RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

AUGUST FLORIAN

Ungleichungen über Sternpolyeder

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 16-26

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__16_0>

UNGLEICHUNGEN ÜBER STERNPOLYEDER

Nota (*) *di* AUGUST FLORIAN (*a Graz*)

Vor einigen Jahren sprach L. Fejes Tóth folgende Vermutung aus und deutete hiefür einen Beweisgang an [1] [2]: Ein konvexes Polyeder mit e Ecken, f Flächen und k Kanten sei in der Einheitskugel $\mathfrak{K}$ enthalten. Dann gilt für sein Volumen

$$V \leq \frac{2k}{3} \cos^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg} \frac{\pi e}{2k} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi e}{2k}\right) \tag{1}$$

und Gleichheit besteht darin nur für die fünf regulären Polyeder, die $\mathfrak{K}$ einbeschrieben sind. Damit sind also diese Körper durch eine einzige Extremaleigenschaft gleichzeitig gekennzeichnet.

Den exakten Beweis für (1) habe ich vor einiger Zeit veröffentlicht [3]. Fejes Tóth gab mehrere Beweise der (1) entsprechenden Ungleichung

$$V' \geq \frac{k}{3} \sin \frac{\pi f}{k} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi e}{2k} - 1\right) \tag{2}$$

für ein $\mathfrak{K}$ enthaltendes konvexes Polyeder [1] [2] [4]. Kürzlich

---

(*) Pervenuta in Redazione il 22 febbraio 1957.

Indirizzo dell'A.: Mathematisches Institut, Technische Hochschule, Graz (Austria).

[1]) Canadian J. Math. 2, 22 (1950).

[2]) L. FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum;* Springer-Verlag, Berlin, 1953, S. 128 ff.

[3]) Monatsh. f. Math. 60, 130 (1956).

[4]) Amer. J. Math. 70, 174 (1948).

erweiterte er diese Ungleichung auf Sternpolyeder [5]). Fejes Tóth nennt ein Sternpolyeder der Einheitskugel umbeschrieben, wenn jede Polyederfläche die Einheitskugel berührt und Sternpolygon bezüglich des Berührungspunktes ist. Projiziert man die Flächen aus dem Kugelmittelpunkt auf die Kugelfläche, so erhält man ein sphärisches Sternmosaik; e sei die Summe der Dichten der Eckpunktfiguren, f die Summe der Flächendichten und k die Anzahl der Kanten des Mosaiks. Diese drei Zahlen sind durch die verallgemeinerte Eulersche Polyederformel

$$e + f - k = 2\delta \tag{3}$$

verbunden, wobei δ die Dichte des Mosaiks ist. Damit lautet das Ergebnis von Fejes Tóth:

Für die Oberfläche F' eines der Einheitskugel umbeschriebenen Sternpolyeders gilt

$$F' \geq k \sin\frac{\pi f}{k}\left(\operatorname{tg}^2\frac{\pi f}{2k}\operatorname{tg}^2\frac{\pi e}{2k} - 1\right) \tag{4}$$

und Gleichheit besteht nur für die neun regulären Polyeder [6]). Der Beweis beruht auf einem allgemeinen Satz für ein sphärisches Sternmosaik. Aus (4) folgt wegen $F' = 3V'$ die Ungleichung für das Volumen, von der (2) den Spezialfall konvexer Polyeder beinhaltet.

Wir wollen hier analoge Abschätzungen für ein in der Einheitskugel liegendes Sternpolyeder mit den in [3]) verwendeten Methoden ableiten.

1. - $\mathfrak{P}$ sei ein Sternpolyeder bezüglich des Mittelpunktes O der Einheitskugel $\mathfrak{K}$. Die Eckpunkte von $\mathfrak{P}$ sollen in $\mathfrak{K}$ liegen und jede Polyederfläche sei Sternpolygon bezüglich des Fußpunktes M der Senkrechten von O auf die Ebene der Polyederfläche, was wir kurz als «Fußpunkteigenschaft» bezeichnen wollen.

[5]) Acta Math. Acad. Sc. Hung. Tom. VII, fasc. I, 1956. Auf diese Arbeit sei auch wegen der hier verwendeten Begriffe verwiesen.

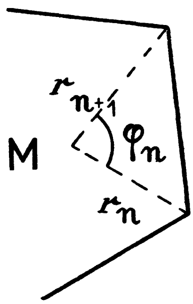
[6]) Eine ausführliche Beschreibung der vier regulären, nicht konvexen (sog. Kepler-Poinsot'schen) Sternpolyeder findet man etwa in H. S. M. COXETER, *Regular polytopes*, Methuen & Co. Ltd., London, 1948.

Den Inhalt einer Polyederfläche, die ein p-Eck der Dichte d $(p > 2d)$ sei, bezeichnen wir mit t, ihren Abstand von O mit h und ihre Projektion aus O auf die Kugelfläche mit τ.

Wir wollen zunächst die Oberfläche des Polyeders

$$F = \Sigma\, t(\tau, p, d) \tag{5}$$

nach oben abschätzen, was in zwei Schritten geschieht: In (5) ist jeder Summand für sich und hierauf die ganze Summe abzuschätzen. Für t und τ ergibt sich (Abb. 1)



$$t = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{p} r_n r_{n+1} \sin \varphi_n, \quad \sum_{n=1}^{p} \varphi_n = 2\pi d \tag{6}$$

$$\tau_n = \varphi_n - \pi + 2 \operatorname{arc\,tg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi_n}{2} \, \frac{r_n \sqrt{h^2 + r_{n+1}^2} + r_{n+1} \sqrt{h^2 + r_n^2}}{h(r_n + r_{n+1})} \right)$$

$$0 < \tau = \sum_{n=1}^{p} \tau_n < 2\pi d, \tag{6'}$$

wobei die Formel

$$\operatorname{tg} \frac{\beta + \gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \, \frac{\sin b + \sin c}{\sin (b + c)}$$

für ein sphärisches Dreieck benützt wurde.

Es sei

$$g(h) = \frac{r_n \sqrt{h^2 + r_{n+1}^2} + r_{n+1} \sqrt{h^2 + r_n^2}}{h(r_n + r_{n+1})} \tag{7}$$

mit $0 < r_n, r_{n+1}, h$ und $\sqrt{h^2 + r_n^2}, \sqrt{h^2 + r_{n+1}^2} \leq 1$. Wir beweisen, daß

$$g(h) \geq \frac{1}{\sqrt{1 - r_n r_{n+1}}}$$

ist und daß Gleichheit nur für $r_n = r_{n+1} = \sqrt{1-h^2}$ besteht. Man bestätigt nämlich sofort $g'(h) < 0$ und somit $g(h) \geq g(\sqrt{1-r_n^2})$. Nehmen wir etwa $r_n \geq r_{n+1}$ an. Eine elementare Rechnung, die wir übergehen können, zeigt, daß dann

$$g(\sqrt{1-r_n^2}) \geq \frac{1}{\sqrt{1-r_n r_{n+1}}}$$

ist und das Gleichheitszeichen nur für $r_n = r_{n+1}$ gilt. Daraus ergibt sich die Behauptung.

Berücksichtgt man (6′) und (7), so folgt aus der eben bewiesenen Ungleichung

$$r_n r_{n+1} \leq 1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi_n}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_n - \tau_n}{2} .$$

Setzt man noch

$$\varphi_n = \pi - 2u_n , \quad \varphi_n - \tau_n = 2v_n , \tag{8}$$

so ergibt sich nach (6)

$$t \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{p} \sin 2u_n (1 - \operatorname{tg}^2 u_n \operatorname{tg}^2 v_n), \tag{9}$$

wobei wegen $0 < \tau_n < \varphi_n < \pi$

$$0 < u_n , \ v_n ; \ u_n + v_n < \frac{\pi}{2} \tag{10}$$

ist. Da

$$\sin 2u (1 - \operatorname{tg}^2 u \operatorname{tg}^2 v)$$

in dem durch (10) gegebenen Dreieck streng konkav ist[2]) (S. 125), folgt aus (9) mittels der Jensenschen Ungleichung, wenn man (8) und $\sum_{n=1}^{p} \varphi_n = 2\pi d$, $\sum_{n=1}^{p} \tau_n = \tau$ beachtet,

$$\begin{aligned} t(\tau, p, d) &\leq \frac{p}{2} \sin \frac{2\pi d}{p} \left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi d}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi d - \tau}{2p}\right) = \\ &= F_1(\tau, p, d) = dF\left(\frac{\tau}{d}, \frac{p}{d}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

mit

$$(11') \qquad F(\tau, p) = \frac{p}{2} \sin \frac{2\pi}{p}\left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi - \tau}{2p}\right).$$

Gleichheit gilt in (11) offenbar nur für ein der Kugel einbeschriebenes reguläres p-Eck der Dichte d. Wesentliche Voraussetzung für die damit ausgedrückte Extremaleigenschaft der regulären Sternpolygone ist die erwähnte Fußpunkteigenschaft.

Es wurde bereits früher gezeigt, daß $F(\tau, p)$ im Streifen $0 < \tau < 2\pi$, $p > 2$ streng konkav ist[3]). Damit ergibt sich nach (5), (11), (11′), indem man nochmals die Jensensche Ungleichung für konkave Funktionen heranzieht,

$$(12) \qquad F = \Sigma\, t(\tau, p, d) \leq \Sigma\, dF\left(\frac{\tau}{d}, \frac{p}{d}\right) \leq fF\left(\frac{4\pi\delta}{f}, \frac{2k}{f}\right).$$

Dabei hat man zu beachten, daß $\Sigma\, d = f$, $\Sigma\, p = 2k$, $\Sigma\, \tau = 4\pi\delta$ ist. Wegen (3) gilt somit

$$(13) \qquad F \leq k \sin \frac{\pi f}{k}\left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi f}{2k} \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi f}{2k}\right)$$

und Gleichheit besteht nur, wenn die Eckpunkte auf der Kugel liegen, die Polyederflächen regulär sind und $\frac{p_1}{d_1} = \frac{p_2}{d_2} = \dots$ sowie $\frac{\tau_1}{d_1} = \frac{\tau_2}{d_2} = \dots$ ist. Daraus folgt aber, daß das durch Projektion aus O auf die Kugelfläche entstehende Sternmosaik und damit auch das Polyeder regulär ist, falls für alle Flächen $(p, d) = 1$ gilt. Ist die letzte Bedingung nicht erfüllt, so handelt es sich um ein mehrfach überdecktes reguläres Sternpolyeder.

(13) wurde im Spezialfall konvexer Polyeder von Fejes Tóth bewiesen[2]) (S. 155). Die entsprechende Ungleichung (4) für umbeschriebene Polyeder kann man auf analoge Art gewinnen.

2. - Wir wenden uns nun der Frage nach dem Volumen zu, wobei zunächst wie in 1. die Fußpunkteigenschaft gelten soll. Das Volumen des Sternpolyeders ist als Summe der Inhalte der Pyramiden definiert, deren Grundflächen die Polyederflächen sind und deren gemeinsame Spitze im Kugelmittelpunkt O liegt:

$$V = \Sigma\, v(\tau,\ p,\ d). \tag{14}$$

Es läßt sich, ebenso wie t in (11), auch die Höhe h jeder einzelnen Pyramide abschätzen. Aus (6') folgt nämlich

$$\tau \leq 2\pi d - 2 \sum_{n=1}^{p} \operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2}\right),$$

und wegen der Konvexität von $f(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$ in $0 < x < \pi$ ist

$$\sum_{n=1}^{p} \operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg} \frac{\varphi_n}{2}\right) \geq p \operatorname{arc\,tg}\left(h \operatorname{tg} \frac{\pi d}{p}\right),$$

also

$$h \leq \operatorname{ctg} \frac{\pi d}{p} \operatorname{tg} \frac{2\pi d - \tau}{2p} = H_1(\tau,\ p,\ d) \tag{15}$$

$H_1(\tau,\ p,\ d)$ ist die Höhe der zu τ, p, d gehörigen regulären Pyramide, deren Basiseckpunkte auf der Kugel liegen.

Nimmt man (11) hinzu, so folgt für das Volumen v der Pyramide

$$v = \frac{1}{3} th \leq U_1(\tau,\ p,\ d) = dU\left(\frac{\tau}{d},\ \frac{p}{d}\right), \tag{16}$$

wobei

$$U(\tau,\ p) = \frac{p}{3} \cos^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg} \frac{2\pi - \tau}{2p}\left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{p} \operatorname{tg}^2 \frac{2\pi - \tau}{2p}\right) \tag{16'}$$

ist. Gleichheit gilt unter denselben Bedingungen wie in (11) und (15).

Die Funktion $U(\tau,\ p)$ ist konkav im Streifen $0 < \tau \leq \pi$, $p \geq 3$, jedoch nicht im ganzen Streifen $0 < \tau < 2\pi$ [2]) S. 129), [3]). Somit folgt für das Volumen des Polyeders nach demselben Schluß wie in (12)

$$V = \Sigma\, v(\tau,\ p,\ d) \leq \Sigma\, dU\left(\frac{\tau}{d},\ \frac{p}{d}\right) \leq fU\left(\frac{4\pi\delta}{f},\ \frac{2k}{f}\right). \tag{17}$$

Dies ist die Verallgemeinerung der Ungleichung (1); sie hat die gleiche Form, jedoch besitzen e, f und k die Bedeutung dieser Größen für Sternpolyeder. Gleichheit besteht wieder nur für die der Kugel einbeschriebenen neun regulären Sternpolyeder.

$U(\tau, p)$ hat folgende Eigenschaften [2]) (l.c.), [3]):

$$U(\tau, p) \leq U(\pi, p) \qquad [\tau \geq \pi,\ p > 2], \tag{18}$$

$$U(\tau_1, p) \leq U(\tau_2, p) \tag{18'}$$

für

$$0 \leq \tau_1 \leq \tau_2, \ \operatorname{tg}\frac{\pi}{p}\operatorname{ctg}\frac{2\pi - \tau_2}{2p} \leq \sqrt{3}.$$

Der Umstand, daß $U(\tau, p)$ nur für $0 < \tau \leq \pi$, aber nicht in $0 < \tau < 2\pi$ konkav ist, führt, wenn man von (18), (18') Gebrauch macht, beim Beweis von (17) ähnlich wie in [3]) auf die Einschränkung

$$\operatorname{tg}\frac{\pi e}{2k}\operatorname{tg}\frac{\pi f}{2k} \leq \sqrt{3}. \tag{19}$$

Sie ist z.B. erfüllt, wenn die Anzahl der Polyederflächen oder die Anzahl der Ecken $\geq 8\delta$ ist. Man überlegt in Einzelfällen, in denen (19) nicht zu gelten braucht, daß (17) trotzdem erfüllt ist, z.B. wenn $\frac{p_1}{p_1} = \frac{p_2}{d_2} = \ldots$ ist; denn $U(\tau, p)$ ist bei konstantem p eine konkave Funktion von τ in $0 < \tau < 2\pi$. Die Bedingung (19) ist deshalb für die Gültigkeit von (17) höchst wahrscheinlich belanglos.

Da schließlich beim Beweis der Konkavität von $U(\tau, p)$ wesentlich die Voraussetzung $p \geq 3$ verwendet wurde, für ein Sternpolygon jedoch nur $\frac{p}{d} > 2$ gilt, bleibt noch dieser Punkt zu klären. Zu dem Zweck zeigen wir zuerst: $U(\tau, p)$ ist konkav in $2 < p \leq 3$, $0 < \tau \leq (p-2)\pi$.

Beweis: Es sei

$$u = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{p}, \quad v = \frac{2\pi - \tau}{2p}.$$

Dann ist $U(\tau, p)$ konkav, wenn

$$A \equiv 9 \operatorname{tg}^4 u \operatorname{tg}^2 v + 6 \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v > 1,$$

$$B \equiv 3 \operatorname{tg}^2 u(1 + 2 \operatorname{tg}^2 v) > 1$$

ist [3]). Aus der Voraussetzung über p und τ folgt

$$0 < u \leq \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{2} - 2u \leq v < \frac{\pi}{2} - u$$

und daraus

$$6 \operatorname{tg} u \operatorname{tg} v \geq 6 \operatorname{tg} u \operatorname{ctg} 2u = 3(1 - \operatorname{tg}^2 u) \geq 2$$

also $A > 1$. Weiter ergibt sich

$$3 \operatorname{tg}^2 u(1 + 2 \operatorname{tg}^2 v) \geq \frac{3}{2}(1 + \operatorname{tg}^4 u) > \frac{3}{2}$$

und daher auch $B > 1$, wie behauptet. Man sieht, daß $U(\tau, p)$ nicht im ganzen Rechteck $2 < p \leq 3$, $0 < \tau \leq \pi$ konkav ist, weshalb (18) hier nicht ausreicht. Es gilt aber für $2 < p \leq 3$, $(p - 2)\pi < \tau < 2\pi$

$$U(\tau, p) < U((p - 2)\pi, p).$$

Denn es ist in diesem Fall

$$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{p} \operatorname{tg}\frac{2\pi - \tau}{2p} < \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{p}\right) < \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und die Funktion $x(1 - x^2)$ nimmt in $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ monoton zu.

Treten in

$$\Sigma\, dU\left(\frac{\tau}{d}, \frac{p}{d}\right).$$

Summanden mit $2 < \dfrac{p}{d} \leq 3$, $\left(\dfrac{p}{d} - 2\right)\pi < \dfrac{\tau}{d} < 2\pi$ auf, so ersetzen wir jedes solche τ durch $\tau' = (p - 2d)\pi$, während wir die übrigen τ unverändert lassen ($\tau = \tau'$). Dadurch wird die zuletzt angeschriebene Summe vergrößert und es ist $\Sigma\, \tau' \leq \Sigma\, \tau = 4\pi\delta$. Die Ungleichung (18′) führt dann wieder auf (17), sofern die Nebendedingung (19) erfüllt ist.

3. - Es ergibt sich nun die Frage, ob in den bisher abgeleiteten Abschätzungen die erwähnte Fußpunkteigenschaft weggelassen werden kann, d.h. ob (11) und (16) für beliebige Stern-p-Ecke der Projektion τ gelten. Wir wollen uns im Folgenden auf Polygone beschränken, deren Eckpunkte auf der Kugel liegen; für konvexe Polygone genügt es, diesen Fall zu betrachten [3]).

Die Gesamtheit der Pole eines Sternpolygons erfüllt das Innere eines konvexen Polygons, das man als Kern des Sternpolygons bezeichnet. Die bisher vorausgesetzte Fußpunkteigenschaft bedeutet also, daß der Fußpunkt M im Inneren des Kernes der zugehörigen Polyederfläche liegen soll.

Liegt M auf dem Rande des Kernes, so werden gewisse Winkel $\varphi_n = \pi$. Ihre Anzahl sei a; die übrigen φ_n sind $< \pi$. Da ein vom Pol aus gezogener Halbstrahl das Sternpolygon in d Punkten schneidet, ist $a \leq d$. Die Beweise von (11), (15) und (16) ergeben dann mit geringer Modifikation die Verschärfungen (vgl. [3]))

$$(20) \qquad t \leq F_1\left(\tau,\ p-a,\ \frac{2d-a}{2}\right) < F_1(\tau,\ p,\ d)$$

$$(20') \qquad h \leq H_1\left(\tau,\ p-a,\ \frac{2d-a}{2}\right) < H_1(\tau,\ p,\ d)$$

$$(21) \qquad v \leq U_1\left(\tau,\ p-a,\ \frac{2d-a}{2}\right) < U_1(\tau,\ p,\ d),$$

worin $0 < \tau < (2d-a)\pi$ ist. In den ersten Ungleichungen besteht genau dann Gleichheit, wenn die p-a Winkel φ_n mit $0 < \varphi_n < \pi$ untereinander gleich sind.

Um den zweiten Teil der Ungleichung (20) einzusehen, erweitern wir die Definition von F [3])

$$F(\tau,\ p) = \frac{p}{2}\sin\frac{2\pi}{p}\left(1 - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{p}\operatorname{tg}^2\frac{2\pi-\tau}{2p}\right) \quad [p > 2,\ 0 \leq \tau \leq 2\pi]$$

$$F(\tau,\ 2) = 0 \qquad [0 \leq \tau \leq 2\pi].$$

$F(\tau,\ p)$ ist konkav in jedem Rechteck $0 \leq \tau \leq 2\pi,\ 2 \leq p \leq p_0$.

Es sei $0 \leq a' < a \leq d$; aus der Jensenschen Ungleichung

$$\frac{a-a'}{2}F(0,\ 2)+\frac{2d-a}{2}F\left(\frac{2\tau}{2\ -a},\ \frac{2(p-a)}{2d-a}\right)<$$
$$<\frac{2d-a'}{2}F\left(\frac{2\tau}{2d-a'},\ \frac{2(p-a')}{2d-a'}\right)$$

und (11) folgt, daß

$$F_1\left(\tau,\ p-a,\ \frac{2d-a}{2}\right)<F_1\left(\tau,\ p-a',\ \frac{2d-a'}{2}\right) \tag{22}$$

ist; für $a'=0$ erhält man die Behauptung.

Die Ableitung von

$$H_1\left(\tau,\ p-a,\ \frac{2d-a}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi(2d-a)}{2(p-a)}\operatorname{tg}\frac{\pi(2d-a)-\tau}{2(p-a)}$$

nach a hat das Vorzeichen von

$$Z=\pi(p-2d)\sin\frac{\pi(2d-a)-\tau}{p-a}-[(p-2d)\pi+\tau]\sin\frac{\pi(2d-a)}{p-a}.$$

Die zweite Ableitung dieses Ausdruckes nach τ ist ersichtlich <0, die erste Ableitung hat für $\tau=0$ den Wert

$$-\left(\pi-\frac{\pi(2d-a)}{p-a}\right)\cos\frac{\pi(2d-a)}{p-a}-\sin\frac{\pi(2d-a)}{p-a}<0.$$

Daher ist die erste Ableitung nach τ stets <0; wegen $Z(\tau=0)=0$ ist somit $Z<0$ für $0<\tau<\pi(2d-a)$ und damit auch

$$\frac{\partial}{\partial a}H_1\left(\tau,\ p-a,\ \frac{2d-a}{2}\right)<0, \tag{23}$$

womit der zweite Teil von (20′) gezeigt ist. Der zweite Teil von (21) folgt daraus wegen $U_1=\frac{1}{3}F_1H_1$.

Betrachten wir nunmehr den dritten Fall, nämlich daß der Fußpunkt M außerhalb des Kernes liegt. Es zeigt sich, daß sogar für konvexe Polygone die Ungleichung (11) für den Flächeninhalt nicht mehr allgemein richtig ist[3], wie auch Fejes Tóth bemerkt [2]) (S. 155). Das darin ausgedrückte Maximum des Flächeninhaltes ist deshalb im allgemeinen nur ein relatives. Aus diesem Grund bietet der vollständige Beweis von (13) noch ungelöste Schwierigkeiten. Beim Volumproblem ist es somit nötig, nicht t und h getrennt, wie bisher, sondern direkt v abzuschätzen. Für konvexe Polygone ergibt sich, daß (16) und sogar die Verschärfung (21) auch in diesem Fall gültig sind [3]). Handelt es sich allgemeiner um ein Sternpolygon und bezeichnet a die Anzahl der Winkel $\varphi_n \geq \pi$ ($a > 0$, da M nicht im Kern liegt), so darf man vermuten, daß (21) auch dann noch gilt. Jedoch scheint der Beweis ziemlich schwierig zu sein. Trifft die Vermutung zu, so wäre damit der Nachweis von (17) für Sternpolyeder erbracht, deren Eckpunkte auf der Einheitskugel liegen, wenn man von der Einschränkung (19) absieht.

Herrn Prof. Dr. L. Fejes Tóth bin ich für die Anregung zur vorliegenden Arbeit zu aufrichtigem Dank verpflichtet.