

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FABIO MANARESI

**Alcuni teoremi sulle serie coniugate della serie di  
Fourier di una funzione di più variabili**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 27 (1957), p. 181-192

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1957\\_\\_27\\_\\_181\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__181_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# ALCUNI TEOREMI SULLE SERIE CONIUGATE DELLA SERIE DI FOURIER DI UNA FUNZIONE DI PIÙ VARIABILI

*Nota (\*) di FABIO MANARESI (a Bologna)*

**1.** - Nella presente nota si estende alle funzioni di più variabili un teorema stabilito da Szász<sup>1)</sup> relativo alle funzioni di una variabile.

Per semplicità di esposizione ci si limita ai casi di funzioni di due variabili (nn. 2, 3) e di tre variabili (n. 4), e nel n. 5 si dà un cenno sul modo di ottenere analoghi risultati per le funzioni di un numero qualunque di variabili.

**2.** - Sia  $f(x, y)$  una funzione periodica, di periodo  $2\pi$ , rispetto ad  $x$  e ad  $y$ , sommabile nel quadrato  $Q \equiv (0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi)$  e sia

$$(1) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{m,n} (A_{m,n} \cos mx \cos ny + B_{m,n} \sin mx \cos ny + \\ + C_{m,n} \cos mx \sin ny + D_{m,n} \sin mx \sin ny),$$

ove

$$\lambda_{m,n} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } m = n = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } m = 0, n > 0; m > 0, n = 0 \\ 1 & \text{se } m > 0, n > 0, \end{cases}$$

la serie di Fourier della  $f(x, y)$ .

---

(\*) Pervenuta in Redazione il 5 giugno 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

<sup>1)</sup> O. Szász, *The jump of a function determined by its Fourier coefficients*, «Duke Math. J.», 4 (1938), pp. 401-407, in particolare § 2.

Denotata con  $s_{m,n} \equiv s_{m,n}(x, y)$  la ridotta di indici  $m, n$  ( $m, n = 0, 1, 2, \dots$ ) della (1), si ponga

$$(2) \quad \begin{aligned} s_{m,n}^{(1)} &\equiv s_{m,n}^{(1)}(x, y) = \frac{\partial s_{m,n}}{\partial(mx)}, & s_{m,n}^{(2)} &\equiv s_{m,n}^{(2)}(x, y) = \frac{\partial s_{m,n}}{\partial(ny)}, \\ s_{m,n}^{(1,2)} &\equiv s_{m,n}^{(1,2)}(x, y) = \frac{\partial^2 s_{m,n}}{\partial(mx)\partial(ny)}. \end{aligned}$$

Le successioni (2) definiscono le tre *serie coniugate* della (1) e verranno chiamate ordinatamente coniugata prima rispetto ad  $x$ , coniugata prima rispetto ad  $y$  e coniugata seconda rispetto ad  $x$  e  $y$ .

Se

$$\sigma_{r,s}^{(1)} \equiv \sigma_{r,s}^{(1)}(x, y), \quad \sigma_{r,s}^{(2)} \equiv \sigma_{r,s}^{(2)}(x, y), \quad \sigma_{r,s}^{(1,2)} \equiv \sigma_{r,s}^{(1,2)}(x, y),$$

( $r, s = 1, 2, 3, \dots$ ),

rappresentano le medie  $(C, 1, 1)$  rispettivamente della prima, seconda e terza delle (2), si dimostra anzitutto il seguente

**TEOREMA I.** *Se  $f(x, y)$  è una funzione periodica, di periodo  $2\pi$ , rispetto ad  $x$  e ad  $y$ , sommabile e verificante la condizione  $(L)^2$  in  $Q$ , allora, in ogni punto  $(x, y)$  a cui si possa associare un numero  $\varphi(x, y)$  tale che*

$$(3) \quad \lim_{\substack{u \rightarrow +0 \\ v \rightarrow +0}} \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v |f(x+u, y+v) - f(x+u, y-v) - \\ - f(x-u, y+v) + f(x-u, y-v) - \varphi(x, y)| dudv = 0,$$

risulta

$$(4) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} (\sigma_{2m, 2m}^{(1,2)} - \sigma_{2m, m}^{(1,2)} - \sigma_{m, 2m}^{(1,2)} + \sigma_{m, m}^{(1,2)}) = \left(\frac{\log 2}{\pi}\right)^2 \varphi(x, y).$$

2) Si dice che la funzione  $f(x, y)$  soddisfa in  $Q$  alla condizione  $(L)$ , se esiste un numero positivo  $L$  tale che le due disuguaglianze

$$\int_0^{2\pi} |f(x, y)| dx \leq L, \quad \int_0^{2\pi} |f(x, y)| dy \leq L,$$

valgano rispettivamente per quasi tutti gli  $y$  e quasi tutti gli  $x$  di  $(0, 2\pi)$ .

Cfr. L. TONELLI, *Serie trigonometriche*, Zanichelli, Bologna (1928), p. 488.

Si ha

$$\sigma_{r,s}^{(1,2)} = \frac{1}{4\pi^2 rs} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u, v) \left[ \frac{\text{sen } r(x-u)}{2 \text{sen}^2 \frac{1}{2}(x-u)} - \right. \\ \left. - r \frac{\cos \frac{1}{2}(x-u)}{\text{sen} \frac{1}{2}(x-u)} \right] \left[ \frac{\text{sen } s(y-v)}{2 \text{sen}^2 \frac{1}{2}(y-v)} - s \frac{\cos \frac{1}{2}(y-v)}{\text{sen} \frac{1}{2}(y-v)} \right] dudv, \\ (r, s = 1, 2, 3, \dots)$$

e quindi

$$\sigma_{2m, 2n}^{(1,2)} - \sigma_{2m, n}^{(1,2)} - \sigma_{m, 2n}^{(1,2)} + \sigma_{m, n}^{(1,2)} = \\ = \frac{1}{4\pi^2 mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u, v) \text{sen } m(x-u) \text{sen } n(y-v) \left( \frac{\text{sen} \frac{m}{2}(x-u)}{\text{sen} \frac{1}{2}(x-u)} \right)^2 \left( \frac{\text{sen} \frac{n}{2}(y-v)}{\text{sen} \frac{1}{2}(y-v)} \right)^2 dudv = \\ = \frac{1}{4\pi^2 mn} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u, y-v) \text{sen } mu \text{sen } nv \left( \frac{\text{sen} \frac{m}{2} u}{\text{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left( \frac{\text{sen} \frac{n}{2} v}{\text{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 dudv = \\ = \frac{1}{4\pi^2 mn} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u, y+v) - f(x+u, y-v) - f(x-u, y+v) + f(x-u, y-v)] \cdot \\ \cdot \text{sen } mu \text{sen } nv \left( \frac{\text{sen} \frac{m}{2} u}{\text{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left( \frac{\text{sen} \frac{n}{2} v}{\text{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 dudv.$$

Si osservi ora che

$$I_{m,n} = \frac{1}{\pi^2 mn} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \text{sen } mu \text{sen } nv \left( \frac{\text{sen} \frac{m}{2} u}{\text{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left( \frac{\text{sen} \frac{n}{2} v}{\text{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 dudv$$

si può considerare come il prodotto della media (C, 1) relativa alla serie di coseni di  $\text{sen } mx$  per  $x=0$  e della media

(C, 1) relativa alla serie di coseni di  $\text{sen } ny$  per  $y = 0$ , sicchè, avendosi

$$\text{sen } mx \approx \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \alpha_{\mu} \cos \mu x, \quad 0 < x < \pi,$$

$$\text{sen } ny \approx \frac{\beta_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu} \cos \nu y, \quad 0 < y < \pi,$$

ove

$$\alpha_{\mu} = \frac{2}{\pi} \frac{m}{m^2 - \mu^2} [1 - (-1)^{m+\mu}], \quad (\mu = 0, 1, \dots, m-1),$$

$$\beta_{\nu} = \frac{2}{\pi} \frac{n}{n^2 - \nu^2} [1 - (-1)^{n+\nu}], \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1),$$

risulta

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \\ &= \left\{ \frac{1}{\pi m} [1 - (-1)^m] + \frac{2}{\pi} \sum_{\mu=1}^m \frac{1 - (-1)^{m+\mu}}{m + \mu} \right\} \left\{ \frac{1}{\pi n} [1 - (-1)^n] + \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=1}^n \frac{1 - (-1)^{n+\nu}}{n + \nu} \right\} = \\ &= \omega_m \cdot \omega_n. \end{aligned}$$

Poichè<sup>3)</sup>

$$(5) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = \frac{2}{\pi} \log 2,$$

si trae

$$(6) \quad \lim_{\substack{m \\ n} \rightarrow \infty} I_{m,n} = \left( \frac{2}{\pi} \log 2 \right)^2.$$

Si può quindi scrivere

$$\begin{aligned} & \left| \sigma_{2m, 2n}^{(1,2)} - \sigma_{2m, n}^{(1,2)} - \sigma_{m, 2n}^{(1,2)} + \sigma_{m, n}^{(1,2)} - \frac{1}{4} \omega_m \omega_n \varphi(x, y) \right| = \\ &= \frac{1}{4\pi^2 mn} \left| \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u, y+v) - f(x+u, y-v) - f(x-u, y+v) + \right. \\ & \quad \left. + f(x-u, y-v) - \varphi(x, y)] \cdot \right. \end{aligned}$$

<sup>3)</sup> Loc. cit. in<sup>1)</sup>, pp. 404-405.

$$\begin{aligned} & \cdot \operatorname{sen} mu \operatorname{sen} nv \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{m}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 dudv \Big| \leq \\ & \leq \frac{1}{4\pi^2 mn} \int_0^\pi \int_0^\pi |f(x+u, y+v) - f(x+u, y-v) - f(x-u, y+v) + \\ & + f(x-u, y-v) - \varphi(x, y)| \cdot \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{m}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 dudv \end{aligned}$$

Per un teorema di Lebesgue <sup>4)</sup> l'ultimo membro tende a zero per  $\frac{m}{n} \rightarrow \infty$  e pertanto, in virtù della (6), segue l'asserto.

Si noti che, ponendo nella (4)  $m = 2^\mu$ ,  $n = 2^\nu$  e considerandone la media (C, 1, 1), si ottiene

$$\lim_{\substack{\mu \\ \nu} \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu\nu} \sigma_{2^\mu 2^\nu}^{(1,2)} = \left( \frac{\log 2}{\pi} \right)^2 \varphi(x, y).$$

**3.** - Si stabiliscono ora gli analoghi teoremi relativi alle due serie coniugate prime della (1).

**TEOREMA II.** *Se  $f(x, y)$  è una funzione periodica, di periodo  $2\pi$ , rispetto ad  $x$  e ad  $y$ , sommabile e verificante la condizione (L) in  $Q$ , allora, in ogni punto  $(x, y)$  a cui si possa associare un numero  $\varphi(x, y)$  tale che*

$$(7) \quad \lim_{\substack{u \\ v} \rightarrow +0} \frac{1}{uv} \int_0^\pi \int_0^\pi |f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v) - \\ - f(x-u, y+v) - f(x-u, y-v) - \varphi(x, y)| dudv = 0,$$

*risulta*

$$(8) \quad \lim_{\substack{m \\ n} \rightarrow \infty} (\sigma_{2m, n}^{(1)} - \sigma_{m, n}^{(1)}) = \frac{1}{2} \frac{\log 2}{\pi} \varphi(x, y)$$

<sup>4)</sup> Loc. cit. in <sup>2)</sup>, p. 495.

e quindi

$$(9) \quad \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} (\sigma_{2m, 2n}^{(1)} - \sigma_{2m, n}^{(1)} - \sigma_{m, 2n}^{(1)} + \sigma_{m, n}^{(1)}) = 0.$$

Si ha

$$\sigma_{r, s}^{(1)} = \frac{1}{4\pi^2 r s} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u, v) \left[ \frac{\operatorname{sen} r(x-u)}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}(x-u)} - \right. \\ \left. - r \frac{\cos \frac{1}{2}(x-u)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x-u)} \right] \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{s}{2}(y-v)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(y-v)} \right)^2 dudv, \quad (r, s = 1, 2, 3, \dots),$$

e quindi

$$\sigma_{2m, n}^{(1)} - \sigma_{m, n}^{(1)} = \\ - \frac{1}{4\pi^2 mn} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(u, v) \operatorname{sen} m(x-u) \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{m}{2}(x-u)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(x-u)} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2}(y-v)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2}(y-v)} \right)^2 dudv = \\ = \frac{1}{4\pi^2 mn} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v) - \\ - f(x-u, y+v) - f(x-u, y-v)] \operatorname{sen} mu \cdot \\ \cdot \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{m}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 dudv, \\ \left| \sigma_{2m, n}^{(1)} - \sigma_{m, n}^{(1)} - \frac{1}{4} \omega_m \varphi(x, y) \right| = \\ = \frac{1}{4\pi^2 mn} \left| \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+u, y+v) + f(x+u, y-v) - \right.$$

$$- f(x - u, y + v) - f(x - u, y - v) - \varphi(x, y)] \operatorname{sen} mu \cdot$$

$$\cdot \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{m}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 dudv \Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{4\pi^2 mn} \int_0^\pi \int_0^\pi |f(x + u, y + v) + f(x + u, y - v) -$$

$$- f(x - u, y + v) - f(x - u, y - v) - \varphi(x, y)| \cdot$$

$$\cdot \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{m}{2} u}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} u} \right)^2 \left( \frac{\operatorname{sen} \frac{n}{2} v}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} v} \right)^2 dudv,$$

sicchè, in virtù della (5) e del citato teorema di Lebesgue, resta provata la (8).

Conseguentemente

$$\lim_{\substack{m \\ n} \rightarrow \infty} (\sigma_{2m, 2n}^{(1)} - \sigma_{m, 2n}^{(1)}) = \frac{1}{2} \frac{\log 2}{\pi} \varphi(x, y),$$

che, insieme con la (8), dimostra la (9).

Con lo stesso ragionamento adottato nella dimostrazione del teorema II, si prova che:

*Se  $f(x, y)$  è una funzione periodica, di periodo  $2\pi$ , rispetto ad  $x$  e ad  $y$ , sommabile e verificante la condizione (L) in  $Q$ , allora, in ogni punto  $(x, y)$  a cui si possa associare un numero  $\varphi(x, y)$  tale che*

$$\lim_{\substack{u \\ v} \rightarrow +0} \frac{1}{uv} \int_0^u \int_0^v |f(x + u, y + v) - f(x + u, y - v) +$$

$$+ f(x - u, y + v) - f(x - u, y - v) - \varphi(x, y)| dudv = 0,$$

**risulta**

$$\lim_{\substack{m \\ n} \rightarrow \infty} (\sigma_{m, 2n}^{(2)} - \sigma_{m, n}^{(2)}) = \frac{1}{2} \frac{\log 2}{\pi} \varphi(x, y)$$

e quindi

$$\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} (\sigma_{2m, n}^{(2)} - \sigma_{2m, n}^{(2)} - \sigma_{m, 2n}^{(2)} + \sigma_{m, n}^{(2)}) = 0.$$

4. - In questo n. si accenna alla dimostrazione di teoremi analoghi a I, II e relativi alle funzioni di tre variabili.

Sia  $f(x, y, z)$  una funzione periodica, di periodo  $2\pi$ , rispetto a ciascuna delle variabili, e sommabile nel dominio rettangolare  $Q \equiv (0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\pi)$  e sia

$$(10) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \lambda_{m, n, p} A_{m, n, p} \cos mx \cos ny \cos pz + \\ + B_{m, n, p} \cos mx \cos ny \sin pz + C_{m, n, p} \cos mx \sin ny \cos pz + \\ + D_{m, n, p} \sin mx \cos ny \cos pz + E_{m, n, p} \cos mx \sin ny \sin pz + \\ + F_{m, n, p} \sin mx \cos ny \sin pz + G_{m, n, p} \sin mx \sin ny \cos pz + \\ + H_{m, n, p} \sin mx \sin ny \sin pz,$$

ove

$$\lambda_{m, n, p} = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{se } m = n = p = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{se } m = 0, n > 0, p > 0; m > 0, n = 0, p > 0; \\ & m > 0, n > 0, p = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } m = 0, n = 0, p > 0; m = 0, n > 0, p = 0; \\ & m > 0, n = 0, p = 0 \\ 1 & \text{se } m > 0, n > 0, p > 0, \end{cases}$$

la sua serie di Fourier.

Indicata con  $s_{m, n, p} \equiv s_{m, n, p}(x, y, z)$  la ridotta di indici  $m, n, p$  ( $m, n, p = 0, 1, 2, \dots$ ) della (10), si ponga

$$(11) \quad \begin{cases} s_{m, n, p}^{(1)} = \frac{\partial s_{m, n, p}}{\partial(mx)}, s_{m, n, p}^{(2)} = \frac{\partial s_{m, n, p}}{\partial(ny)}, s_{m, n, p}^{(3)} = \frac{\partial s_{m, n, p}}{\partial(pz)}, \\ s_{m, n, p}^{(1, 2)} = \frac{\partial^2 s_{m, n, p}}{\partial(mx)\partial(ny)}, s_{m, n, p}^{(1, 3)} = \frac{\partial^2 s_{m, n, p}}{\partial(mx)\partial(pz)}, s_{m, n, p}^{(2, 3)} = \frac{\partial^2 s_{m, n, p}}{\partial(ny)\partial(pz)}, \\ s_{m, n, p}^{(1, 2, 3)} = \frac{\partial^3 s_{m, n, p}}{\partial(mx)\partial(ny)\partial(pz)}. \end{cases}$$

Le successioni (11) definiscono le *serie coniugate* della (10) e precisamente le tre serie coniugate *prime*, le tre serie coniugate *seconde* e la serie coniugata *terza*. Se con  $\sigma_{r,s,t}^{(1)} \equiv \sigma_{r,s,t}^{(1)}(x, y, z)$ ,  $\sigma_{r,s,t}^{(2)} \equiv \sigma_{r,s,t}^{(2)}(x, y, z)$ ,  $\sigma_{r,s,t}^{(3)} \equiv \sigma_{r,s,t}^{(3)}(x, y, z)$ ,  $\sigma_{r,s,t}^{(1,2)} \equiv \sigma_{r,s,t}^{(1,2)}(x, y, z)$ ,  $\sigma_{r,s,t}^{(1,3)} \equiv \sigma_{r,s,t}^{(1,3)}(x, y, z)$ ,  $\sigma_{r,s,t}^{(2,3)} \equiv \sigma_{r,s,t}^{(2,3)}(x, y, z)$ ,  $\sigma_{r,s,t}^{(1,2,3)} \equiv \sigma_{r,s,t}^{(1,2,3)}(x, y, z)$  si indicano le medie (C, 1, 1, 1) delle (11) ordinatamente, ragionando come nei nn. 2 e 3, si riconosce che, ove  $f(x, y, z)$  soddisfi alla condizione (L) in Q,

$$\begin{aligned} & \lim_{u, v, w \rightarrow +0} \frac{1}{uvw} \int_0^u \int_0^v \int_0^w |f(x+u, y+v, z+w) - \\ & - f(x+u, y+v, z-w) - f(x+u, y-v, z+w) + \\ & + f(x+u, y-v, z-w) - f(x-u, y+v, z+w) + \\ & + f(x-u, y+v, z-w) + f(x-u, y-v, z+w) - \\ & - f(x-u, y-v, z-w) - \varphi(x, y, z)| \, dudvdw = 0 \end{aligned}$$

implica

$$\begin{aligned} & \lim_{m, n, p \rightarrow \infty} (\sigma_{2m, 2n, 2p}^{(1,2,3)} - \sigma_{m, 2n, 2p}^{(1,2,3)} - \sigma_{2m, n, 2p}^{(1,2,3)} + \sigma_{m, n, 2p}^{(1,2,3)} - \sigma_{2m, 2n, p}^{(1,2,3)} + \\ & + \sigma_{m, 2n, p}^{(1,2,3)} + \sigma_{2m, n, p}^{(1,2,3)} - \sigma_{m, n, p}^{(1,2,3)}) = \left(\frac{\log 2}{\pi}\right)^3 \varphi(x, y, z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{u, v, w \rightarrow +0} \int_0^u \int_0^v \int_0^w |f(x+u, y+v, z+w) + \\ & + f(x+u, y+v, z-w) - f(x+u, y-v, z+w) - \\ & - f(x+u, y-v, z-w) - f(x-u, y+v, z+w) - \\ & - f(x-u, y+v, z-w) + f(x-u, y-v, z+w) + \\ & + f(x-u, y-v, z-w) - \varphi(x, y, z)| \, dudvdw = 0 \end{aligned}$$

implica

$$\begin{aligned} & \lim_{m, n, p \rightarrow \infty} (\sigma_{2m, 2n, p}^{(1,2)} - \sigma_{2m, n, p}^{(1,2)} - \sigma_{m, 2n, p}^{(1,2)} + \sigma_{m, n, p}^{(1,2)}) = \\ & = \frac{1}{2} \left(\frac{\log 2}{\pi}\right)^2 \varphi(x, y, z) \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{m, n, p \rightarrow \infty} (\sigma_{2m, 2n, 2p}^{(1, 2)} - \sigma_{m, 2n, 2p}^{(1, 2)} - \sigma_{2m, n, 2p}^{(1, 2)} + \sigma_{m, n, 2p}^{(1, 2)} - \sigma_{2m, 2n, p}^{(1, 2)} + \sigma_{m, 2n, p}^{(1, 2)} + \sigma_{2m, n, p}^{(1, 2)} - \sigma_{m, n, p}^{(1, 2)}) = 0;$$

$$\begin{aligned} & \lim_{u, v, w \rightarrow +0} \frac{1}{uvw} \int_0^u \int_0^v \int_0^w |f(x+u, y+v, z+w) + \\ & + f(x+u, y+v, z-w) + f(x+u, y-v, z+w) + \\ & + f(x+u, y-v, z-w) - f(x-u, y+v, z+w) - \\ & - f(x-u, y+v, z-w) - f(x-u, y-v, z+w) - \\ & - f(x-u, y-v, z-w) - \varphi(x, y, z)| dudvdw = 0 \end{aligned}$$

implica

$$\lim_{m, n, p \rightarrow \infty} (\sigma_{2m, n, p}^{(1)} - \sigma_{m, n, p}^{(1)}) = \frac{1}{2^2} \frac{\log 2}{\pi} \varphi(x, y, z)$$

e quindi

$$\lim_{m, n, p \rightarrow \infty} (\sigma_{2m, 2n, 2p}^{(1)} - \sigma_{m, 2n, 2p}^{(1)} - \sigma_{2m, n, 2p}^{(1)} + \sigma_{m, n, 2p}^{(1)} - \sigma_{2m, 2n, p}^{(1)} + \sigma_{m, 2n, p}^{(1)} + \sigma_{2m, n, p}^{(1)} - \sigma_{m, n, p}^{(1)}) = 0;$$

$$\begin{aligned} & \lim_{u, v, w \rightarrow +0} \frac{1}{uvw} \int_0^u \int_0^v \int_0^w |f(x+u, y+v, z+w) - \\ & - f(x+u, y+v, z-w) + f(x+u, y-v, z+w) - \\ & - f(x+u, y-v, z-w) - f(x-u, y+v, z+w) + \\ & + f(x-u, y+v, z-w) - f(x-u, y-v, z+w) + \\ & + f(x-u, y-v, z-w) - \varphi(x, y, z)| dudvdw = 0 \end{aligned}$$

implica

$$\begin{aligned} & \lim_{m, n, p \rightarrow \infty} (\sigma_{2m, n, 2p}^{(1, 3)} - \sigma_{2m, n, p}^{(1, 3)} - \sigma_{m, n, 2p}^{(1, 3)} = \sigma_{m, n, p}^{(1, 3)} = \\ & = \frac{1}{2} \left( \frac{\log 2}{\pi} \right)^2 \varphi(x, y, z) \end{aligned}$$

e anche

$$\lim_{m, n, p \rightarrow \infty} (\sigma_{2m, 2n, 2p}^{(1, 3)} - \sigma_{m, 2n, 2p}^{(1, 3)} - \sigma_{2m, n, 2p}^{(1, 3)} + \sigma_{m, n, 2p}^{(1, 3)} - \sigma_{2m, 2n, p}^{(1, 3)} + \\ + \sigma_{m, 2n, p}^{(1, 3)} + \sigma_{2m, n, p}^{(1, 3)} - \sigma_{m, n, p}^{(1, 3)}) = 0;$$

$$\lim_{u, v, w \rightarrow +0} \frac{1}{uvw} \int_0^u \int_0^v \int_0^w |f(x+u, y+v, z+w) + \\ + f(x+u, y+v, z-w) - f(x+u, y-v, z+w) - \\ - f(x+u, y-v, z-w) + f(x-u, y+v, z+w) + \\ + f(x-u, y+v, z-w) - f(x-u, y-v, z+w) - \\ - f(x-u, y-v, z-w) - \varphi(x, y, z)| dudvdw = 0$$

implica

$$\lim_{m, n, p \rightarrow \infty} (\sigma_{m, 2n, p}^{(2)} - \sigma_{m, n, p}^{(2)}) = \frac{1}{2^2} \frac{\log 2}{\pi} \varphi(x, y, z)$$

e quindi

$$\lim_{m, n, p \rightarrow \infty} (\sigma_{2m, 2n, 2p}^{(2)} - \sigma_{m, 2n, 2p}^{(2)} - \sigma_{2m, n, 2p}^{(2)} + \sigma_{m, n, 2p}^{(2)} - \sigma_{2m, 2n, p}^{(2)} + \\ + \sigma_{m, 2n, p}^{(2)} + \sigma_{2m, n, p}^{(2)} - \sigma_{m, n, p}^{(2)}) = 0.$$

Analoghi risultati sussistono per le altre serie coniugate (11).

**5.** - Le considerazioni dei nn. precedenti si possono estendere alle funzioni di un numero qualunque  $r$  di variabili.

Considerata la funzione  $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  periodica, di periodo  $2\pi$ , rispetto a ciascuna delle variabili e sommabile nel dominio rettangolare  $Q \equiv (0 \leq x_1 \leq 2\pi, 0 < x_2 \leq 2\pi, \dots, 0 < x_r \leq 2\pi)$ , si hanno  $2^r - 1$  serie coniugate della sua serie di Fourier e precisamente  $\binom{r}{1}$  coniugate prime,  $\binom{r}{2}$  coniugate seconde, ...,  $\binom{r}{r-1}$  coniugate  $(r-1)$ -esime,  $\binom{r}{r} = 1$  coniugata  $r$ -esima.

Per ogni serie coniugata  $k$ -esima ( $k = 1, 2, \dots, r$ ) di indici

$\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ , la somma algebrica delle  $2^k$  medie  $(C, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_r)$  aventi  $k$  degli indici  $m_1, m_2, \dots, m_r$  e i segni corrispondenti rispettivamente agli argomenti e ai segni della somma dei termini a cui dà origine il calcolo dell'integrale

$$\int_{m_{\nu_1}}^{2m_{\nu_1}} \int_{m_{\nu_2}}^{2m_{\nu_2}} \int_{m_{\nu_k}}^{2m_{\nu_k}} \frac{\partial^k \Psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)}{\partial \xi_1 \partial \xi_2 \dots \partial \xi_k} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_k,$$

ha per limite

$$\frac{1}{2^{r-k}} \left( \frac{\log 2}{\pi} \right)^k \varphi(x_1, x_2, \dots, x_r),$$

per  $m_1, m_2, \dots, m_r \rightarrow \infty$ , se: a)  $f(x_1, x_2, \dots, x_r)$  soddisfa alla condizione (L) in  $Q$ , b) per  $u_1, u_2, \dots, u_r \rightarrow +0$ , tende a zero

il prodotto di  $\frac{1}{u_1 u_2 \dots u_r}$  per l'integrale  $r$ -plo da 0 ad  $u_1$ , da 0 ad  $u_2, \dots$ , da 0 ad  $u_r$ , del valore assoluto della differenza tra la somma algebrica di  $2^k$  termini del tipo  $f(x_1 \pm u_1, x_2 \pm u_2, \dots, x_r \pm u_r)$ , corrispondenti alle  $2^k$  disposizioni con ripetizione dei segni  $+$ ,  $-$  a  $k$  a  $k$ , termini presi ciascuno col proprio segno o col segno cambiato secondochè è pari o dispari il numero dei segni  $-$  che figurano negli argomenti di indici  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ , e il numero  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_r)$ .