, in modo che appartengano ad uno stesso insieme X tutti i numeri che differiscono tra loro a due a due per quantità razionali; osserva poi che ogni insieme X è addensato in qualsivoglia intervallo della retta r, e considera per ogni insieme X un punto x che cade in (0,1).

L'insieme g_0 di tali punti x, al variare di X in H, dimostra che non è misurabile. (Il passaggio dalla totalità degli insiemi della classe H all'insieme g_0 implica ovviamente l'assioma della scelta di Zermelo).

Osserviamo che due punti qualunque x', x'' di g_0 differiscono tra loro per un numero irrazionale.

Detta r_n ($n=1, 2, 3, ...$) la totalità dei numeri razionali dell'intervallo aperto $[-1, 1]$, costruiamo la successione $\{g_{r_n}\}$ ($n=1, 2, 3 ...$) essendo g_{r_n} l'insieme ottenuto da g_0 aggiungendo ad ogni suo elemento il numero razionale r_n. Gli insiemi g_{r_n} corrispondenti ai diversi valori di r_n sono a due a due senza punti a comune, giacchè nel caso contrario, un eventuale punto comune a due insiemi g_{r_p}, g_{r_q} ($r_p \neq r_q$) risulterebbe ottenuto da due punti x' e x'' distinti di g_0, aggiungendo ad essi rispettivamente le due quantità razionali r_p ed r_q, ma in tal caso x' ed x'' differirebbero per il numero razionale $r_p - r_q$.

Sia $m_i(g_0)=a(a \geq 0)$, sarà allora ovviamente $m_i(g_{r_n})=a$ ($n=1, 2, 3 ...$), e deduciamo immediatamente che è $a=0$.

Difatti se fosse $a > 0$, detto G l'insieme somma degli insiemi g_{r_n} che sono a due a due senza punti a comune, si avrebbe:

[7]) Cfr. G. VITALI e G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale.* (Editore Zanichelli), pag. 58.

$m_i(G) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m_i(g_{r_n}) = \infty$, e ciò è assurdo essendo G un insieme contenuto in $(-1, 2)$.

Poniamo $R = g_{r_p} + g_{r_q}$ $(r_p \neq r_q)$ e consideriamo due numeri razionali r_s, r_t della successione r_n tali che:

$$r_s - r_p = r_t - r_q; \tag{1}$$

è manifesto che fissati r_p, r_q di numeri del tipo r_s, r_t soddisfacenti la (1) ne esistono una infinità numerabile.

Mostriamo che l'insieme $R' = g_{r_s} + g_{r_t}$ ha misura interna uguale alla misura interna di R.

Osserviamo infatti che è possibile porre in corrispondenza biunivoca i punti di g_{r_p} con i punti di g_{r_s}; basta far corrispondere al punto $x' + r_p$ (con x' in g_0) di g_{r_p}, il punto $x' + r_s$ di g_{r_s}. Analoga corrispondenza possiamo porre tra i punti di g_{r_q} ed i punti di g_{r_t}, e quindi i punti di R vengono posti in tal modo in corrispondenza biunivoca con i punti di R'.

Ed allora per mostrare che $m_i(R) = m_i(R')$, basta far vedere che ogni insieme chiuso C contenuto in R ha per corrispondente in R' un insieme chiuso C' (e viceversa), ed inoltre risulta $m(C) = m(C')$.

Sia α' un punto di accumulazione sinistro (destro) di C', e poniamo $\alpha = \alpha' + r_p - r_s$; per la (1) è $\alpha = \alpha' + r_q - r_t$. Detta δ l'ampiezza di un intorno destro (sinistro) di α', in tale intorno cadrà almeno un punto di C', punto che apparterrà a g_{r_s} od a g_{r_t}. Se tale punto appartiene a g_{r_s}, sarà del tipo $x' + r_s$, x' essendo un punto di g_0, ed è:

$$0 < x' + r_s - \alpha' < \delta \qquad (0 < \alpha' - x' - r_s < \delta). \tag{2}$$

Il corrispondente in C del punto $x' + r_s$ è $x' + r_p$, e poichè:

$$x' + r_p - \alpha = x' + r_p - (\alpha' + r_p - r_s) = x' + r_s - \alpha',$$

$$(\alpha - x' - r_p = \alpha' + r_p - r_s - x' - r_p = \alpha' - x' - r_s)$$

risulta per la (2):

$$0 < x' + r_p - \alpha < \delta, \qquad (0 < \alpha - x' - r_p < \delta) \tag{3}$$

Se poi un punto di C' che cade nell'intorno destro (sinistro) di ampiezza δ, appartiene a g_{r_t}, sarà del tipo $x'' + r_t$,

x'' essendo un punto di g_0, ed è:

$$(2') \qquad 0 < x'' + r_t - \alpha' < \delta \qquad (0 < \alpha' - x'' - r_t < \delta).$$

Ma il corrispondente in C del punto $x'' + r_t$ è $x'' + r_q$, e poichè:

$$x'' + r_q - \alpha = x'' + r_q - (\alpha' + r_q - r_t) = x'' + r_t - \alpha',$$
$$(\alpha - x'' - r_q = \alpha' + r_q - r_t - x'' - r_q = \alpha' - x'' - r_t)$$

risulta per la (2'):

$$(3') \qquad 0 < x'' + r_q - \alpha < \delta, \qquad (0 < \alpha - x'' - r_q < \delta).$$

La (3) e (3') ci dicono che nell'intorno destro (sinistro) di α di ampiezza δ cade almeno un punto di C, quindi α è un punto di accumulazione a sinistra (destra) di C; essendo C chiuso, α apparterrà a C, e sarà o un punto di g_{r_p} o un punto di g_{r_p}. Se α appartiene a g_{r_p}, poichè è $\alpha = \alpha' - r_s + r_p$, $\alpha' - r_s$ sarà un punto x' di g_0 (e ciò in virtù del fatto che traslando g_{r_p} di $-r_p$ si ottiene l'insieme g_0), e quindi il corrispondente di α in C' sarà il corrispondente di $x' + r_p$ $(x' = \alpha' - r_s)$ in g_{r_s}, e precisamente il punto $x' + r_s$, cioè α'. Se α appartiene invece a g_{r_q}, poichè è $\alpha = \alpha' - r_t + r_q$, $\alpha' - r_t$ sarà un punto x'' di g_0, e quindi il corrispondente di α in C' sarà il corrispondente di $x'' + r_q$ $(x'' = \alpha' - r_t)$ in g_{r_t}, cioè $x'' + r_t$, cioè α'.

Ne segue che α', punto di accumulazione di C', appartiene a C', e quindi C' risulta chiuso.

Ricordando poi che la corrispondenza tra gli insiemi R ed R' è biunivoca, con analogo ragionamento segue che ad ogni insieme chiuso C' contenuto in R' corrisponde un insieme chiuso C contenuto in R.

Per mostrare poi che $m(C) = m(C')$, basta far vedere che considerato un qualsivoglia insieme aperto A contenente C, si può trovare un insieme aperto A' contenente C', con $m(A) = m(A')$, e viceversa; e ciò in virtù del fatto che la misura di un insieme chiuso coincide con l'estremo inferiore della classe delle misure degli insiemi aperti contenenti l'insieme chiuso.

Sia $A = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ un insieme aperto contenente C, e consideriamo l'insieme aperto A' ottenuto traslando A di: $r_s - r_p = r_t - r_q$.

Se un punto di C' appartiene a g_{r_s}, sarà del tipo $x' + r_s$, ed il corrispondente in C di tale punto appartiene a g_{r_p}, ed è $x' + r_p$.

Poichè A contiene C, $x' + r_p$ sarà interno ad un intervallo di A, ad esempio all'intervallo (a_i, b_i):

$$a_i < x' + r_p < b_i .$$

Da questa relazione si deduce:

$$a_i + r_s - r_p < x' + r_s < b_i + r_s - r_p . \tag{4}$$

Ed osservando che il corrispondente in A' dell'intervallo (a_i, b_i) è $(a_i', b_i') \equiv (a_i + r_s - r_p, b_i + r_s - r_p)$ ne segue dalla (4) che $x' + r_s$ è interno all'intervallo (a_i', b_i') di A'.

Se poi un punto di C' appartiene a g_{r_t}, sarà del tipo $x'' + r_t$, ed il corrispondente in C è $x'' + r_q$; detto (a_j, b_j) l'intervallo di A che contiene $x'' + r_q$, sarà:

$$a_j < x'' + r_q < b_j :$$

e da questa si deduce:

$$a_j + r_t - r_q < x'' + r_t < b_j + r_t - r_q . \tag{4'}$$

Ma il corrispondente in A' dell'intervallo (a_j, b_j) è $(a_j', b_j') \equiv (a_j + r_t - r_q, b_j + r_t - r_q)$, e quindi la (4') ci dice che $x'' + r_t$ è interno all'intervallo (a_j', b_j') di A'.

C' quindi è contenuto in A', ed è manifestamente $m(A) = m(A')$.

Con analogo ragionamento si mostra che ad ogni insieme aperto A' contenente C' si può far corrispondere un insieme aperto A contenente C con $m(A) = m(A')$.

Resta così completamente dimostrato che $m_i(R) = m_i(R')$.

In virtù di questa preposizione è facile ora far vedere che la somma di due qualsivoglia insiemi della successione g_{r_n} ha misura interna nulla.

Supponiamo infatti che sia $m_i(R) = K$ $(K > 0)$, e denotiamo con R_n $(n = 1, 2, \ldots)$ la classe degli insiemi analoghi ad R' che sono una infinità numerabile, i quali hanno come sappiamo tutti misura interna uguale a K. Detto S l'insieme somma degli insiemi R_n, risulterà:

$$m_i(S) \geq \sum_{n=1}^{\infty} m_i(R_n) = \infty$$

e ciò è assurdo essendo S contenuto in $(-1, 2)$.

Con analogo ragionamento si deduce che l'insieme somma di un qualsivoglia numero finito di insiemi g_{r_n} ha misura interna nulla.

Osserviamo ora che non può avvenire che a partire da un certo posto in poi tutti gli insiemi g_{r_n} non abbiano punti in $(0, 1)$. Infatti posto $m_e(g_0) = b$ $(0 < b \leq 1$, essendo g_0 non misurabile) denotiamo con r_p il primo dei numeri razionali r_n, diverso da zero, tale che $|r_p| \leq \frac{b}{2}$.

L'insieme g_{r_p} ha certamente dei punti che cadano in $(0, 1)$.

Consideriamo un qualsivoglia intero q maggiore di p, e gli insiemi $g_{r_1}, g_{r_2}, \ldots, g_{r_q}$(con $r_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, q$); tra tali insiemi c'è certamente g_{r_p}, e detto r_s il più piccolo tra i numeri $|r_1|, |r_2|, \ldots |r_q|$, denotiamo con r_t un qualsivoglia numero razionale positivo minore di r_s.

L'insieme g_{r_t}, essendo $r_t < r_s \leq |r_p|$, ha dei punti che cadono in $(0, 1)$, ed inoltre nella successione: $g_{r_1}, g_{r_2}, \ldots, g_{r_n}, \ldots$ si trova dopo il q-esimo. Essendo q un intero arbitrario l'asserto è dimostrato.

Prendiamo in considerazione tra gli insiemi g_{r_n} solo quelli, che sono una infinità numerabile, che hanno punti in $(0, 1)$ e continuiamo a denotarli $g_{r_1}, g_{r_2}, \ldots, g_{r_n}, \ldots$.

Sia poi E_n l'insieme dei punti di g_{r_n} che cadono in $(0, 1)$, e facciamo vedere che ogni punto dell'intervallo $(0, 1)$ appartiene all'insieme $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$.

Infatti se σ è un punto irrazionale di $(0, 1)$, esiste un insieme X della classe H i cui punti sono del tipo $\sigma + \rho_n$ (ρ_n razionale), e quindi in g_0 c'è un numero del tipo $\sigma + \rho_\nu$

$(-1 < \rho_\nu < 1)$; ma essendo r_n la successione di tutti i numeri razionali dell'intervallo aperto $[-1, 1]$, tra gli r_n c'è $-\rho_\nu$, e quindi tra gli insiemi g_{r_n} c'è l'insieme $g_{-\rho_\nu}$, il quale insieme contiene il numero σ perchè si ottiene traslando g_0 di $-\rho_\nu$. È poi σ un punto dell'intervallo $(0, 1)$, e quindi σ cadrà in uno degli insiemi E_n, e precisamente in quello ottenuto da $g_{-\rho_\nu}$ dopo aver soppresso da questo quei punti che eventualmente cadono fuori di $(0,1)$.

Se poi σ fosse un punto razionale di $(0, 1)$, tra gli insiemi della classe H c'è l'insieme X tutto costituito da punti razionali, e quindi in g_0 c'è un numero del tipo $\sigma + \rho_\nu$, e con analoghe considerazioni si deduce che σ cade in E.

Gli insiemi E_n rappresentano quindi la ripartizione richiesta dei punti dell'intervallo $(0,1)$.

3. - Sia E_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ la ripartizione dei punti dell'intervallo $(0, 1)$ dell'asse delle x stabilita al numero precedente, ed

$$\varepsilon_1, \ \varepsilon_2, \ \varepsilon_3, \ \ldots, \ \varepsilon_n, \ \ldots$$

una successione di numeri positivi, decrescente e convergente a zero, con $\varepsilon_1 < 1$.

Nel quadrato unitario chiuso Q del piano (x, y) definiamo una funzione $f(x, y)$ con la seguente legge: In ogni punto del quadrato le cui coordinate hanno la forma $(x, \varepsilon_n \cdot x)$, con $x \subset E_n$, $x \neq 0$, poniamo $f(x, \varepsilon_n \cdot x) = 1$; in ogni altro punto del quadrato poniamo $f(x, y) = 0$.

Dalla definizione posta segue: $f(x, 0) = 0$ per $0 < x < 1$; $f(0, y) = 0$ per $0 \leq y \leq 1$.

Poichè gli insiemi E_n non hanno a due a due punti a comune, su ogni retta di equazione $x = \bar{x}$ $(0 < \bar{x} \leq 1)$ esiste un solo punto ove $f(x, y)$ assume il valore 1, e quindi risulta: $\lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = f(x, 0) = 0$ per $0 \leq x \leq 1$.

Osserviamo poi che ogni retta di equazione $y = \bar{y}$ $(0 < \bar{y} \leq 1)$ incontra al più un numero finito di rette di equazione $y = \varepsilon_n \cdot x$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, appunto perchè la successione ε_n tende a zero, e quindi su ogni retta $y = \bar{y}$ esistono al più un numero finito di punti ove $f(x, y)$ assume il valore 1; la funzione

$f(x, y)$ risulta dunque misurabile rispetto ad x per $0 \leq y \leq 1$.

Mostriamo ora che se i è un qualsivoglia insieme di misura non nulla contenuto nell'intervallo $(0, 1)$ dell'asse x, la convergenza in i della $f(x, y)$ non può essere uniforme, cioè non avviene mai che in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ arbitrario, esista un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per $0 < y < \delta(\varepsilon)$, e qualunque sia x in i, si abbia:

$$| f(x, y) - f(x, 0) | < \varepsilon.$$

Basta far vedere che comunque si consideri un numero arbitrario $\delta > 0$ esiste sempre almeno un punto (x', y') del quadrato, con $y' < \delta$ e con $x' \subset i$, tale che $f(x', y') = 1$, e ciò in virtù del fatto che $f(x, 0) = 0$ per $0 \leq x \leq 1$.

A tal scopo fissiamo un punto x di i, tale che l'insieme i_x dei punti di i che si trovano a sinistra di x sia di misura non nulla; è sicuramente $x > 0$, e denotiamo con ε_r il primo dei numeri ε_n non maggiore di $\frac{\delta}{x}$.

E' $i \subset \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, e poichè i_x non può essere contenuto nell'insieme $S = E_1 + E_2 + \dots + E_{r-1}$, perchè in tal caso avrebbe misura nulla, essendo nulla la misura interna di S, ci saranno certamente dei punti di i_x che cadono in uno degli insiemi $E_r, E_{r+1}, \dots, E_n, \dots$.

Detto x' $(x' \neq 0)$ un punto di i_x che cade in E_n $(n \geq r)$, il punto $(x', \varepsilon_n \cdot x')$ è un punto del quadrato con $\varepsilon_n \cdot x' < \frac{\delta}{x} \cdot x = \delta$, ed è $f(x', \varepsilon_n \cdot x') = 1$.

Da tali considerazioni deduciamo che non è possibile l'estensione diretta del teorema di Severini-Egorov alle funzioni misurabili dipendenti da un parametro continuo, cioè non è vera la seguente proposizione:

Sia $f(x, y)$ una funzione definita in R: $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, misurabile rispetto ad x, e tale che $\lim_{y \to y_0} f(x, y) = f(x, y_0)$ per $a \leq x \leq b$.

È sempre possibile determinare in corrispondenza ad un numero $\tau > 0$ arbitrario una porzione misurabile i di (a, b) tale che risulti $m(i) > b - a - \tau$, ed in modo che abbia luogo la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ arbitrario esiste un

$\delta(\varepsilon) > 0$ tale che per $|y - y_0| < \delta$, e qualunque sia x in i, risulti $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \varepsilon$.

4. - Definiamo nel quadrato unitario chiuso Q del piano (x, y) una funzione $f(x, y)$, continua rispetto ad y, non misurabile rispetto ad x, la quale non ha la proprietà della continuità rispetto ad y in modo semiuniforme in Q.

Sia E_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ la ripartizione dei punti dell'intervallo $(0, 1)$ dell'asse delle x, stabilita al numero 2, ed

$$a_1, \varepsilon_1, b_1, a_2, \varepsilon_2, b_2, \ldots, a_n, \varepsilon_n, b_n, \ldots$$

una successione di numeri positivi, decrescente e convergente a zero, con $a_1 \leq 1$.

Nel quadrato unitario del piano (x, y) definiamo una funzione $f(x, y)$ con la seguente legge: In ogni punto del quadrato le cui coordinate hanno la forma $(x, \varepsilon_n \cdot x)$, con $x \subset E_n$, $x \neq 0$, poniamo $f(x, \varepsilon_n \cdot x) = 1$; poniamo poi $f(x, a_n \cdot x) = 0$, $f(x, b_n \cdot x) = 0$ $(x \subset E_n, x \neq 0)$.

Nei tratti paralleli all'asse y: $(x, b_n \cdot x)$, $(x, \varepsilon_n \cdot x)$; $(x, \varepsilon_n \cdot x)$, $(x, a_n \cdot x)$ definiamo $f(x, y)$ lineare. In ogni altro punto del quadrato poniamo $f(x, y) = 0$.

Poichè gli insiemi E_n non hanno a due a due punti a comune, segue immediatamente dalla definizione posta che la funzione $f(x, y)$ è continua rispetto ad y.

Consideriamo le rette r_n, $\bar{r}_n$, passanti per l'origine del piano cartesiano (x, y) e rispettivamente di coefficente angolare a_n, ε_n, e denotiamo con P_n il punto d'incontro della retta $\bar{r}_n$ con la retta di equazione $x = 1$.

Sia $R_n^{(1)}$ il punto d'intersezione della retta r_n con la parallela all'asse x condotta per P_n; $P_n^{(1)}$ il punto d'intersezione della retta $\bar{r}_n$ con la parallela all'asse y condotta per $R_n^{(1)}$; e così proseguendo denotiamo con $R_n^{(m+1)}$ il punto d'incontro tra la retta r_n e la parallela all'asse x per $P_n^{(m)}$, e con $P_n^{(m+1)}$ il punto d'incontro tra la retta $\bar{r}_n$ e la parallela all'asse y per $R_n^{(m+1)}$ $(m = 1, 2, 3, ...)$.

In tal modo si viene a definire la spezzata P_n, $R_n^{(1)}$, $P_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$, $P_n^{(2)}$, $R_n^{(3)}$, .., $R_n^{(m)}$, $P_n^{(m)}$, ..., racchiusa tra le rette $\bar{r}_n$, r_n, con i punti $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$, ..., $R_n^{(m)}$, ..., appartenenti alla retta

$\overline{r}_n$, i punti $P_n^{(1)}$, $P_n^{(2)}, \ldots, P_n^{(m)}, \ldots$ appartenenti alla retta $\overline{r}_n$, i tratti $P_n R_n^{(1)}$; $P_n^{(1)} R_n^{(2)}$; $P_n^{(2)} R_n^{(3)}; \ldots; P_n^{(m)} R_n^{(m+1)}; \ldots$ paralleli all'asse x, e con i tratti $R_n^{(1)} P_n^{(1)}$; $R_n^{(2)} P_n^{(2)}; \ldots; R_n^{(m)} P_n^{(m)}; \ldots$; paralleli all'asse y.

I punti $T_n^{(1)}$, $T_n^{(2)}$, $T_n^{(3)}, \ldots, T_n^{(m)}, \ldots$ proiezioni sull'asse x dei punti $P_n^{(1)}$, $P_n^{(2)}$, $P_n^{(3)}, \ldots, P_n^{(m)}, \ldots$, suddividono l'intervallo $(0, 1)$ in una infinità numerabile di intervalli. Se $f(x, y)$ fosse misurabile rispetto ad x, sarebbe misurabile l'insieme $G_n^{(1)}\{0 < f(x, y_n) \leq 1\}$, con $T_n^{(1)} < x \leq 1$, y_n essendo l'ordinata di P_n. Ma la proiezione di $G_n^{(1)}$ sull'asse x è la porzione $E_n^{(1)}$ di E_n compresa nell'intervallo semichiuso a destra $[T_n^{(1)}, 1)$, quindi $E_n^{(1)}$ sarebbe misurabile.

Analogamente sarebbe pure misurabile la porzione $E_n^{(2)}$ di E_n compresa nell'intervallo semichiuso a destra $[T_n^{(2)}, T_n^{(1)})$, e così di seguito.

E poichè è $m_i(E_n) = 0$, risulterà $m(E_n^{(m)}) = 0$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$.

Supposto che il punto zero non appartenga ad E_n, è $E_n = \sum_{m=1}^{\infty} E_n^{(m)}$, e poichè gli insiemi $E_n^{(1)}$, $E_n^{(2)}$, $E_n^{(3)}, \ldots, E_n^{(m)}, \ldots$ non hanno a due a due punti a comune, E_n risulterà misurabile e sarà $m(E_n) = 0$. Se poi il punto zero appartiene ad E_n, basta sopprimere da E_n tale punto, e si conclude con $m(E_n) = 0$.

Quindi se $f(x, y)$ fosse misurabile rispetto ad x, gli insiemi E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ risulterebbro misurabili e di misura nulla. Ciò è manifestamente assurdo perchè gli insiemi E_n $(n = 1, 2, \ldots)$ non hanno a due a due punti a comune ed inoltre $\sum_{n=1}^{\infty} E_n \equiv (0, 1)$.

Mostriamo ora che la funzione $f(x, y)$ non è continua rispetto ad y in modo semiuniforme in Q.

Detto i un qualsivoglia insieme di misura non nulla contenuto in $(0, 1)$ ed I la porzione di Q costituita da quei punti di Q che hanno l'ascissa in i, facciamo vedere che comunque si consideri un $\delta > 0$ è sempre possibile determinare due punti distinti di I: (x', y'), (x', y''), con $|y' - y''| < \delta$, in modo che risulti: $|f(x', y') - f(x', y'')| = 1$.

A tale scopo fissiamo un punto x di i tale che l'insieme i_x dei punti di i che non si trovano a sinistra di x sia di misura non nulla; è sicuramente $x > 0$, e denotiamo con ε_r il primo dei numeri ε_n non maggiore di $\frac{\delta}{x}$.

È $i_x \subset \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, e poichè i_x non può essere contenuto nell'insieme $S = E_1 + E_2 + E_3 + ... + E_{r-1}$, perchè in tal caso avrebbe misura nulla, essendo nulla la misura interna di S, ci saranno certamente dei punti di i_x che cadono in uno degli insiemi E_r, E_{r+1}, E_{r+2}, ...

Detto x' $(x' \neq 0)$ un punto di i_x che cade in E_n $(n \geq r)$, il punto $(x', \varepsilon_n \cdot x')$ è un punto di I, con $\varepsilon_n \cdot x' < \frac{\delta}{x} \cdot x = \delta$, ed è $f(x', \varepsilon_n \cdot x') = 1$.

E poichè il punto $(x', 0)$ appartiene ad I, ed inoltre $f(x, 0) = 0$ per $0 \leq x \leq 1$, risulta $|f(x', \varepsilon_n \cdot x') - f(x', 0)| = 1$, con $\varepsilon_n \cdot x' < \delta$.

5. - Definiamo nel quadrato unitario chiuso Q del piano (x, y) una funzione $f(x, y)$, continua rispetto ad y, non misurabile rispetto ad x, la quale ha la proprietà della continuità rispetto ad y in modo semiuniforme in Q.

Sia E_n $(n = 1, 2, 3, ...)$ la ripartizione dei punti dell'intervallo $(0, 1)$ dell'asse delle x, stabilita al n. 2, e denotiamo con E^* il primo degli insiemi di tale successione che non sia misurabile. Detti poi a, b, c tre numeri positivi con $0 < a < b < c \leq 1$, definiamo nel quadrato unitario chiuso Q del piano (x, y) una funzione $f(x, y)$ con la seguente legge: In ogni punto del quadrato le cui coordinate hanno la forma $(x, b \cdot x)$, con $x \subset E^*$, $x \neq 0$, poniamo $f(x, b \cdot x) = 1$; poniamo poi $f(x, a \cdot x) = 0$, $f(x, c \cdot x) = 0$ $(x \subset E^*, x \neq 0)$. Nei tratti paralleli all'asse y: $(x, a \cdot x)$, $(x, b \cdot x)$; $(x, b \cdot x)$, $(x, c \cdot x)$, definiamo $f(x, y)$ lineare. In ogni altro punto del quadrato poniamo $f(x, y) = 0$.

Dalla definizione posta segue immediatamente che $f(x, y)$ è continua rispetto ad y.

Con analogo ragionamento fatto al n. 4 si mostra che $f(x, y)$ non è misurabile rispetto ad x, perchè se lo fosse E^* risulterebbe misurabile.

Mostriamo ora che $f(x, y)$ è continua rispetto ad y in modo semiuniforme in Q.

Sia $R' : a' \leq x \leq b'$, $0 \leq y \leq 1$ con $a' > 0$, $b' \leq 1$, un rettangolo contenuto in R. Per ogni x appartenente all'intervallo (a', b'), $f(x, y)$ come funzione della y in $(0, 1)$ ammette derivata rispetto ad y, tranne che nei punti $(x, a \cdot x)$, $(x, b \cdot x)$, $(x, c \cdot x)$, se x appartiene ad E^*. Al variare di x in (a', b'), tali derivate sono manifestatamente equilimitate, e quindi detto $M > 0$ un numero tale che $| f_y'(x, y) | < M$, risulta: $| f(x, y') - f(x, y'') | < 4M | y' - y'' |$ per $a' \leq x \leq b'$, e comunque fissiamo y' ed y'' in $(0, 1)$.

Ne segue che in corrispondenza ad $\varepsilon > 0$ arbitrario, è possibile determinare un numero positivo $\sigma(\varepsilon)$: $\sigma(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{4M}$, tale che detti (x, y') ed (x, y'') due punti di R' con $| y' - y'' | < \sigma$, risulti: $| f(x, y') - f(x, y'') | < \varepsilon$.