ETTORE BENTSIK

Su di un problema del tipo di quello della bussola giroscopica nel caso di un corpo rigido asimmetrico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 176-180

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__176_0>

SU DI UN PROBLEMA DEL TIPO DI QUELLO DELLA BUSSOLA GIROSCOPICA NEL CASO DI UN CORPO RIGIDO ASIMMETRICO

Nota (*) *di* ETTORE BENTSIK (*a Padova*)

In questo lavoro mi propongo di studiare il moto rispetto alla Terra di un corpo rigido qualunque, $\mathcal{C}$, soggetto alle forze centrifughe composte dovute alla rotazione terrestre, nell'ipotesi che una retta baricentrale, f, di $\mathcal{C}$ sia vincolata senza attrito a rimanere in un piano π solidale alla Terra e che il baricentro, G, di $\mathcal{C}$ sia fisso in π.

In generale non è possibile ridurre il problema alle quadrature, tuttavia ciò accade — come mostrerò — almeno quando il piano di vincolo è ortogonale all'asse terrestre. Comunque sia, in analogia a quanto accade nel caso giroscopico, mostrerò che — se $\mathcal{C}$ non è in quiete — f è in posizione di equilibrio solo se disposta secondo la parallela per G alla proiezione dell'asse terrestre su π.

Ma — se π ha giacitura generica — f deve coincidere con una delle due rette per G ortogonali ai piani ciclici dell'ellissoide centrale e la velocità angolare di $\mathcal{C}$ uguale in modulo al doppio di quella della rotazione terrestre.

Se invece π è parallelo all'asse terrestre, la f può essere una qualunque retta del corpo ma la velocità di rotazione rimane arbitraria solo se f coincide con un asse centrale.

(*) Pervenuta in Redazione il 4 giugno 1957.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

1. Premesse di carattere generale.

Per un qualunque corpo rigido $\mathcal{C}$ il momento rispetto ad un punto O delle forze centrifughe composte dovute alla rotazione terrestre è esprimibile nella forma [1])

$$\boldsymbol{M}_0^{(C)} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H} \tag{1}$$

ove $\boldsymbol{\omega}$ denota la velocità angolare di $\mathcal{C}$, σ l'omografia d'inerzia, rappresentata dalla matrice [2])

$$\sigma \equiv \left| \begin{matrix} A & 0 & -B' \\ 0 & B & -A' \\ -B' & -A' & C \end{matrix} \right| , \tag{2}$$

$\boldsymbol{H}$ la velocità della rotazione terrestre e si è posto

$$\lambda = A + B + C . \tag{3}$$

Nel moto di $\mathcal{C}$ relativo al baricentro il teorema del momento della quantità di moto si esprime nella forma

$$\frac{d\boldsymbol{K}_G}{dt} = \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}_G^{(V)} \tag{4}$$

ove $\boldsymbol{M}_G^{(V)}$ denota il momento risultante rispetto al baricentro delle reazioni vincolari ed evidentemente è

$$\boldsymbol{K}_G = \sigma\boldsymbol{\omega}. \tag{5}$$

Riferirò il solido a due terne con origine in G, una solidale [a cui è riferita la (2)] di versori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, con il terzo asse coincidente con la f e una fissa, di versori $\boldsymbol{c}_1$, $\boldsymbol{c}_2$, $\boldsymbol{c}_3$

---

[1]) GIUSEPPE GRIOLI, *Sul moto di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla.* Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, Volume XXVII, 1957, pag. 90.

[2]) Il significato dei simboli A, B, ecc., è abituale e si può sempre assumere la presupposta terna solidale in modo che uno dei tre momenti di deviazione, ad esempio C', risulti nullo.

con $\boldsymbol{c}_1$ ortogonale a π e $\boldsymbol{c}_3$ tale che il piano $G\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_3$ sia parallelo ad $\boldsymbol{H}$.

Con tale scelta dei sistemi di riferimento, in assenza di attrito, $\boldsymbol{M}_G^{(V)}$ risulta ortogonale a $\boldsymbol{c}_1$ e $\boldsymbol{k}$ e vale l'integrale dell'energia

$$\boldsymbol{K}_G \times \boldsymbol{\omega} = 2E_0 = \text{cost}, \tag{6}$$

mentre le equazioni differenziali del moto di $\mathcal{C}$, se espresse mediante gli angoli di Eulero φ, ψ, ϑ degli assi solidali rispetto a quelli fissi, si riducono in base a (4), a

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d\sigma\boldsymbol{\omega}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H}\right] \times \boldsymbol{c}_1 = 0, \\[2ex] \left[\dfrac{d\sigma\boldsymbol{\omega}}{dt} - \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H}\right] \times \boldsymbol{k} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

ove si tenga presente che il vincolo è espresso dall'uguaglianza

$$\psi \equiv 0. \tag{8}$$

2. Un caso di riducibilità alle quadrature.

Il problema posto nel numero precedente non è in generale riducibile alle quadrature. Mostrerò tuttavia come ciò invece accada almeno quando π è ortogonale ad $\boldsymbol{H}$, qualunque sia la retta f.

Comincio con l'osservazione che, in base alla condizione (di invariabilità di $\boldsymbol{c}_1$)

$$\dot{\boldsymbol{c}}_1 + \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{c}_1 = 0 \tag{9}$$

risulta (tenendo conto che l'omografia σ è una dilatazione)

$$\frac{d\boldsymbol{c}_1 \times \sigma\boldsymbol{c}_1}{dt} = \boldsymbol{c}_1 \times (\sigma\dot{\boldsymbol{c}}_1 + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma\boldsymbol{c}_1) = 2\dot{\boldsymbol{c}}_1 \times \sigma\boldsymbol{c}_1 . \tag{10}$$

Supposto

$$\boldsymbol{H} = H\boldsymbol{c}_1 \tag{11}$$

si ha

$$(12)\qquad \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{c}_1 = H\boldsymbol{c}_1 \wedge \boldsymbol{\omega} \times (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{c}_1$$

che, in base a (9) (10) si riduce a

$$(13)\qquad \boldsymbol{\omega} \wedge (\lambda - 2\sigma)\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{c}_1 = -2H\dot{\boldsymbol{c}}_1 \times \sigma\boldsymbol{c}_1 = -H\,\frac{d\boldsymbol{c}_1 \times \sigma\boldsymbol{c}_1}{dt},$$

Basta allora moltiplicare scalarmente la (4) per $\boldsymbol{c}_1$ per ottenere, in base a (5), (13) e all'ortogonalità di $\boldsymbol{M}_G^{(V)}$ con $\boldsymbol{c}_1$, l'integrale primo

$$(14)\qquad \sigma\boldsymbol{c}_1 \times (\boldsymbol{\omega} + H\boldsymbol{c}_1) = h = \text{cost.}$$

I due integrali primi (6), (14) permettono di ridurre il problema alle quadrature.

Essi, tenuto conto di (8), si esplicitano in

$$(15)\qquad A\dot{\vartheta}^2 \cos^2\varphi + B\dot{\vartheta}^2 \sin^2\varphi + C\dot{\varphi}^2 + 2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}(A' \sin\varphi - B' \cos\varphi) = 2E,$$

$$(16)\qquad (A \cos^2\varphi + B \sin^2\varphi)(\dot{\vartheta} + H) + (A' \sin\varphi - B' \cos\varphi)\dot{\varphi} \quad h$$

Basta ricavare $\dot{\vartheta}$ da (16) e introdurlo nella (15) per raggiungere lo scopo.

3. Un tipo di movimento analogo a quello della bussola giroscopica.

Determinerò tutte le soluzioni per le quali la retta f rimane invariabile in π.

In esse $\boldsymbol{\omega}$ risulta parallelo a $\boldsymbol{k}$ e dalla invariabilità della forza viva di $\mathcal{C}$ segue la costanza del modulo di $\boldsymbol{\omega}$. Trattasi quindi di rotazioni uniformi e si può porre

$$(17)\qquad \boldsymbol{\omega} = r_0\boldsymbol{k}.$$

Ne segue

$$(18)\qquad \frac{d\sigma\boldsymbol{\omega}}{dt} = r_0\frac{d\sigma\boldsymbol{k}}{dt} = r_0^2\boldsymbol{k} \wedge \sigma\boldsymbol{k}$$

e si constata che le (7) si riducono all'unica equazione

$$(19)\qquad \boldsymbol{c}_1 \times \boldsymbol{k} \wedge [r_0\sigma\boldsymbol{k} + (2\sigma - \lambda)\boldsymbol{H}] = 0$$

che può scriversi

$$(r_0\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{H}) \times \sigma(\boldsymbol{c}_1 \wedge \boldsymbol{k}) - \lambda\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{c}_1 \wedge \boldsymbol{k} = 0. \tag{20}$$

In base a (8) risulta

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_1 &= \cos\varphi\boldsymbol{i} - \sin\varphi\boldsymbol{j}\,; \\ \boldsymbol{c}_3 &= \sin\vartheta(\sin\varphi\boldsymbol{i} + \cos\varphi\boldsymbol{j}) + \cos\vartheta\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{21}$$

Tenuto conto di

$$\boldsymbol{H} = H'\boldsymbol{c}_1 + H'''\boldsymbol{c}_3 \tag{22}$$

e di (2), (3), (8), (21), la (20) si esplicita nell'uguaglianza

$$\begin{gathered} 2(B - A)(H'\sin\varphi\cos\varphi - H'''\sin\vartheta\cos^2\varphi) + \\ + (r_0 + 2H'''\cos\vartheta)(A'\cos\varphi + B'\sin\varphi) + \\ + (B + C - A)H'''\sin\vartheta = 0 \end{gathered} \tag{23}$$

che deve essere identicamente verificata rispetto a φ.

Si presentano quindi i seguenti casi possibili:

a) $B - A = 0$, $A' = B' = 0$, $H''' = 0$,

b) $B - A = 0$, $A' = B' = 0$, $\sin\vartheta = 0$,

c) $B - A = 0$, $\sin\vartheta = 0$, $r_0 = \mp 2H'''$,

d) $A' = B' = 0$, $\sin\vartheta = 0$, $H' = 0$,

e) $\sin\vartheta = 0$, $r_0 = \mp 2H'''$, $H' = 0$,

dei quali i primi due corrispondono al ben noto caso della bussola giroscopica.

Negli altri casi si riconosce che la retta f deve essere — come nel caso giroscopico — parallela alla proiezione dell'asse terrestre su π.

In particolare [caso c)], *se π ha giacitura qualsiasi occorre che f coincida con una delle due rette per G ortogonali ai piani ciclici e che la velocità angolare abbia modulo uguale al doppio di quella della rotazione terrestre.* Invece *se π è parallelo all'asse terrestre, r_0 può avere qualsiasi valore allora e soltanto allora che la f coincide con uno degli assi centrali d'inerzia* [caso d)].