Vittorio E. Bononcini

**Sulle serie di Fourier delle funzioni composte**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 27 (1957), p. 218-227

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__218_0>

# SULLE SERIE DI FOURIER DELLE FUNZIONI COMPOSTE

*Nota* (*) *di* VITTORIO E. BONONCINI (*a Bologna*)

**1.** - In una nota di Pagni [1]) è trattato il problema di esprimere i coefficienti di Fourier di una funzione di funzione $y = f[x(t)]$ per mezzo dei coefficienti di Fourier delle funzioni $y = f(x)$, $x = x(t)$.

Nel presente lavoro viene risolto (nn. 2, 3, 4, 5), sotto condizioni meno restrittive di quelle imposte da Pagni, il problema analogo relativo alle funzioni composte in generale e cioè: noti i coefficienti di Fourier delle funzioni
$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_\nu = x_\nu(u_1, u_2, \dots, u_m)$, $(\nu = 1, 2, \dots, n)$, determinare, tramite essi, i coefficienti di Fourier della funzione composta $y = f[x_1(u_1, u_2, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, u_2, \dots, u_m)]$.

Per semplicità di esposizione si considera $m = n = 2$, ogni altro caso potendosi trattare nello stesso modo con opportune modificazioni. Il caso considerato da Pagni si riferisce ad $m = n = 1$.

Nel n. 6 viene fatta un'osservazione relativa a un teorema di Žak [2]).

---

(*) Pervenuta in Redazione il 9 giugno 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

1) M. PAGNI, *Sui coefficienti di* FOURIER *di una funzione di funzione*, « Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. », Serie VIII, Vol. 5, (1948), pp. 363-368.

2) I. E. ŽAK. *On a theorem of* LÉVY *on absolute convergence of* FOURIER *series*, « Usphel Math. Nauk (N. S.) », 10, n. 1 (63), (1955), (Russian), pp. 107-112.

**2.** - Sia $f(x, y)$ una funzione continua quasi ovunque nel quadrato $Q \equiv (0 \leq x \leq 2\pi,\ 0 \leq y \leq 2\pi)$, ivi a variazione doppia finita [3]) e tale che $f(x, 0)$, $f(0, y)$ risultino a variazione limitata in $0 \leq x \leq 2\pi$ e in $0 \leq y \leq 2\pi$ rispettivamente. Si consideri poi una coppia di funzioni $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ continue nel quadrato $Q' \equiv (0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 2\pi)$ atta a trasformare $Q'$ in $Q$ e tale che l'insieme dei punti di $FQ$ (frontiera di $Q$) e degli eventuali punti di discontinuità della $f(x, y)$ corrisponda ad un insieme di misura nulla (secondo Lebesgue) di $Q'$ [4]), onde in $Q'$ resta definita la funzione composta $F(u, v) = f[x(u, v), y(u, v)]$.

Si dimostra in primo luogo il seguente

LEMMA. *Se $f(x, y)$ è una funzione a variazione doppia finita in $Q$ e tale che $f(x, 0)$, $f(0, y)$ siano a variazione limitata in $0 \leq x \leq 2\pi$ e in $0 \leq y \leq 2\pi$ rispettivamente, allora le ridotte $s_{m,n}(x, y)$, $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$, della serie di Fourier di $f(x, y)$ sono equilimitate in $Q$.*

Si può scrivere

$$f(x, y) = f_1(x, y) - f_2(x, y),$$

ove $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ sono funzioni limitate e non negative in $Q$, non decrescenti sia come funzioni della sola $x$ che della sola $y$ e tali inoltre che per ogni coppia di punti $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ di $Q$ con $x_2 > x_1$, $y_2 > y_1$, sia

$$f_1(x_2, y_2) - f_1(x_1, y_2) - f_1(x_2, y_1) + f_1(x_1, y_1) \geq 0,$$
$$f_2(x_2, y_2) - f_2(x_1, y_2) - f_2(x_2, y_1) + f_2(x_1, y_1) \geq 0 \text{ [5]}).$$

Esiste pertanto una costante $M > 0$ tale che per ogni punto $(x, y)$ di $Q$ risulti $|f(x, y)| \leq M$ e quindi anche

---

[3]) L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna, (1928), p. 470.

[4]) Quest'ultima condizione si può omettere se $f(x, y)$ è continua e periodica, di periodo $2\pi$, rispetto a ciascuna delle variabili. Tali sono fra l'altro, le ipotesi ammesse da PAGNI nel caso da lui trattato, ma è manifesto che i risultati ottenuti dal citato Autore valgono anche sotto ipotesi analoghe a quelle indicate nel presente lavoro.

[5]) Loc. cit. in [3]), p. 471.

$|\sigma_{m,n}(x, y)| \leq M$, $(m, n = 1, 2, 3, \ldots)$, ove $\{\sigma_{m,n}(x, y)\}$ indica la successione delle medie $(C, 1, 1)$ della successione $\{s_{m,n}(x, y)\}$. Invero si ha

$$\sigma_{m,n}(x, y) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 mn} \left| \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x+u, y+v) \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{m}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 du\, dv \right| \leq$$

$$\leq \frac{M}{4\pi^2 mn} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{m}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 du\, dv = M.$$

Denotati con $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$, $(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$, i coefficienti di Fourier della $f(x, y)$, risulta poi [6])

$$a_{m,n} = O\left(\frac{1}{mn}\right), \quad b_{m,n} = O\left(\frac{1}{mn}\right), \quad c_{m,n} = O\left(\frac{1}{mn}\right), \quad d_{m,n} = O\left(\frac{1}{mn}\right),$$

$$\sum_{s=0}^{n} a_{m,s} = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \sum_{s=0}^{n} b_{m,s} = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \sum_{s=0}^{n} c_{m,s} = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad \sum_{s=0}^{n} d_{m,s} = O\left(\frac{1}{m}\right),$$

$$\sum_{r=0}^{m} a_{r,n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{r=0}^{m} b_{r,n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{r=0}^{m} c_{r,n} = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{r=0}^{m} d_{r,n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

sicchè, posto

$$A_{r,s}(x, y) = \lambda_{r,s}(a_{r,s} \cos rx \cos sy + b_{r,s} \operatorname{sen} rx \cos sy +$$
$$+ c_{r,s} \cos rx \operatorname{sen} sy + d_{r,s} \operatorname{sen} rx \operatorname{sen} sy). \qquad (r, s = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\lambda_{r,s} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } \; r = s = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{»} \;\; r > 0,\ s = 0;\ r = 0,\ s > 0 \\ 1 & \text{»} \;\; r > 0,\ s > 0, \end{cases}$$

---

[6]) H. GEIRINGER, *Trigonometrische Doppelreihen*, « Monatshefte für Math. u. Physik », XXIX Jahrgang, (1918), pp. 65-142, in particolare p. 121.

si trae

$$|A_{m,n}(x, y)| < |a_{m,n}| + |b_{m,n}| + |c_{m,n}| + |d_{m,n}| = O\left(\frac{1}{mn}\right),$$

$$\sum_{s=0}^{n} |A_{m,s}(x, y)| < \sum_{s=0}^{n} (|a_{m,s}| + |b_{m,s}| + |c_{m,s}| + |d_{m,s}|) = O\left(\frac{1}{m}\right),$$

$$\sum_{r=0}^{m} |A_{r,n}(x, y)| < \sum_{r=0}^{m} (|a_{r,n}| + |b_{r,n}| + |c_{r,n}| + |d_{r,n}|) = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Da queste limitazioni e dall'identità

$$s_{m,n}(x, y) = \sigma_{m+1,n+1}(x, y) +$$

$$+ \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{r=0}^{m} \sum_{s=0}^{n} [(m+1)r + (n+1)s - rs] A_{r,s}(x, y),$$

segue, come volevasi,

$$|s_{m,n}(x, y)| < M + \frac{1}{m+1} \sum_{r=1}^{m} r \sum_{s=0}^{n} |A_{r,s}(x, y)| +$$

$$+ \frac{1}{n+1} \sum_{s=1}^{n} s \sum_{r=0}^{m} |A_{r,s}(x, y)| +$$

$$+ \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{n} rs\, |A_{r,s}(x, y)| < L,$$

con $L$ costante positiva.

**3.** - Si proverà ora che

$$(1) \qquad \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} F(u, v)\,du\,dv = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} A_{r,s}[x(u, v), y(u, v)]\,du\,dv.$$

Invero si ha, quasi ovunque in $Q - FQ$,

$$(2) \qquad f(x, y) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{r,s}(x, y),$$

mentre, nei punti di $FQ$ e negli eventuali punti di discontinuità della $f(x, y)$, la serie a secondo membro della (2) converge verso

$$\frac{1}{4}[f(x+0,\ y+0)+f(x+0,\ y-0)+f(x-0,\ y+0)+ \\ +f(x-0,\ y-0)]\ ^{7)}.$$

Pertanto, quasi ovunque in $Q'$, risulta

$$F(u,\ v)=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}A_{r,\,s}[x(u,\ v),\ y(u,\ v)], \tag{3}$$

e inoltre la serie a secondo membro converge in tutti i punti di $Q'$ ed ha le ridotte equilimitate in $Q'$, tali essendo per il lemma del n. 2, le ridotte della serie (2). In virtù di un noto teorema di Lebesgue, la (1) si deduce quindi dalla (3) mediante integrazione termine a termine.

Con ragionamento analogo si riconosce che sussistono le quattro uguaglianze

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}F(u,\ v)\left\{\begin{matrix}\cos mu\cos nv\\ \operatorname{sen} mu\cos nv\\ \cos mu\operatorname{sen} nv\\ \operatorname{sen} mu\operatorname{sen} nv\end{matrix}\right\}du dv= \tag{4}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda_{r,\,s}[a_{r,\,s}\cos rx(u,\ v)\cos sy(u,\ v)+$$

$$+b_{r,\,s}\operatorname{sen} rx(u,\ v)\cos sy(u,\ v)+c_{r,\,s}\cos rx(u,\ v)\operatorname{sen} sy(u,\ v)+$$

$$+d_{r,\,s}\operatorname{sen} rx(u,\ v)\operatorname{sen} sy(u,\ v)]\left\{\begin{matrix}\cos mu\cos nv\\ \operatorname{sen} mu\cos nv\\ \cos mu\operatorname{sen} nv\\ \operatorname{sen} mu\operatorname{sen} nv\end{matrix}\right\}du dv,$$

$$(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ ...).$$

---

7) Loc. cit. in 3), p. 472. Si osservi peraltro che se la $f(x,\ y)$ è continua e periodica, di periodo $2\pi$, rispetto ad $x$ e ad $y$, la sua serie di FOURIER converge verso $f(x,\ y)$ uniformemente in $Q$.

**4.** - Se con $\alpha_{m,n}$, $\beta_{m,n}$, $\gamma_{m,n}$, $\delta_{m,n}$, $(m, n = 0, 1, 2, ...)$, si indicano i coefficienti di Fourier della $F(u, v)$, posto

$$\underset{(r,s)}{\mu_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos rx(u, v) \cos sy(u, v) \cos mu \cos nv\,du\,dv,$$

$$\underset{(r,s)}{\nu_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos rx(u, v) \cos sy(u, v) \operatorname{sen} mu \cos nv\,du\,dv,$$

$$\underset{(r,s)}{\omega_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos rx(u, v) \cos sy(u, v) \cos mu \operatorname{sen} nv\,du\,dv,$$

$$\underset{(r,s)}{\rho_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos rx(u, v) \cos sy(u, v) \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nv\,du\,dv,$$

$$\underset{(r,s)}{\mu^{*}_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} rx(u, v) \cos sy(u, v) \cos mu \cos nv\,du\,dv,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\underset{(r,s)}{\mu^{**}_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos rx(u, v) \operatorname{sen} sy(u, v) \cos mu \cos nv\,du\,dv,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\underset{(r,s)}{\mu^{***}_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} rx(u, v) \operatorname{sen} sy(u, v) \cos mu \cos nv\,du\,dv,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$(m, n, r, s = 0, 1, 2, ...)$, dalle (1) e (4) si trae

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}
\alpha_{m,n} &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{r,s}\Big(a_{r,s}\underset{(r,s)}{\mu_{m,n}} + b_{r,s}\underset{(r,s)}{\mu^{*}_{m,n}} + c_{r,s}\underset{(r,s)}{\mu^{**}_{m,n}} + d_{r,s}\underset{(r,s)}{\mu^{***}_{m,n}}\Big)\\
\beta_{m,n} &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{r,s}\Big(a_{r,s}\underset{(r,s)}{\nu_{m,n}} + b_{r,s}\underset{(r,s)}{\nu^{*}_{m,n}} + c_{r,s}\underset{(r,s)}{\nu^{**}_{m,n}} + d_{r,s}\underset{(r,s)}{\nu^{***}_{m,n}}\Big)\\
\gamma_{m,n} &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{r,s}\Big(a_{r,s}\underset{(r,s)}{\omega_{m,n}} + b_{r,s}\underset{(r,s)}{\omega^{*}_{m,n}} + c_{r,s}\underset{(r,s)}{\omega^{**}_{m,n}} + d_{r,s}\underset{(r,s)}{\omega^{***}_{m,n}}\Big)\\
\delta_{m,n} &= \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \lambda_{r,s}\Big(a_{r,s}\underset{(r,s)}{\rho_{m,n}} + b_{r,s}\underset{(r,s)}{\rho^{*}_{m,n}} + c_{r,s}\underset{(r,s)}{\rho^{**}_{m,n}} + d_{r,s}\underset{(r,s)}{\rho^{***}_{m,n}}\Big).
\end{aligned}\right.$$

Le (5) esprimono i coefficienti di Fourier della $F(u, v)$ mediante quelli delle funzioni

$$f(x, y),\quad \cos rx(u, v)\cos sy(u, v),\quad \operatorname{sen} rx(u, v)\cos sy(u, v),$$
$$\cos rx(u, v)\operatorname{sen} sy(u, v),\quad \operatorname{sen} rx(u, v)\operatorname{sen} sy(u, v).$$

Per risolvere il problema proposto non rimane che esprimere i coefficienti di Fourier delle ultime quattro funzioni sopra indicate per mezzo dei coefficienti di Fourier delle funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$.

**5.** - Dalle formule di prostaferesi e dagli sviluppi in serie di Mac-Laurin delle funzioni $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$, segue, uniformemente in $Q'$,

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
&\cos rx(u, v)\cos sy(u, v) =\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{[rx(u, v)+sy(u, v)]^{2k}+[rx(u, v)-sy(u, v)]^{2k}}{(2k)!}\\
&\operatorname{sen} rx(u, v)\cos sy(u, v) =\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{[rx(u, v)+sy(u, v)]^{2k+1}+[rx(u, v)-sy(u, v)]^{2k+1}}{(2k+1)!}\\
&\cos rx(u, v)\operatorname{sen} sy(u, v) =\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{[rx(u, v)+sy(u, v)]^{2k+1}-[rx(u, v)-sy(u, v)]^{2k+1}}{(2k+1)!}\\
&\operatorname{sen} rx(u, v)\operatorname{sen} sy(u, v) =\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{[rx(u, v)+sy(u, v)]^{2k}-[rx(u, v)-sy(u, v)]^{2k}}{(2k)!},
\end{aligned}\right.$$

$$(r,\ s = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Integrando termine a termine le (6) e ponendo

$$\underset{(h)}{A_{m.n}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{[rx(u, v)+sy(u, v)]^h +$$
$$+ [rx(u, v)-sy(u, v)]^h\}\cos mu\cos nv\,du\,dv,$$

$$\underset{(h)}{B_{m.n}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\{[rx(u, v)+sy(u, v)]^h +$$
$$+ [rx(u, v)-sy(u, v)]^h\}\operatorname{sen} mu\cos nv\,du\,dv,$$

$$\underset{(h)}{C_{m,n}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \{[rx(u, v) + sy(u, v)]^h +$$

$$+ [rx(u, v) - sy(u, v)]^h\} \cos mu \operatorname{sen} nvdudv,$$

$$\underset{(h)}{D_{m,n}} = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \{[rx(u, v) + sy(u, v)]^h +$$

$$+ [rx(u, v) - sy(u, v)]^h\} \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nvdudv,$$

$$\underset{(h)}{A^*_{m,n}} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \{[rx(u, v) + sy(u, v)]^h -$$

$$- [rx(u, v) - sy(u, v)]^h\} \cos mu \cos nvdudv,$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$(m, n, r, s, h = 0, 1, 2, ...)$, si ottiene

$$\underset{(r,s)}{\mu_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\underset{(2k)}{A_{m,n}}, \qquad \underset{(r,s)}{\nu_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\underset{(2k)}{B_{m,n}},$$

$$\underset{(r,s)}{\omega_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\underset{(2k)}{C_{m,n}}, \qquad \underset{(r,s)}{\rho_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\underset{(2k)}{D_{m,n}};$$

$$\underset{(r,s)}{\mu^*_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\underset{(2k+1)}{A_{m,n}}, \quad . . . . . . . . . . . .$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\underset{(r,s)}{\mu^{**}_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\underset{(2k+1)}{A^*_{m,n}} \quad . . . . . . . . . . . .$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\underset{(r,s)}{\mu^{***}_{m,n}} = \frac{1}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\underset{(2k)}{A^*_{m,n}} \quad . . . . . . . . . . . . .$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,

$(m, n, r, s = 0, 1, 2, ...)$.

Le (5), unitamente a queste ultime formule, permettono di calcolare i coefficienti di Fourier della $F(u, v)$ noti i coefficienti di Fourier della $f(x, y)$ e quelli delle potenze e prodotti di potenze delle funzioni $x(u, v)$, $y(u, v)$.

La completa risoluzione del problema discende ora dalla seguente proposizione:

se $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sono funzioni di quadrato sommabile in $Q$, denotati con $a_{m,n}$, $b_{m,n}$, $c_{m,n}$, $d_{m,n}$ i coefficienti di Fourier della $f(x, y)$ e con $\bar{a}_{m,n}$, $\bar{b}_{m,n}$, $\bar{c}_{m,n}$, $\bar{d}_{m,n}$ quelli della $g(x, y)$ e infine con $A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, $D_{m,n}$ quelli del prodotto $f(x, y)g(x, y)$, si ha

$$\begin{aligned} A_{m,n} = \frac{1}{4}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\lambda_{r,s}[& a_{r,s}(\bar{a}_{m+r,n+s} + \bar{a}_{m+r,n-s} + \bar{a}_{m-r,n+s} + \bar{a}_{m-r,n-s}) + \\ & + b_{r,s}(\bar{b}_{m+r,n+s} + \bar{b}_{m+r,n-s} - \bar{b}_{m-r,n+s} - \bar{b}_{m-r,n-s}) + \\ & + c_{r,s}(\bar{c}_{m+r,n+s} - \bar{c}_{m+r,n-s} + \bar{c}_{m-r,n+s} - \bar{c}_{m-r,n-s}) + \\ & + d_{r,s}(\bar{d}_{m+r,n+s} - \bar{d}_{m+r,n-s} - \bar{d}_{m-r,n+s} + \bar{d}_{m-r,n-s})], \end{aligned}$$

$(m, n = 0, 1, 2, \ldots)$, ove si intende che sia

$$\bar{a}_{-h,k} = \bar{a}_{h,-k} = \bar{a}_{-h,-k} = \bar{a}_{h,k}\,;\quad \bar{b}_{-h,k} = \bar{b}_{-h,-k} = -\bar{b}_{h,k}\,,\ \bar{b}_{h,-k} = \bar{b}_{h,k}\,;$$
$$\bar{c}_{h,-k} = \bar{c}_{-h,-k} = -\bar{c}_{h,k}\,,\ \bar{c}_{-h,k} = \bar{c}_{h,k}\,;$$
$$\bar{d}_{-h,k} = \bar{d}_{h,-k} = -\bar{d}_{h,k}\,,\ \bar{d}_{-h,-k} = \bar{d}_{h,k}\,.$$

Analoghe formule sussistono per $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, $D_{m,n}$ e le serie a secondo membro sono assolutamente convergenti. Per la dimostrazione si può seguire un ragionamento del tutto simile a quello relativo alle funzioni di una variabile [8]), tenendo presente la generalizzazione della formula di Parseval per le funzioni di più variabili [9]).

**6.** - In un recente lavoro, Žak ha ottenuto il seguente risultato, che costituisce una estensione alle funzioni di due variabili di un teorema di Lévy [10]):

La serie di Fourier di una funzione $f(x, y)$, periodica, di periodo $2\pi$, rispetto ad $x$ e ad $y$ sia in $Q$ totalmente conver-

---

8) Loc. cit. in 3), p. 335.

9) Loc. cit., in 6), p. 141.

10) P. LÉVY, *Sur la convergence absolute des séries de* FOURIER, « Compositio Math. », 1, (1934), pp. 1-14.

gente e inoltre si abbia $\alpha \leq f(x, y) \leq \beta$, ($\alpha$ e $\beta$ costanti). Se $\varphi(z)$ è una funzione analitica in $(\alpha, \beta)$, la serie di Fourier di $\varphi[f(x, y)]$ è pure totalmente convergente in $Q$ [11]).

Questa proposizione non è più valida se nell'enunciato la parola « totalmente » viene sostituita con la parola « uniformemente ».

Si dimostrerà infatti che:

*esistono delle funzioni $f(x, y)$ periodiche, di periodo $2\pi$, rispetto ad $x$ e ad $y$, aventi la serie di Fourier uniformemente convergente in $Q$ ma tali che la serie di Fourier di $f^2(x, y)$ non converge in almeno un punto di $Q$.*

Questa affermazione è stata provata da Salem [12]) per le funzioni di una variabile. Pertanto se $f_1(x)$ e $f_2(y)$ sono due funzioni cosiffatte, il prodotto $f_1(x)\, f_2(y)$ costituisce un esempio atto a provare l'asserto. Si osservi peraltro che, con un procedimento simile a quello adottato da Salem [12]), è possibile trovare anche degli esempi di funzioni $f(x, y)$ non a variabili separate. Non si ritiene tuttavia opportuno esporre il suddetto procedimento, giacchè lo scopo proposto è già stato raggiunto.

Ciò che si è detto per le funzioni di due variabili si estende in modo ovvio alle funzioni di un numero qualunque di variabili.

---

11) Nell'enunciato originale si parla di assoluta convergenza della serie doppia complessa equivalente alla serie di FOURIER, ma si vede facilmente che dall'assoluta convergenza della prima segue la totale convergenza della seconda e inversamente.

12) R. SALEM, *A singularity of the* FOURIER *series of continuous functions*, « Duke, Math. J. », 10, (1943), p. 711-716.