RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

Indipendenza delle condizioni di associatività negli ipergruppoidi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 228-244

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__228_0>

INDIPENDENZA DELLE CONDIZIONI DI ASSOCIATIVITÀ NEGLI IPERGRUPPOIDI

Nota (*) *di* DOMENICO BOCCIONI (*a Padova*)

Nel presente lavoro, per un ipergruppoide (proprio) H^0, (n.° 1), si intende un insieme H, il sostegno di H^0, nel quale è definita una moltiplicazione plurivoca in modo che il prodotto xy ($x, y \in H$) sia un sottoinsieme non vuoto di H (che non si riduca sempre ad un solo elemento). Il numero cardinale ν (≥ 2 e non necessariamente finito) di H vien detto l'ordine di H^0.

Definito il prodotto XY di due sottinsiemi non vuoti X ed Y del sostegno H di un ipergruppoide H^0 come la riunione di tutti i prodotti xy con $x \in X$ ed $y \in Y$ (n.° 2), hanno allora senso i due membri delle ν^3 eguaglianze:

$$(xy)z = x(yz) \qquad (x, y, z \in H),$$

che vengono dette condizioni di associatività; se una di esse è soddisfatta, la relativa terna (x, y, z) viene detta associativa (in H^0).

Il problema di riconoscere se tali condizioni di associatività costituiscano, per un ipergruppoide (proprio) di un dato ordine ν, un sistema di postulati indipendenti, viene risolto completamente nella presente nota col seguente semplice risultato (n.° 2, teorema): *le condizioni di associatività sono indipendenti se e soltanto se* $\nu \geq 3$.

(*) Pervenuta in Redazione il 22 giugno 1957.

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

L'indipendenza delle condizioni di associatività va intesa nel senso seguente: Dato un insieme H avente numero cardinale $\nu \geq 3$, e fissata comunque una terna di elementi di H, allora esiste un ipergruppoide (proprio) H^0 di sostegno H nel quale la terna fissata non è associativa, mentre tutte le rimanenti terne sono invece associative.

Detto associativo un ipergruppoide se in esso le condizioni di associatività sono soddisfatte, per riconoscere se un dato ipergruppoide (proprio) H^0 di ordine $\nu \geq 3$ sia associativo, bisogna dunque in generale esaminare *tutte* le ν^3 terne formate cogli elementi di H^0.

Nel caso $\nu = 2$, si è poi trovato (n.° 9, teor. 2) che il sistema costituito dalle otto ($= 2^3$) condizioni di associatività contiene un unico sistema ad esso equivalente e costituito da condizioni indipendenti: quello formato dalle sei eguaglianze ottenute escludendo dalle suddette otto le due con $x = y = z$. Per riconoscere dunque se un dato ipergruppoide (proprio) di ordine 2 sia associativo è sufficiente (e, in generale, necessario) l'esame di queste sei sole eguaglianze.

L'autore della presente nota è stato indotto allo studio in essa contenuto dalla lettura di un lavoro di G. Szász ([4]) [1]), nel quale lo stesso problema qui trattato (dell'indipendenza delle condizioni di associatività) viene risolto per i gruppoidi, (moltiplicazione univoca), col risultato seguente: in un gruppoide di ordine ν le condizioni di associatività sono indipendenti se e soltanto se $\nu \geq 4$.

Il problema dell'indipendenza delle condizioni di associatività nei gruppoidi era stato posto recentemente da L. Rédei (cfr. [4], § 1).

1. - Diremo *ipergruppoide* (totale) H^0 un insieme non vuoto H nel quale sia (ovunque) definita un'operazione binaria multiforme, che qui chiameremo *moltiplicazione*. Per *operazione binaria multiforme* (definita in H) si deve intendere una fun-

---

1) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine della nota.

zione univoca φ il cui « dominio » sia l'insieme H^2 delle coppie ordinate (x, y) di elementi di H e il cui « codominio » sia contenuto nell'insieme avente per elementi i sottinsiemi non vuoti di H. Questa funzione φ fa dunque corrispondere ad ogni coppia $(x, y) \in H^2$ un determinato sottinsieme non vuoto $\varphi(x, y)$ di H, sottinsieme che qui denoteremo con xy e chiameremo il *prodotto* di x ed y. (Cfr., ad es., [2], pp. 72, 67).

Come già fatto nel preced. capov., diremo spesso *n-pla* (in particolare *coppia, terna, ...*) invece di n-pla (coppia, terna, ...) ordinata, cioè sottintenderemo spesso quest'ultimo attributo.

Inoltre (sempre ove non vi siano ambiguità), denoteremo spesso con un medesimo simbolo sia un sottinsieme (di un insieme qualsiasi) costituito da un solo elemento, sia questo elemento stesso. Se però una distinzione fosse necessaria (od opportuna), indicheremo con $\{a\}$ l'insieme costituito dal solo elemento a. Più in generale, con $\{a, b, c, ...\}$ indicheremo l'insieme costituito dagli elementi *distinti* $a, b, c, ...$.

Si dirà *sostegno* di un ipergruppoide H^0 l'insieme H dei suoi elementi. Si potrebbe (come si fa comunemente, in questo e in casi consimili) denotare un ipergruppoide e il suo sostegno con un medesimo simbolo, ma ciò non verrà mai fatto nel presente lavoro.

In un ipergruppoide H^0 la moltiplicazione può essere, in particolare, *uniforme*, cioè tale che ogni prodotto xy sia un sottoinsieme (di H) costituito da un solo elemento. In tal caso, ad H^0 rimane evidentemente *associato* (cfr. la prima parte del 3° capov. di questo n.°) un ben determinato gruppoide ([2], p. 67); e viceversa. Un ipergruppoide la cui moltiplicazione non sia uniforme si dirà *proprio*.

Chiameremo *ordine* di un ipergruppoide H^0 il numero cardinale ν (non necessariamente finito) del suo sostegno H.

2. - Se X ed Y sono due sottinsiemi non vuoti del sostegno H di un ipergruppoide H^0, chiameremo *prodotto* di X ed Y, e lo denoteremo col simbolo XY, la riunione (nel senso della teoria degli insiemi) di tutti i prodotti xy con $x \in X$ ed $y \in Y$:

$$XY = \Sigma xy \qquad (x \in X,\ y \in Y); \tag{1}$$

(cfr., ad es., [2], p. 167). Questo prodotto XY è dunque ancora un sottinsieme non vuoto di H.

Siano x, y, z tre elementi di un ipergruppoide H^0. La terna (x, y, z) si dirà *associativa* (in H^0) se

$$(2) \qquad (xy)z = x(yz),$$

il 1° e il 2° membro di questa eguaglianza (che va intesa nel senso della teoria degli insiemi) avendo significato in base alla definiz. (1) (ed alla convenzione fatta nela prima parte del 3° capov. del n.° 1).

Se x, y, z sono elementi di un ipergruppoide H^0, la terna (x, y, z) si dirà *isolata* in H^0, se essa non è associativa (in H^0) mentre tutte le rimanenti terne (di elementi di H^0) sono invece associative.

Una terna (x, y, z) di elementi di un insieme (non vuoto) H si dirà *iperisolabile* in H, se essa è isolata in un ipergruppoide H^0 di sostegno H; se questo ipergruppoide è proprio, la terna (x, y, z) si dirà *propriamente iperisolabile* (in H).

Il problema di riconoscere se le terne (x, y, z) di elementi di un insieme (non vuoto) H, avente un certo numero cardinale ν, siano isolate in qualche *gruppoide* di sostegno H, fu posto recentemente da L. Rédei (cfr. [4], p. 20); esso equivale a riconoscere se le ν^3 eguaglianze dedotte dalla (2) al variare degli elementi x, y, z in un gruppoide di ordine ν eguaglianze che si possono chiamare, con G. Szász — [4], p. 20 —, « condizioni di associatività ») costituiscano un sistema di postulati indipendenti. Tale interessante problema fu risolto da G. Szász, il quale trovò il seguente semplice risultato ([4], § 4, Satz 1): la risposta è affermativa appena $\nu \geq 4$. Szász trovò inoltre che per $\nu = 2$ nessuna terna (di H^3) è isolata ([4], § 6, Satz 3), e che per $\nu = 3$ tutte le terne sono isolate tranne quelle (x, y, z) con $x = y = z$ ([4], § 3, Lemma 1, § 5, Lemma 2).

Lo scopo del presente lavoro è quello di studiare lo stesso problema per gli ipergruppoidi propri: il problema cioè di riconoscere se le ν^3 *condizioni di associatività* (2), imposte alle terne (x, y, z) di elementi di un ipergruppoide proprio avente un certo ordine ν (non necessariam. finito), costituiscano un sistema di postulati indipendenti. Questo studio condurrà al seguente risultato (ancora più semplice di quello menzionato più sopra): *la risposta è affermativa appena* $\nu \geq 3$. Dimostreremo, infatti, nei n.[i] 6-8) il seguente

TEOREMA: *Sia* ν *il numero cardinale di un insieme* H, *e siano* x, y, z *elementi di* H. *Allora, se* $\nu \geq 3$, *tutte le terne* (x, y, z) *sono propriamente iperisolabili in* H. *Se invece* $\nu = 2$, *le uniche terne* (x, y, z) *che non siano propriamente iperisolabili in* H *sono quelle con* $x = y = z$.

3. - Alla dimostrazione del teorema ora enunciato premetteremo (n.[i] 3-5) qualche considerazione e alcuni lemmi.

Due ipergruppoidi H_1^0 ed H_2^0 si diranno *isomorfi* (cfr., ad es., [3], p. 178) se è possibile stabilire fra i loro elementi una corrispondenza biunivoca f tale che da $x_2 = f(x_1)$, $y_2 = f(y_1)$ $(x_1, y_1 \in H_1, x_2, y_2 \in H_2)$ segua sempre $x_2y_2 = f(x_1y_1)$ ($f(x_1y_1)$ denotando, naturalmente, l'insieme dei corrispondenti degli elementi di $x_1y_1 \subseteq H_1$). Una tale corrispondenza si dirà un *isomorfismo*. Un isomorfismo di un ipergruppoide con sé stesso si dirà poi un *automorfismo*.

In un isomorfismo fra due ipergruppoidi H_1^0 e H_2^0, ad una terna associativa (risp. non associativa) corrisponde una terna associativa (risp. non associativa). E infatti, se $x_2 = f(x_1)$, $y_2 = f(y_1)$, $z_2 = f(z_1)$ $(x_1, y_1, z_1 \in H_1, x_2, y_2, z_2 \in H_2)$ e se $(x_1y_1)z_1 = x_1(y_1z_1)$, da $t_2 \in (x_2y_2)z_2$, cioè da $t_2 \in u_2z_2$ con $u_2 \in x_2y_2$, segue $u_1 \in x_1y_1$ e $t_1 \in u_1z_1$, dove $u_2 = f(u_1)$ e $t_2 = f(t_1)$, donde $t_1 \in (x_1y_1)z_1$ e quindi $t_1 \in x_1(y_1z_1)$; da qui segue $t_1 \in x_1v_1$ con $v_1 \in y_1z_1$, quindi $t_2 \in x_2v_2$ con $v_2 \in y_2z_2$ $(v_2 = f(v_1))$, donde $t_2 \in x_2(y_2z_2)$; dunque $(x_2y_2)z_2 \subseteq x_2(y_2z_2)$; analogamente si vede che $x_2(y_2z_2) \subseteq (x_2y_2)z_2$, e perciò $(x_2y_2)z_2 = x_2(y_2z_2)$; che poi, viceversa, $(x_2y_2)z_2 = x_2(y_2z_2)$ implichi $(x_1y_1)z_1 = x_1(y_1z_1)$ è chiaro (per la biunivocità della corrispondenza).

L'« immagine isomorfa » di un ipergruppoide è un ipergruppoide: Questa affermazione va intesa nel senso che, se H^0 è un ipergruppoide i cui elementi siano in corrispondenza biunivoca con quelli di un insieme H_1, allora si può definire in H_1 una moltiplicazione in modo che esso diventi il sostegno di un ipergruppoide H_1^0 isomorfo ad H^0. E infatti, detta f la corrispondenza fra H ed H_1, se $x_1, y_1 \in H_1$, ed $x_1 = f(x)$, $y_1 = f(y)$ $(x, y \in H)$, basta evidentemente porre $x_1 y_1 = f(xy)$.

Sia ora H un insieme, e ν il suo numero cardinale che supporremo ≥ 2. Due terne (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) di elementi di H si diranno *simili* (cfr. [4], p. 21), e si scriverà

$$(3) \qquad (x, y, z) \backsim (x_1, y_1, z_1),$$

se esiste una corrispondenza biunivoca f fra H ed $H_1 = H$ (cioè di H su sé stesso) tale che $f(x) = x_1$, $f(y) = y_1$, $f(z) = z_1$. La relazione binaria (3), definita nell'insieme H^3 (delle terne di elementi di H), è evidentemente una relazione di equivalenza (cioè è riflessiva, simmetrica e transitiva). Ebbene, se $\nu \geq 3$, detti a, b, c tre elementi distinti di H, le classi di equivalenza, in cui vengono ripartiti dalla (3) gli elementi di H^3, sono precisamente quelle rappresentate dalle cinque terne seguenti:

$$(4) \qquad (a, a, a),\ (a, a, b),\ (b, a, a),\ (a, b, a),\ (a, b, c);$$

se invece $\nu = 2$ ed $H = \{a, b\}$, tali classi sono quelle rappresentate dalle prime quattro di queste terne.

Infatti, intanto è chiaro che due qualsiasi delle terne (4) non sono simili, (in f, ad elementi distinti corrispondono elementi distinti). Inoltre, *ogni altra terna* $(x, y, z) \in H^3$ *è simile ad una delle terne* (4). E invero, se $x = y = z$, allora $(x, y, z) \backsim (a, a, a)$ mediante la f che subordina in $H \dot{-} \{x, a\}$ l'identità e in cui $f(x) = a$, $f(a) = x$; se invece $x = y \neq z$, allora $(x, y, z) \backsim (a, a, b)$ mediante una delle f che subordina l'identità nel sottinsieme di H costituito dagli elementi diversi da x, z, a, b e che permuta gli elementi distinti fra questi quattro in modo che $f(x) = a$, $f(z) = b$; (analogamente si ragiona se $x \neq y = z$ o se $x = z \neq y$); se infine x, y, z sono distinti (quindi $\nu \geq 3$), allora $(x, y, z) \backsim (a, b, c)$ mediante una delle f che subordina l'identità nel sottinsieme di H costituito dagli elementi diversi da x, y, z, a, b, c e che permuta gli elementi distinti fra questi sei in modo che $f(x) = a$, $f(y) = b$, $f(z) = c$.

Dopo quanto si è detto in questo n.°, è ormai facile riconoscere che (H essendo un insieme avente numero cardinale $\nu \geq 2$, ed x, y, z elementi di H):

La terna (x, y, z) *è propriamente iperisolabile in* H, *se e solo se è tale ogni altra terna ad essa simile.*

Infatti, se (x, y, z) è isolata in un ipergruppoide proprio H^0 di sostegno H e se $(x, y, z) \backsim (x_1, y_1, z_1)$, allora (x_1, y_1, z_1) è isolata nell'ipergruppoide proprio H_1^0, di sostegno $H_1 = H$, immagine isomorfa di H^0 mediante la corrispondenza biunivoca f fra H ed H_1 in cui $x_1 = f(x)$, $y_1 = f(y)$, $z_1 = f(z)$; e viceversa.

Dunque, ai fini della dimostrazione del teor. del n.° 2, sarà sufficiente l'esame diretto delle sole terne (4).

4. - Se K^0 è un ipergruppoide di sostegno K, e se H è un sottinsieme non vuoto di K tale che da $x, y \in H$ segua sempre $xy \subseteq H$, allora H, rispetto alla moltiplicazione di K^0, è un ipergruppoide H^0, che si dirà un *sotto-ipergruppoide* di K^0; e K^0 si dirà un *sopra-ipergruppoide*, o un'*estensione*, di H^0.

LEMMA 1: *Se* K^0 *è un'estensione di un ipergruppoide* H^0 *nella quale, qualunque sia* $u \in K \dot{-} H$ (*supposto non vuoto*) *e qualunque sia* $x \in K$, *si abbia*

$$ux = xu = Z, \tag{5}$$

Z *essendo un sottinsieme non vuoto di* $K \dot{-} H$, *allora tutte le terne di elementi di* K *contenenti almeno un elemento di* $K \dot{-} H$ *sono associative.*

Infatti, se X è un sottinsieme non vuoto di K, si ha

$$uX = Xu = Z, \quad ZX = XZ = Z \qquad (u \in K \dot{-} H), \tag{6}$$

come risulta immediatamente dalle (5). E dalle (5), (6) si trae appunto $(x, y \in K,\ u \in K \dot{-} H) : (ux)y = Zy = Z,\ u(xy) = Z$; $(xu)y = Zy = Z,\ x(uy) = xZ = Z$; $(xy)u = Z,\ x(yu) = xZ = Z$.

Dal lemma 1 e dai risultati di Szász (n.° 2, terzult. capov.) segue facilmente il seguente risultato preliminare:

TEOREMA 1: Sia ν il numero cardinale di un insieme H, e siano x, y, z elementi di H. Allora, se $\nu \geq 6$, tutte le terne (x, y, z) sono propriamente iperisolabili in H. Se $\nu = 5$, sono propriamente iperisolabili in H tutte le terne (x, y, z) diverse da quelle con $x = y = z$.

E infatti, se $\nu \geq 6$, consideriamo un qualunque sottinsieme G di H, costituito da quattro elementi distinti: $G = \{a, b, c, d\}$. Allora (Szász), G è certo il sostegno di cinque gruppoidi in cui sono rispettivam. isolate le cinque terne (4). Detto G^0 l'ipergruppoide (non proprio) associato (n.° 1, penult. capov.) ad uno qualsiasi di questi gruppoidi, si definisca in H una moltiplicazione imponendole di subordinare in G quella di G^0 e facendo le posizioni (5), con $u \in H \dot{-} G$, $x \in H$, $Z = H \dot{-} G$. H diventa allora il sostegno di un ipergruppoide proprio (Z consta di almeno due elementi) H^0, nel quale (per il lemma 1) la relativa terna (4) è dunque isolata. Ma allora (n.° 3, 5°-ult. e 3°-ult. capov.) tutte le terne (x, y, z) sono appunto propriamente iperisolabili in H. Se poi $\nu = 5$, basta fare un ragionamento perfettamente analogo, assumendo adesso $G = \{a, b, c\}$ e considerando le sole ultime quattro delle terne (4).

I risultati ottenuti col precedente teor. 1 sono ancora notevolmente lontani da quelli che ci proponiamo di dimostrare (teor. del n.° 2). È dunque necessario procedere ad uno studio diretto del problema.

5. - Diremo (cfr. ad es. [3], p. 164) che un elemento s di un ipergruppoide H^0 (di sostegno H) è uno *scalare sinistro* (risp. *destro*) se il prodotto sx (risp. xs) contiene un solo elemento, qualunque sia $x \in H$. Diremo che s è uno *scalare* se esso è contemporaneamente uno scalare sinistro e destro.

Diremo che un elemento u di un ipergruppoide H^0 è un'*unità scalare sinista* (risp. *destra*) se $ux = x$ (risp. $xu = x$), qualunque sia $x \in H$. Diremo che u è un'*unità scalare* se è contemporaneamente un'unità scalare sinistra e destra. Evidentemente, se esistono sia un'unità scalare sinistra u che una unità scalare destra u', esse coincidono ($u = uu' = u'$).

Diremo che un elemento v di un ipergruppoide H^0 è uno *zero scalare sinistro* (risp. *destro*) se $vx = v$ (risp. $xv = v$), qualunque sia $x \in H$. Diremo che v è uno *zero scalare* se è contemporaneamente uno zero scalare sinistro e destro. Se esistono sia uno zero scalare sinistro v che uno zero scalare destro v', essi coincidono ($v = vv' = v'$).

Diremo che un elemento x di un ipergruppoide H^0 è un *idempotente scalare* se $xx = x$, (cfr. ad es., [2], p. 74).

LEMMA 2: *In un ipergruppoide, se x è un'unità scalare sinistra, oppure se z è un'unità scalare destra, la terna (x, y, z) è associativa.*

Infatti, nella prima ipotesi, $(xy)z = yz$, $x(yz) = yz$; nella seconda ipotesi, $(xy)z = xy$, $x(yz) = xy$.

LEMMA 2′: *In un ipergruppoide, se y è unità scalare, la terna (x, y, z) è associativa.*

Infatti $(xy)z = xz$, $x(yz) = xz$.

LEMMA 3: *In un ipergruppoide, se x è uno zero scalare sinistro, oppure se z è uno zero scalare destro, la terna (x, y, z) è associativa.*

Infatti, nella prima ipotesi, $(xy)z = xz = x$, $x(yz) = x$; nella seconda ipotesi, $(xy)z = z$, $x(yz) = xz = z$.

LEMMA 3′: *In un ipergruppoide, se y è uno zero scalare, la terna (x, y, z) è associativa.*

Infatti $(xy)z = yz = y$, $x(yz) = xy = y$.

LEMMA 4: *In un ipergruppoide, se x è un idempotente scalare, la terna (x, x, x) è associativa.*

Infatti $(xx)x = x(xx) = x$.

Sia H^0 un ipergruppoide di sostegno H. Diremo *opposto* di H^0 (cfr., ad es., [1], pp. 65, 3) l'ipergruppoide H_1^0 avente lo stesso sostegno di H^0 $(H_1 = H)$ ma questa nuova definizione di moltiplicazione $(\cdot)$:

$$x \cdot y = yx \qquad (x, y \in H_1 = H), \tag{7}$$

(dove, naturalmente, yx denota il prodotto di y ed x in H^0). Evidentemente H^0 è, a sua volta, opposto di H_1^0. Diremo perciò *opposti* due ipergruppoidi che siano l'uno opposto dell'altro.

LEMMA 5: *Se H^0 e H_1^0 sono due ipergruppoidi opposti e se la terna (x, y, z) è associativa in H^0 (risp. in H_1^0), allora la terna «opposta» (z, y, x) è associativa in H_1^0 (risp. in H^0).*

Infatti, si osservi anzitutto che: se X, Y sono sottinsiemi non vuoti di $H = H_1$, si ha

$$X \cdot Y = YX. \tag{8}$$

E invero (ricordata la prima definizione del n.º 2), se $t \in X \cdot Y$, allora $t \in x \cdot y$, con $x \in X$, $y \in Y$, e quindi (per la (7)) $t \in yx \subseteq YX$, dunque $X \cdot Y \subseteq YX$; analogamente si vede che $YX \subseteq X \cdot Y$. Ciò premesso dimostriamo il lemma 5 (basterà, evidentemente, limitarsi alla prima parte): se (in H^0) $(xy)z = x(yz)$, allora, per le (7), (8), $(z \cdot y) \cdot x = (yx) \cdot x = x(yz) = (xy)z = z \cdot (xy) = z \cdot (y \cdot x)$, cioè (z, y, x) è appunto associativa in H_1^0.

6. - Dimostriamo adesso le cinque proposizioni seguenti.

I) *In $H = \{a, b\}$ la terna (a, a, b) è propriamente iperisolabile.* Essa è infatti isolata nell'ipergruppoide proprio di sostegno H definito dalla seguente *tabella* (*di moltiplicazione*) (cfr. [2], p. 68, [3], p. 158):

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & H & b \\ b & H & H \end{array} \qquad (H = \{a, b\}). \tag{9}$$

E invero, $(xy)z = H$ qualunque siano $x, y, z \in H$, poichè $b \in xy$ e quindi $(xy)z \supseteq bz = H$. D'altra parte $x(yz) \neq H$ se e solo se $x = a$ e $yz = b$, cioè se e solo se $x = a$, $y = a$, $z = b$. Quindi appunto $(xy)z \neq x(yz)$ se e solo se $(x, y, z) = (a, a, b)$, (due *n-ple* sono *eguali* se e solo se sono eguali gli elementi di egual posto).

II) *In $H = \{a, b\}$ la terna (b, a, a) è propriamente iperisolabile.* Essa è infatti isolata nell'ipergruppoide proprio di sostegno H definito dalla seguente tabella:

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & H & H \\ b & b & H \end{array} \qquad (H = \{a, b\}). \tag{10}$$

Ciò si riconosce immediatamente, in base al lemma 5 (n.º 5) ed al precedente risultato I), ove si osservi che l'ipergruppoide definito dalla (10) (dedotta dalla (9) « mediante rotazione attorno alla diagonale principale ») è opposto di quello definito dalla (9), e che sono pure opposte le due terne (b, a, a), (a, a, b).

III) ***In $H = \{a, b\}$ la terna (a, b, a) è propriamente iperisolabile.*** **Essa è infatti isolata nell'ipergruppoide proprio di**

sostegno H definito dalla seguente tabella:

$$(11)\qquad \begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & H & a \\ b & b & b \end{array} \qquad (H = \{a, b\}).$$

Ciò perchè $(ab)a = aa = H \neq a(ba) = ab = a$. D'altra parte tutte le terne (x, y, z) con $x = b$ oppure con $z = b$ sono associative, poichè b è sia zero scalare sinistro (lemma 3), sia unità scalare destra (lemma 2); e la rimanente terna (a, a, a) è pure associativa, poichè $(aa)a = Ha = H$, $a(aa) = aH = H$.

IV) *In* $H = \{a, b, c\}$ *la terna* (a, b, c) *è propriamente iperisolabile.* Essa è infatti isolata nell'ipergruppoide proprio di sostegno H definito dalla seguente tabella:

$$(12)\qquad \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & a & b & a \\ b & a & b & E \\ c & a & b & c \end{array} \qquad \text{dove } E = \{a, c\}.$$

Ciò si riconosce osservando che a e b sono zeri scalari destri e che c è un'unità scalare sinistra: perciò sono associative tutte le terne (x, y, z) con $z = a$ oppure con $z = b$ (lemma 3) e tutte quelle con $x = c$ (lemma 2). Delle $3^3 = 27$ terne (x, y, z), $3^2 = 9$ hanno $z = a$, e altrettante hanno $z = b$; delle 9 rimanenti, con $z = c$, vanno ancora scartate quelle con $x = c$, e restano quindi da esaminare le 2^2 terne (x, y, c) con $x \neq c$, $y \neq c$, più le 2 terne (x, c, c) con $x \neq c$, cioè le 6 terne seguenti:

$$(a, a, c),\ (a, b, c),\ (b, a, c),\ (b, b, c),\ (a, c, c),\ (b, c, c).$$

Di queste, la terna (a, b, c) non è appunto associativa, poichè $(ab)c = bc = E$, mentre $a(bc) = aE = a$; le altre cinque sono invece associative: $(aa)c = ac = a$, $a(ac) = aa = a$; $(ba)c = = ac = a$, $b(ac) = ba = a$; $(bb)c = bc = E$, $b(bc) = bE = E$; $(ac)c = ac = a$, $a(cc) = ac = a$; $(bc)c = Ec = E$, $b(cc) = bc = E$.

V) *In* $H = \{a, b, c\}$ *la terna* (a, a, a) *è propriamente iperisolabile.* Essa è infatti isolata nell'ipergruppoide proprio di sostegno H definito dalla seguente tabella:

(13)
$$\begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & b & F & F \\ b & c & F & F \\ c & F & F & F \end{array} \qquad \text{dove } F=\{b,\ c\}.$$

E invero la terna $(a,\ a,\ a)$ non è associativa, poichè $(aa)a=ba=c$, mentre $a(aa)=ab=F$. Tutte le rimanenti terne $(x,\ y,\ z)$. sono invece associative, come si riconosce distinguendo i tre casi possibili $x=a$, $x=b$, $x=c$, dopo aver osservato che $(t\in H)$:

$$ct=F,\ Ft=F, \text{ qualunque sia } t,$$
$$at=bt=F, \text{ per ogni } t\neq a.$$

Consideriamo allora $(a,\ y,\ z)$: qualunque siano y e z, poichè il prodotto yz non contiene mai a, si ha $a(yz)=F$; d'altra parte, $y=a$ implica $z\neq a$ e quindi $(aa)z=bz=F$, mentre $y\neq a$ implica $(ay)z=Fz=F$; dunque in ogni caso $(ay)z=a(yz)$. Consideriamo ora $(b,\ y,\ z)$: qualunque siano y e z, si ha $b(yz)=F$ (poichè yz non contiene a); d'altra parte $(ba)z=$ $=cz=F$, mentre $y\neq a$ implica $(by)z=Fz=F$; quindi in ogni caso $(by)z=b(yz)$. Infine consideriamo $(c,\ y,\ z):(cy)z=$ $=Fz=F$, $c(yz)=F$, dunque $(cy)z=c(yz)$. E la dimostrazione della proposizione V) è completata.

7. - Si osservi che, dare la tabella (di moltiplicazione)

(14)
$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & A_1 & A_2 \\ b & A_3 & A_4 \end{array} \quad (A_i=a, \text{ oppure } b, \text{ oppure } H;\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

di un ipergruppoide H° di sostegno $H=\{a,\ b\}$, equivale a dare la quaderna ordinata

(15)
$$(A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4).$$

Perciò si può parlare di *tab.* $(A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4)$.

Vi sono quindi tanti ipergruppoidi (distinti) di sostegno $H=\{a,\ b\}$ quante sono le disposizioni con ripetizione di classe 4 dei tre oggetti a, b, H, cioè $3^4=81$. Siccome, fra questi, vi sono $2^4=16$ ipergruppoidi non propri, *gli ipergruppoidi propri di sostegno* $H=\{a, b\}$ *sono* $65=(81-16)$.

L'ipergruppoide *proprio* H^0 di sostegno $H=\{a, b\}$, definito dalla tab. (A_1, A_2, A_3, A_4), verrà denotato con

$$H^0(A_1, A_2, A_3, A_4). \tag{16}$$

Ciò premesso, dimostriamo le altre due proposizioni seguenti.

VI) *Se, in un ipergruppoide proprio* H^0 *di sostegno* $H=\{a, b\}$, *la terna* (a, a, a) *non è associativa, allora anche qualcuna delle seguenti tre terne*

$$(a, a, b),\ (b, a, a),\ (a, b, a) \tag{17}$$

non è associativa.

Infatti, dev'essere intanto (per il lemma 4 del n.° 5) $H^0 \neq H^0(a, A_2, A_3, A_4)$ come pure $H^0 \neq (H, A_2, A_3, A_4)$, poichè anche in quest'ultimo ipergruppoide la terna (a, a, a) è associativa $(Ha=aH=H)$, e ciò qualunque siano A_2, A_3, A_4. Quindi H^0 deve essere uno degli ipergruppoidi propri (di sostegno $H=\{a, b\}$) definiti dalla seguente tabella:

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & b & A_2 \\ b & A_3 & A_4 \end{array} \quad \text{con } A_2 \neq A_3, \tag{18}$$

cioè H^0 deve essere uno degli $H^0(b, A_2, A_3, A_4)$ con A_4 qualsiasi ed (A_2, A_3) eguale ad una delle seguenti coppie:

$$(a, b),\ (a, H),\ (b, H),\ (b, a),\ (H, a),\ (H, b). \tag{19}$$

Esaminiamo i primi tre casi. Se $(A_2, A_3)=(a, b)$, necessariamente $A_4=H$ (poichè H^0 è proprio), e in $H^0(b, a, b, H)$ la prima delle terne (17) non è appunto associativa $((aa)b= =bb=H, a(ab)=aa=b)$. Se $(A_2, A_3)=(a, H)$, allora si hanno i tre sottocasi: $H^0=H^0(b, a, H, a)$, $H^0=H^0(b, a, H, b)$ $H^0=H^0(b, a, H, H)$, e in questi tre ipergruppoidi non sono appunto associative rispettivam. le terne (a, a, b), (a, b, a), (a, a, b), (si ha infatti rispettivam.: $(aa)b=bb=a$, $a(ab)=aa=b$; $(ab)a=aa=b$, $a(ba)=aH=H$; $(aa)b= =bb=H$, $a(ab)=aa=b$). Se $(A_2, A_3)=(b, H)$, si hanno pure tre sottocasi: $H^0 = H^0(b, b, H, a)$, $H^0 = H^0(b, b, H, b)$, $H^0 = H^0(b, b, H, H)$, e in questi tre ipergruppoidi non sono appunto associative risp. le terne (a, a, b), (a, b, a), (a, a, b), (si ha infatti risp.: $(aa)b = bb = a$, $a(ab) = ab = b$; $(ab)a = = ba = H$, $a(ba) = aH = b$; $(aa)b = bb = H$, $a(ab) = ab = b$).

Gli ultimi tre fra i casi (19) si riconducono ai primi tre (trattati nel preced. capov.) mediante il lemma 5 del n.º 5. Infatti, gli ipergruppoidi $H^0(b, b, a, H)$, $H^0(b, H, a, a)$, $H^0(b, H, a, b)$, $H^0(b, H, a, H)$, $H^0(b, H, b, a)$, $H^0(b, H, b, b)$, $H^0(b, H, b, H)$ sono rispettivam. opposti di quelli considerati nel preced. capoverso; dunque in essi non sono appunto associative (lemma 5) rispettivam. le terne (b, a, a), (b, a, a), (a, b, a), (b, a, a), (b, a, a), (a, b, a), (b, a, a). La dimostrazione della proposizione VI) è così completata.

VII) *Se, in un ipergruppoide proprio H^0 di sostegno $H = \{a, b\}$, sono associative tutte le terne diverse dalle due seguenti*:

$$(a, a, a), \ (b, b, b), \tag{20}$$

allora anche queste due terne (20) *sono associative.*

Infatti, se (a, a, a) non fosse associativa, non sarebbe associativa (per la proposiz. preced.) anche qualcuna delle terne (17), contro l'ipotesi; se non fosse associativa (b, b, b), allora (per la stessa proposiz. VI), ove si scambi la denominazione dei due elementi di H) non sarebbe associativa qualcuna delle tre terne (b, b, a), (a, b, b), (b, a, b), pure contro l'ipotesi.

8. - Le sei proposizioni I), ..., VI), dimostrate nei due numeri precedenti, forniscono appunto (tenuto conto delle considerazioni dei n.i 3 e 4) la dimostrazione del teorema enunciato alla fine del n.º 2.

Infatti, nelle ipotesi di tale teorema, se $\nu \geq 3$, consideriamo un qualunque sottinsieme H_2 di H costituito da tre elementi (distinti), e un sottinsieme H_1 di H_2 costituito da due elementi:

$$H_1 = \{a, b\}, \quad H_2 = \{a, b, c\}.$$

Allora (per le proposiz. I), II), III) del n.º 6) H_1 è il sostegno di tre ipergruppoidi propri in cui sono rispettivam. isolate le tre terne (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a), mentre H_2 (per le proposiz. V), IV) del n.° 6 è il sostegno di due ipergruppoidi propri in cui sono rispettivam. isolate le tre terne (a, a, b), (b, a, a), (a, b, a) (ipergruppoidi che sono estensioni dei suddetti tre di sostegno H_1, e nei quali $cx = xc = c$ qualunque sia $x \in H_2$). Ma allora, se $\nu = 3$, tutte le terne $(x, y, z) \in H^3$ sono appunto propriamente iperisolabili in $H (= H_2)$, è ciò in virtù delle osservazioni del n.° 3 (5°-ult. e 3°-ult. capov.). Se invece $\nu > 3$, chiamato H_2^* uno qualsiasi dei suddetti cinque ipergruppoidi propri di sostegno H_2, si definisca in H una moltiplicazione imponendole di subordinare in H_2 quella di H_2^* e facendo le posizioni (5), con $u \in H \dot{-} H_2$, $x \in H$, $Z = H \dot{-} H_2$. H diventa allora il sostegno di un ipergruppoide proprio H^0, nel quale (per il lemma 1 del n.° 4) la relativa terna (4) è isolata. Ma allora, anche in questa caso (sempre in virtù di quanto osservato nel 5°-ult. e nel 3°-ult. capov. del n.° 3), tutte le terne $(x, y, z) \in H^3$ sono appunto propriamente iperisolabili in H. La prima parte del teor. del n.° 2 è perciò dimostrata.

La seconda parte del teor. del n.° 2 $(\nu = 2)$ è poi un'immediata conseguenza delle proposiz. I), II), III) del n.° 6 e della proposiz. VI) del n.° 7 (ove si ricordino ancora il 5°-ult. e il 3°-ult. capov. del n.° 3).

Il teorema enunciato alla fine del n.° 2 è dunque completamente dimostrato.

9. - Riattaccandoci ora a quanto dicevamo nel penultimo capoverso del n.° 2, osserveremo che (per la proposizione VII) del n.° 7) le $2^3 = 8$ condizioni di associatività (2), imposte alle terne (x, y, z) di elementi di un ipergruppoide proprio avente ordine $\nu = 2$, non costituiscono (a differenza di quanto succede per $\nu > 2$) un sistema di postulati indipendenti. Il problema (cfr. [4], § 1) di determinare tutti i sottosistemi di questo sistema che siano *i*) ad esso equivalenti e *ii*) ciascuno costituito da postulati indipendenti, è poi risolto dal seguente

TEOREMA 2: *Per un ipergruppoide proprio di ordine 2, il sistema di postulati costituito dalle otto condizioni di associa-*

tività (2) *contiene un unico sistema ad esso equivalente e costituito da condizioni indipendenti*: *quello formato dalle sei eguaglianze dedotte dalle* (2) *sopprimendo quelle con* $x = y = z$.

Infatti, sia H un insieme costituito da due elementi: $H = \{a, b\}$. Ogni ipergruppoide proprio di ordine 2 è isomorfo (n.° 3, 4° capov.) ad uno degli ipergruppoidi propri di sostegno H, quindi ci si può limitare alla considerazione di questi ultimi. Osserviamo allora le 8 eguaglianze (2), con $x, y, z \in H$. Sopprimendo fra queste quelle con $x = y = z$, le 6 rimanenti sono appunto *indipendenti* (nel senso che esistono — per la 2ª parte del teor. del n.° 2 — sei ipergruppoidi propri di sostegno H in cui rispettivam. ciascuna di esse è soddisfatta e le altre cinque no) e, nel loro insieme, *equivalenti* alle otto di partenza nel senso che il loro verificarsi in un ipergruppoide proprio di (sostegno H implica sempre — per la proposiz. VII del n.° 7 — il verificarsi delle due rimanenti con $x = y = z$).

Che poi il sistema Σ_1 delle 6 eguaglianze (2) diverse da quelle con $x = y = z$ sia l'unico sottosistema del sistema Σ di tutte le 8 eguaglianze (2) a questo equivalente e costituito da condizioni indipendenti, si verifica facilmente. E invero, se esistesse un sottosistema (proprio e non vuoto) Σ_2 di Σ soddisfacente a queste due stesse condizioni e diverso da Σ_1, allora Σ_2 dovrebbe necessariamente contenere una almeno delle due eguaglianze (di $\Sigma \dot{-} \Sigma_1$) relative alle terne (20) (chè, altrimenti, Σ_2 dovrebbe essere un sottosistema proprio di Σ_1, il che è manifestamente impossibile, essendo le terne relative alle eguaglianze di Σ_1 propriamente iperisolabili in H, e non potendo quindi essere Σ_2 equivalente a Σ); d'altra parte Σ_2 non potrebbe essere un soprasistema (proprio) di Σ_1 (per la proposiz. VII) del n.° 7), e inoltre l'intersezione di Σ_2 e Σ_1 non potrebbe esser vuota (chè, altrimenti, Σ_2 non sarebbe equivalente a Σ); dunque, necessariamente, l'intersezione di Σ_2 e Σ_1 dovrebbe essere non vuota e distinta sia da Σ_2 che da Σ_1; ma questa conclusione è assurda, perchè allora Σ_2 non sarebbe certo equivalente a Σ (le terne relative alle eguaglianze di Σ_1 essendo propriamente iperisolabili in H), contro l'ipotesi. La dimostrazione del teor. 2 è così completata.

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI, N.: *Algèbre,* Act. scient. ind. 1144, Hermann (1951).

[2] DUBREIL, P.: *Algébre, I,* 2, *éd.,* Gauthier-Villars (1954).

[3] KUNTZMANN, J.: *Contribution a l'étude des systèmes multiformes,* Annales Fac. Sci. Univ. Toulouse (IV), vol. 3 (1939), pp. 155-194.

[4] SZÁSZ, G.: *Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen,* Acta Scientiarum Math., vol. 15 (1953), pp. 20-28.