RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE COLOMBO

Sulle oscillazioni non-lineari di combinazione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 162-175

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__162_0>

SULLE OSCILLAZIONI NON-LINEARI DI COMBINAZIONE

Nota (*) *di* GIUSEPPE COLOMBO (*a Catania*)

Il fenomeno della risonanza nel campo delle vibrazioni non-lineari è stato oggetto di studi notevoli nell'ultimo decennio. Alcuni suoi aspetti interessanti ed in un certo senso sorprendenti si lasciano inquadrare in schemi abbastanza chiari, se pure molto complicati, solo nel caso delle debole non-linearità ove i numerosi metodi di approssimazione portano a risultati concreti di una certa importanza [1]). In genere si studiano equazioni del tipo

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(t, x, \dot{x}, \varepsilon), \tag{1}$$

supponendo la f periodica in t di periodo T poco diverso da un multiplo di 2π e si studiano i casi di risonanza semplice e risonanza sottoarmonica. Esistono dei criteri generali per determinare l'esistenza delle soluzioni periodiche di (1) di periodo T o di periodo nT e per studiare la loro stabilità; il problema come è ben noto si riduce a quello di analizzare certe trasformazioni piane associate all'equazione (1) e i punti uniti in queste trasformazioni.

(*) Pervenuta in Redazione il 27 maggio 1957.
Indirizzo dell'A., Istituto matematico, Università, Catania.

[1]) Si veda l'articolo di ALBERT I. BELLIN, *Non-autonomous systems*, della raccolta *Advances in Appleid Mechanics*, edito da R. Von Mises e T. Von Karman nel 1953. (Ac. Press. Inc. Publ. N. Y.), vol. III, p. 295-320, che contiene una bibliografia abbastanza completa sull'argomento.

Si consideri l'equazione

$$\ddot{x} + x - E \operatorname{sen} \omega t = \varepsilon f(t, x, \dot{x}, \varepsilon) \tag{2}$$

con f periodica di periodo $2\pi/\omega$ in t; questa equazione naturalmente può ridursi ad una del tipo (1). Infatti con la sostituzione

$$x = \frac{E}{1 - \omega^2} \operatorname{sen} \omega t + x_1 \tag{3}$$

la (2) si riduce a

$$\ddot{x}_1 + x_1 = \varepsilon F(t, x_1, \dot{x}_1, \varepsilon)$$

ove F è ancora periodica di periodo $2\pi/\omega$.

Volendo giungere a risultati concreti, anche lasciando completa generalità all'equazione e quindi ponendoci al di fuori del caso di risonanza armonica o sottoarmonica, ci rifaremo direttamente alla equazione (2) ove si suppone semplicemente che ω sia diverso da 1, che la $f(t, x, x, \varepsilon)$ sia continua con le derivate rispetto ad x e x ed infine che risulti limitata in modulo da un numero $M(a, b)$ indipendente da t e da ε per ogni $|x| < a$, $|y| < b$ ed $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Naturalmente in queste ipotesi di larga generalità non ha più senso il problema della ricerca di soluzioni periodiche di 2), che, tra l'altro possono anche non esistere, ma si può porre un altro problema più generale. Si consideri l'equazione lineare

$$\ddot{x} + x - E \operatorname{sen} \omega t = 0 \tag{2'}$$

e la famiglia S_0 delle ∞^1 soluzioni ottenute da

$$x = A \cos (t + \theta) + \frac{E}{1 - \omega^{-}} \operatorname{sen} \omega t \tag{5}$$

per un fissato valore di A al variare di θ

Nello spazio $x, \dot{x}, t$ le traiettorie corrispondenti alle soluzioni S_0 stanno su una superficie Σ_0 che esse coprono, generata da una circonferenza di raggio A, che si muove mantenendosi su un piano parallelo al piano $x, \dot{x}$ ed il cui centro descrive la linea di equazioni

$$(6) \qquad x = \frac{E}{1-\omega^2} \operatorname{sen} \omega t \quad , \quad \dot{x} = \frac{E\omega}{1-\omega^2} \cos \omega t, \qquad t \geq 0.$$

Ad ogni valore di A corrisponde naturalmente una di tali superficie. Il problema che si pone come naturale è la ricerca di classi S di soluzioni delle 2) che coprono superficie Σ dello stesso tipo e che risultino stabili, rispetto almeno alle soluzioni corrispondenti a valori iniziali prossime a quelle relative alle soluzioni di S.

Anche relativamente a questo problema non mi sembra facile poter pervenire a risultati concreti almeno finchè non si particolarizza l'equazione o non si aggiungono ipotesi più restrittive. Si possono invece stabilire risultati di un certo interesse applicativo ed in un certo senso equivalenti dal punto di vista pratico, rimanendo nel caso generale, nel modo che segue. Per questo si indichi con I_{Σ_0} la regione dello spazio x, $\dot{x}$, t così definita: In ogni piano $t = \text{cost} \geq 0$, si consideri il cerchio $C(t)$ di raggio A, intersezione di Σ_0 con detto piano, e un intorno $I_{C(t)}$, regione del piano $t = \text{cost}$ del tipo della corona circolare, delimitata da due curve C', C'', semplici chiuse, l'una C' contenente nel suo interno C e l'altra C'' contenente nel suo interno il centro di C e contenute nello stesso cerchio. Se per ogni t si costruisce un $I_{C(t)}$, facendo variare con continuità le curve C' e C'' queste generano la frontiera di un intorno I_{Σ_0} di Σ_0. Indichiamo inoltre con $\delta(I_{C(t)})$ il massimo dei segmenti appartenenti alle semirette uscenti dal centro di $C(t)$ ed i cui estremi sono punti di C' e C'' e con $\delta(I_{\Sigma_0})$ il massimo dei $\delta(I_{C(t)})$ al variare di t da 0 a $+\infty$.

Daremo in questo lavoro un criterio per determinare quelle superficie Σ_0 relativamente alle quali è possibile costruire un I_{Σ_0}, il cui $\delta(I_{\Sigma_0})$ è finito e tende a zero con ε, tale che la generica soluzione di 2) uscente da un punto P della regione $I_{C(0)}$, non esce per qualunque t da I_{Σ_0}.

Dal punto di vista applicativo possiamo dire di avere così dato un metodo atto a determinare, in prima approssimazione, l'ampiezza della componente armonica propria dell'oscillazione di combinazione, componente armonica che risulta conseguente alla autoeccitazione propria o parametrica del sistema non forzato, combinata con l'azione della sollecitazione forzante.

Come esempi tipici possono essere dati questi due: l'oscillatore, ormai classico, di Van der Pol forzato quando non si trova, in condizioni di risonanza (caso di grande « detuning ») [2]) o un oscillatore, che mi risulta di tipo nuovo, il cui moto è retto da una equazione del tipo:

$$\ddot{x} + x - E \operatorname{sen} \omega t = \varepsilon \{ - (\alpha_1 \dot{q} + \beta_1 \dot{q}^3) - \tag{7}$$
$$- \alpha_2 [\dot{q} - a \operatorname{sen} (\omega t + \psi)] - \beta_2 [\dot{q} - a \operatorname{sen} (\omega t + \psi)]^3 \},$$

e sul quale mi tratterrò più diffusamente in una nota a parte per l'interesse che mi pare presenti. Il moto di questi sistemi è, per ε sufficientemente piccolo, un moto del tipo 5) ed il problema che si presenta più naturale è quello di determinare l'ampiezza stazionaria del componente armonico proprio, problema che qui affronteremo in un caso di maggior generalità di quelle che non presentino gli esempi citati.

Finisco osservando che il metodo si può applicare anche, opportunamente modificato, a sistemi autonomi in due gradi di libertà dei quali però qui non tratteremo riservandoci di farlo, se sarà il caso, in seguito.

1. - Consideriamo dunque l'equazione (2) nella ipotesi che il secondo membro soddisfi alle condizioni esplicitamente dichiarate e considerata la soluzione (unica) di (2) soddisfacente alle condizioni iniziali

$$x(0) = A \cos \theta \quad , \quad \dot{x}(0) = - A \operatorname{sen} \theta + \frac{E\omega}{1 - \omega^2}, \tag{8}$$

la scriviamo, come è sempre possibile fare, nella forma

$$x = A \cos (t + \theta) + \frac{E}{1 - \omega^2} \operatorname{sen} \omega t + \varepsilon \varphi(t, A, \theta) + \tag{9}$$
$$+ \varepsilon^2 \psi(t, A, \theta, \varepsilon),$$

---

2) Cfr. J. J. STOKER, *Non-linear vibrations*, Int. Publ. Inc., 1950, p. 182 e seg.

ove si intende

$$(10) \qquad \varphi(t,\ A,\ \theta) = \int_0^t f(x_0(\tau),\ \dot{x}_0(\tau),\ \tau) \operatorname{sen}(t - \tau) d\tau,$$

con

$$(11) \qquad x_0(\tau) = A \cos(\tau + \theta) + \frac{E}{1 - \omega^2} \operatorname{sen} \omega\tau.$$

Per le ipotesi fatte sarà per $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$(12) \qquad \psi(t,\ A,\ \theta,\ \varepsilon) \leq N_1(A,\ \theta) \quad , \quad \psi_t'(t,\ A,\ \theta,\ \varepsilon) \leq N_2(A,\ \theta),$$

nell'intervallo $0 < t < 2n\pi/\omega$, con n avendo indicato un intero per cui risulti $n/\omega > 3/2$. Anzi, sempre in base alle suaccennate ipotesi, se si assume come istante iniziale un generico istante t_0, si potranno trovare certi N_1, N_2, finiti in ogni campo di variabilità per A, θ, per cui le (12) varranno indipendentemente da t_0 nell'intervallo $t_0 \leq t \leq t_0 + 2n\pi/\omega$.

Si ha da 9)

$$(13) \qquad \begin{cases} x(2n\pi/\omega) = A \cos(2n\pi/\omega + \theta) + \varepsilon\varphi(2n\pi/\omega,\ A,\ \theta) + \\ \qquad\qquad + \varepsilon^2\psi(2n\pi/\omega,\ A,\ \theta,\ \varepsilon), \\ \dot{x}(2n\pi/\omega) = -A \operatorname{sen}(2n\pi/\omega + \theta) + \dfrac{E\omega}{1 - \omega^2} + \\ \qquad\qquad + \varepsilon\varphi_t'(2n\pi/\omega,\ A,\ \theta) + \varepsilon^2\psi_t'(2n\pi/\omega,\ A,\ \theta,\ \varepsilon). \end{cases}$$

Consideriamo al solito la trasformazione $\mathcal{T}$ del piano (x, y) in se che si ottiene associando ad ogni punto P di coordinate

$$(14) \qquad x = A \cos\theta \quad , \quad y = \dot{x}(0) - \frac{\omega E}{1 - \omega^2} = -A \operatorname{sen}\theta,$$

il punto P' di coordinate

$$(15) \qquad x' = x(2n\pi/\omega) \quad , \quad y' = \dot{x}(2n\pi/\omega) - \frac{E\omega}{1 - \omega^2}.$$

Riserveremo il simbolo $\mathcal{T}_0$ per accennare alla trasformazione che associa al punto P di coordinate (14) il punto P'

di coordinate

(16) $x' = A \cos(2n\pi/\omega + \theta) \quad , \quad y' = -A \operatorname{sen}(2n\pi/\omega + \theta).$

Questa trasformazione equivale ovviamente ad una rotazione del piano intorno all'origine delle coordinate di un angolo uguale a $2n\pi/\omega$. Ogni circonferenza col centro nell'origine e raggio A è trasformata dalla $\mathcal{T}_0$ in se e su ognuna di esse la $\mathcal{T}_0$ subordina una corrispondenza puntuale, che associa al punto di anomalia θ il punto di anomalia $\theta + 2n\pi/\omega$, corrispondenza che è quindi di equazione

(17) $$\theta' = \theta + 2n\pi/\omega.$$

Se ω è irrazionale si può anche dire che le circonferenze di centro l'origine sono le uniche curve semplici chiuse trasformate in se nella $\mathcal{T}_0$. Infatti sia

(18) $$\rho = \rho(\theta) \equiv \rho(\theta + 2\pi)$$

l'equazione di una tale curva chiusa. Perchè essa sia trasformata in se dalla $\mathcal{T}_0$ occorre che accanto a (18) valga anche la

(19) $$\rho(\theta) \equiv \rho(\theta + 2n\pi/\omega)$$

identicamente in θ e le (18) e (19), per ρ diverso da una costante, sono compatibili, per qualche valore di n, solo se ω è razionale.

Volendo ricercare le eventuali curve chiuse γ^* trasformate in se nella $\mathcal{T}$ cominciamo a porci il problema di ricercare le eventuali curve γ, le cui equazioni porremo sotto la forma

(20) $$\rho = A_0 + \varepsilon H(\theta) \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2n\pi/\omega + 3\pi,$$

tali che l'arco α corrispondente ai valori di θ dell'intervallo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, sia trasformato in $\mathcal{T}$ in un arco α' della stessa γ (naturalmente in generale non coincidente con α) almeno per ε sufficientemente piccolo. Porremo inoltre sotto la forma

(21) $$\theta' = \theta + 2n\pi/\omega + \varepsilon\Theta(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

l'equazione della corrispondenza subordinata dalla $\mathcal{T}$ sugli archi α ed α' di γ.

Tenuto conto di (13), di (20), e (21), dovranno quindi potersi determinare certe $H(\theta)$ e $\Theta(\theta)$ per le quali risulti identicamente in θ, per $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$
(22) \quad \left\{
\begin{aligned}
&[A_0 + \varepsilon H(\theta + 2n\pi/\omega + \varepsilon\Theta(\theta))] \cos[\theta + 2n\pi/\omega + \varepsilon\Theta(\theta)] \equiv \\
&\qquad [A_0 + \varepsilon H(\theta)] \cos(\theta + 2n\pi/\omega) + \varepsilon\varphi(2n\pi/\omega,\ A_0 + \\
&\qquad\qquad \varepsilon H(\theta),\ \theta) + \varepsilon^2\psi(2n\pi/\omega,\ A_0 + \varepsilon H(\theta),\ \theta,\ \varepsilon), \\
&[A_0 + \varepsilon H(\theta + 2n\pi/\omega + \varepsilon\Theta(\theta))] \operatorname{sen}[\theta + 2n\pi/\omega + \varepsilon\Theta(\theta)] \equiv \\
&\qquad [A_0 + \varepsilon H(\theta)] \operatorname{sen}(\theta + 2n\pi/\omega) + \varphi_t'(2n\pi/\omega,\ A_0 + \\
&\qquad\qquad \varepsilon H(\theta),\ \theta) + \varepsilon^2\psi_t'(2n\pi/\omega,\ A_0 + \varepsilon H(\theta),\ \theta,\ \varepsilon).
\end{aligned}
\right.
$$

La (22) si può scrivere così

$$
(23) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\Theta(\theta) = -\frac{1}{A_0}\{\varphi(2n\pi/\omega,\ A_0,\ \theta) \operatorname{sen}(2n\pi/\omega + \theta) + \\
&\qquad \varphi_t'(2n\pi/\omega,\ A_0,\ \theta)\cos(2n\pi/\omega + \theta)\} + \varepsilon F_1(\theta,\ A_0,\ \Theta,\ H,\ \varepsilon), \\
&\Delta H = H(\theta + 2n\pi/\omega) - H(\theta) = - \\
&\qquad\qquad \{\varphi_t'(2n\pi/\omega,\ A_0,\ \theta) \operatorname{sen}(2n\pi/\omega + \theta) - \\
&\qquad \varphi(2n\pi/\omega,\ A_0,\ \theta)\cos(2n\pi/\omega + \theta)\} + \varepsilon F_2(\theta,\ A_0,\ \Theta,\ H,\ \varepsilon).
\end{aligned}
\right.
$$

Il problema proposto è quindi ridotto a determinare le funzioni $\Theta(\theta)$ e $H(\theta)$ soddisfacenti alle (23), almeno per θ variabile nell'intervallo $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Se poi esistono soluzioni di (23) del tipo suddetto ed inoltre periodiche di periodo 2π ad esse corrispondono curve chiuse trasformate in se nella $\mathcal{T}$.

2. - Per risolvere in prima approssimazione le (23) poniamo ancora

$$
(24) \qquad \Theta(\theta) = \Theta_0(\theta) + \varepsilon\Theta_1 \qquad H(\theta) = H_0(\theta) + \varepsilon H_1
$$

ed otterremo

$$
(25) \quad \left\{
\begin{aligned}
&\Theta_0 = -\frac{1}{A_0}\{\varphi(2n\pi/\omega,\ A_0,\ \theta) \operatorname{sen}(2n\pi/\omega + \theta) + \\
&\qquad\qquad \varphi_t'(2n\pi/\omega,\ A_0,\ \theta)\cos(2n\pi/\omega + \theta)\}, \\
&\Delta H_0(\theta) = H_0(\theta + 2n\pi/\omega) - H_0(\theta) = - \\
&\qquad\qquad \{\varphi_t'(2n\pi/\omega,\ A_0,\ \theta) \operatorname{sen}(2n\pi/\omega + \theta) - \\
&\qquad\qquad \varphi(2n\pi/\omega,\ A_0,\ \theta)\cos(2n\pi/\omega + \theta)\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Non è restrittivo, dal punto di vista delle applicazioni, almeno nei casi che più frequentemente ricorrono nello studio delle vibrazioni non-lineari supporre, come noi faremo, che la $f(x, \dot{x}, t)$ sia polinomiale in x e $\dot{x}$. Allora le funzioni $\varphi(2n\pi/\omega, A_0, \theta)$ e $\varphi_t'(2n\pi/\omega, A_0, \theta)$ si presenteranno necessariamente nella forma

$$(26)\quad \begin{cases} \varphi(2n\pi/\omega, A_0, \theta) = \\ \qquad P_0(A_0) + \sum_{1}^{n} {}_r [P_r'(A_0) \cos r\theta + P_r''(A_0) \operatorname{sen} r\theta]), \\ \varphi_t'(2n\pi/\omega, A_0, \theta) = \\ \qquad Q_0(A_0) + \sum_{1}^{n} {}_r [Q_r'(A_0) \cos r\theta + Q_r''(A_0) \operatorname{sen} r\theta]. \end{cases}$$

È certamente fuor di dubbio che la $\Theta(\theta)$ fornita per ogni A_0 univocamente dalle (25_1) è periodica di periodo 2π in θ. La (25_2) determina invece $H_0(\theta)$ per ogni A_0 a meno della più generale funzione periodica di periodo $2n\pi/\omega$.

Scriveremo la (25_2) nella forma

$$(27)\quad \Delta H_0 = H_0(\theta + 2n\pi/\omega) - H_0(\theta) =$$
$$R_0(A_0) + \sum_{1}^{n} {}_r [R_r'(A_0) \cos r\theta + R_r''(A_0) \operatorname{sen} r\theta],$$

a cui può ridursi tenuto conto di (26), ed osserviamo che tra i termini che compaiono a secondo membro della (26) quelli che concorrono alla formazione di $R_0(A_0)$ sono solo P_1', P_1'', Q_1', Q_1''. Questo fatto ha importanza perchè semplifica il calcolo come meglio vedremo in seguito, dato che solo il termine $R_0(A_0)$ ha interesse ai nostri fini.

La soluzione generale di (27) si scrive

$$(28)\quad H_0(\theta) = \lambda\theta + \sum_{1}^{n} {}_r (h_r \cos r\theta + k_r \operatorname{sen} r\theta) + K(\theta)$$

ove $K(\theta)$ è una generica funzione di θ periodica di periodo $2n\pi/\omega$ ed inoltre è

$$(29)\quad \lambda = R_0(A_0)\omega/2n\pi, \quad h_r = R_r'(A_0) \cos 2n\pi/\omega - R_r''(A_0) \operatorname{sen} 2n\pi/\omega,$$
$$k_r = R_r''(A_0) \cos 2n\pi/\omega + R_r'(A_0) \operatorname{sen} 2n\pi/\omega.$$

Se si assume $K(\theta) = 0$ ed A_0 in modo tale che risulti

$$R_0(A_0) = 0, \tag{30}$$

la (20), con $H(\theta)$ data da (24_2) ed $H_0(\theta)$ fornita da (28) in relazione a questa scelta di A_0 e $K(\theta)$, ci dà l'equazione di una curva trasformata in se in $\mathcal{T}$ e chiusa a meno di infinitesimi con ε^2.

La (30) è un'equazione atta a determinare i valori di A_0 che individuano le circonferenze C_0 del piano xy con centro nell'origine, in un intorno delle quali possono esistere curve trasformate in se e chiuse a meno di termini dell'ordine di ε^2.

3. - Non è certo possibile, nelle ipotesi generali in cui ci siamo posti dedurre l'esistenza di curve analitiche chiuse trasformate in se nella $\mathcal{T}$. Possiamo invece, come più sopra annunciato, pervenire ad un risultato non molto meno importante dal punto di vista applicativo se esiste un C_0, corrispondente ad un valore di A_0 in relazione al quale, oltre ad essere soddisfatta la (30), risulta anche

$$\frac{dR(A_0)}{dA_0} = \mu < 0. \tag{31}$$

Dimostreremo qui di seguito che nella ipotesi suddetta si può costruire un intorno I_{C_0} di C_0 di massimo spessore, $\delta(I_{C_0})$, tendente a zero con ε, tale che il trasformato $\mathcal{T}(I_{C_0})$ è tutto contenuto in I_{C_0} ed è dello stesso tipo di I_{C_0}.

Sia dunque A^* un valore di A_0 soddisfacente e (30) e (31) e prendiamo un $a > 0$ sufficentemente piccolo perchè risulti

$$R_0(A_0^* + a)\omega/2n\pi = \lambda' < 0, \tag{32}$$

la possibilità di determinare un tale a essendo assicurata proprio perchè per $A_0 = A^*$ risultano soddisfatte le (30) e (31).

Consideriamo la curva γ' di equazioni parametriche

$$\left\{ \begin{aligned} x &= [A_0^* + a + \varepsilon H_0'(\theta)] \cos \theta \\ y &= -[A_0^* + a + \varepsilon H_0'(\theta)] \operatorname{sen} \theta \end{aligned} \right. \tag{33}$$

con $H_0'(\theta)$ calcolata in base a (28), assumendo $K(\theta) = 0$, e quindi del tipo

(34) $$H_0'(\theta) = \lambda\theta + P'(\theta),$$

ove si è indicato brevemente con $P'(\theta)$ la funzione periodica di periodo 2π fornita dal secondo termine del secondo membro di (28), calcolato per $A_0 = A_0^* + a$.

Questa curva γ' è trasformata in se nella $\mathcal{T}$ a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in ε; inoltre, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, l'equazione della corrispondenza subordinata dalla $\mathcal{T}$ su γ' è di equazione fornita dalla (21), ove si assuma per $\Theta(\theta)$ l'espressione $\Theta_0'(\theta)$ data dal secondo membro di (25_1), calcolato per $A_0 = A_0^* + a$.

Denotiamo con $\mathcal{T}_{\gamma'}$, la corrispondenza che associa al punto P di γ', di coordinata θ, il punto P' della stessa γ' di coordinate $\theta' = \theta + 2n\pi/\omega + \varepsilon\Theta_0'(\theta)$ e ricordiamo che $\Theta_0'(\theta)$ è funzione periodica di θ di periodo 2π. Consideriamo inoltre l'arco α di γ' corrispondente ai valori di θ dell'intervallo chiuso $(0, 2\pi)$. Ai punti di α corrispondono in $\mathcal{T}_{\gamma'}$ i punti dell'arco α' della stessa γ', relativi ai valori di θ dell'intervallo $[2n\pi/\omega + \varepsilon\Theta_0'(0),\ 2n\pi/\omega + 2\pi + \varepsilon\Theta_0'(0)]$.

Il generico raggio uscente da O incontra i due archi α ed α' in punti che distano tra di loro di $\varepsilon\lambda' 2\pi$. Tenuto poi conto che $P'(\theta)$ è una funzione periodica di periodo 2π, con derivata prima limitata in modulo, ne risulta che nessun punto di α ha da qualche punto di α' distanza infinitesima di ordine superiore al primo. Denotati inoltre con $A_1 A_2$ gli estremi dell'arco α, ai punti del segmento $A_1 A_2$ corrisponderanno nelle $\mathcal{T}$ (e non nelle $\mathcal{T}_{\gamma'}$ che non è ivi definita), sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, punti del segmento $A_1' A_2'$ estremi dell'arco α'. Ciò si riconosce considerando le curve γ del tipo di γ' uscenti dai punti del segmento $A_1 A_2$, cioè del tipo (33), prendendo, al posto di a, $a - \varepsilon\mu$ con $0 \leq \mu < 2\pi\lambda'$, e considerando su ognuna di queste $\bar{\gamma}$ le relative corrispondenze $\mathcal{T}_{\bar{\gamma}}$.

Possiamo ora dire che per ε più piccolo di un certo ε_0 la trasformazione $\mathcal{T}$ muta la curva chiusa C_0', costituita dall'arco α di γ' e dal segmento $A_1 A_2$, in una curva $\mathcal{T}(C_0')$ pure semplice e chiusa, interna alla regione finita del piano delimitata da C_0' e delimitante una regione piana contenente C_0.

La curva C_0' costituisce la frontiera esterna dell'intorno I_{C_0} ed è ormai evidente come si possa, seguendo lo stesso metodo, costruire la frontiera interna di questo intorno il cui massimo $\delta(I_{C_0})$ si può assumere tanto più piccolo quanto più piccolo è ε.

Consideriamo ora accanto alla $\mathfrak{T}$ la trasformazione $\mathfrak{T}^{(r)}$ costruita in relazione all'intervallo $(2rn\pi/\omega,\ 2(r+1)n\pi/\omega]$ come la $\mathfrak{T}$ è stata definita in relazione all'intervallo $(0,\ 2n\pi/\omega)$. Siano ΔH_r ed $R_r(A_0)$ le espressioni corrispondenti a ΔH_0 e $R_0(A_0)$ relativamente a questo nuovo intervallo temporale. Se esiste un A^* ed un μ, indipendenti da r, tali che per qualunque r, simultaneamente risultino soddisfatte le seguenti

$$R_r(A^*) = 0, \quad \left(\frac{dR_r}{dA_0}\right)_{A=A^*} \leq \mu < 0, \tag{35}$$

allora sarà agevole provare, tenendo anche conto delle ipotesi fatte sulle f, oltre che del procedimento seguito per costruire I_{C_0}, l'esistenza dell'intorno I_{Σ_0} di Σ_0 che gode delle proprietà annunciate nella prefazione.

Se poi la f è periodica in t di periodo $2\pi/\omega$ o multiplo o sottomultiplo di questo si potrà scegliere n anche in modo tale che $2n\pi/\omega$ risulti multiplo di ambedue i periodi cosicchè la $\mathfrak{T}^{(r)}$ sarà coincidente per ogni r con la $\mathfrak{T}$.

Naturalmente ΔH_r e $R_r(A_0)$ saranno di conseguenza indipendenti da r per cui basterà che siano soddisfatte le (30) e (31) perchè esista l'intorno I_{Σ_0} in discorso.

4. - Agli effetti del calcolo effettivo di $R_0(A_0)$ invece che rifarsi alle (26), (27), conviene ritornare a considerare la (25_2), che tenuto conto di (10), scriveremo

$$\Delta H_0 = -\int_0^{2n\pi/\omega} f(x_0(\tau),\ \dot{x}_0(\tau),\ \tau)\cos(2n\pi/\omega - \tau)d\tau \cdot \operatorname{sen}(2n\pi/\omega + \theta) \tag{36}$$

$$+\int_0^{2n\pi/\omega} f(x_0(\tau),\ \dot{x}_0(\tau),\ \tau)\operatorname{sen}(2n\pi/\omega - \tau)d\tau \cos(2n\pi/\omega + \theta).$$

Da questa si ha immediatamente

$$\Delta H_0 = -\int_0^{2n\pi/\omega} f(x_0(\tau),\ \dot{x}_0(\tau),\ \tau) \operatorname{sen}(\tau + \theta) d\tau. \tag{37}$$

Dall'esame della (37) risulta evidente che i termini dello sviluppo dell'integrale a secondo membro che possono fornire termini di $R_0(A_0)$ sono solo quelli che provengono da termini della $f(x, \dot{x}, t)$ che contengono a fattore $\operatorname{sen}^{2\mu+1}\theta$ $(\mu = 1, 2, ...)$. Volendo rifarsi, come più sopra, a casi concreti di una f polinomiale in x, $\dot{x}$, a coefficenti eventualmente dipendenti dal tempo, allora potremo aspettarci termini di $R_0(A_0)$ solo in corrispondenza a quei termini che contengono $\dot{x}$. Infatti ogni altro termine porta ad integrali del tipo

$$\int_0^{2n\pi/\omega} \varphi_\mu(\tau) \cos^\mu(\tau + \theta) \operatorname{sen}(\tau + \theta) d\tau, \qquad \mu = 1, 2, \ldots,$$

che danno per risultato funzioni di A_0 e θ a valore medio nullo, per ogni A_0, nell'intervallo $(0, 2\pi)$ di variabilità di θ.

5. - Applichiamo il metodo suesposto, come primo esempio, alla ormai classica equazione di Van der Pol

$$\ddot{x} + x - E \operatorname{sen} \omega t = \varepsilon\alpha(1 - x^2)\dot{x}. \tag{39}$$

In corrispondenza a questa equazione la (37) diventa

$$\Delta H_0 = -\alpha \int_0^{2n\pi/\omega} \left[1 - \left(A_0 \cos(\tau + \theta) + \frac{E}{1-\omega^2} \operatorname{sen} \omega\tau\right)^2\right]\left[-A_0 \operatorname{sen}(\tau + \theta) + \frac{E\omega \cos \omega\tau}{1 - \omega^2}\right] \operatorname{sen}(\tau + \theta) d\tau \tag{40}$$

e con facili calcoli si ha

$$R_0(A_0) = \frac{\alpha A_0}{2}\left\{1 - \frac{A_0^2}{4} - \frac{E^2}{2(1-\omega^2)^2}\right\}\frac{2n\pi}{\omega}. \tag{41}$$

Da questa si deduce in base al risultato dei n. precedenti che l'ampiezza stazionaria del componente armonico stabile è

$$A_0 = 2\sqrt{1 - \frac{E^2}{2(1 - \omega^2)^2}}. \tag{42}$$

Se si pone in ascisse ω ed in ordinate l'ampiezza A_0 si ha la solita curva di risposta per le oscillazioni di combinazione.

Come secondo esempio consideriamo un oscillatore debolmente non-lineare costituito da una massa M collegata, con una molla K ed una resistenza passiva non-lineare R_1, al supporto C_1 e, con una resistenza passiva R_2 dello stesso tipo al supporto C_2. Siano y_1 la coordinata del supporto C_1 rispetto ad un sistema inerziale C, y_2 la coordinata del supporto C_2 rispetto a C_1, x le coordinate di M rispetto a C_1. Dette Φ_1, Φ_2 le componenti secondo la coordinata x delle azioni esplicate da R_1 ed R_2 su M risulti

$$\Phi_1 = -(\alpha_1\dot{x} + \beta_1\dot{x}^3), \quad \Phi_2 = -\alpha_2(\dot{x} - \dot{y}_2) - \beta_2(\dot{q} - \dot{y}_2)^3. \tag{43}$$

Infine siano

$$y_1 = e \operatorname{sen} \omega t \quad , \quad y_2 = h - b\cos(\omega t + \psi), \tag{44}$$

le equazioni del moto di C_1 rispetto a C e di C_2 relativo a C_1. Denotando con k la costante elastica della molla K si stabilisce senza difficoltà l'equazione differenziale del movimento:

$$M\ddot{x} + kx + \alpha_1\dot{x} + \beta_1\dot{x}^3 + \alpha_2(\dot{x} - \dot{y}_2) + \beta_2(\dot{x} - \dot{y}_2)^3 - M\ddot{y}_1 = 0, \tag{45}$$

che tenuto conto di (44) conduce ad una equazione del tipo

$$\ddot{x} + x - E\operatorname{sen}\omega t = \varepsilon\{-(\alpha_1\dot{x} + \beta_1\dot{x}^3) \tag{46}$$
$$- \alpha_2[(\dot{x} - a\operatorname{sen}(\omega t + \psi)] - \beta_2[\dot{x} - a\operatorname{sen}(\omega t + \psi)]^3\},$$

con evidente nuovo significato dei simboli. Il parametro ε, che caratterizza l'entità delle azioni dinamiche Φ_1, Φ_2 che le resistenze passive esercitano sul sistema lineare forzato, è stato introdotto per permettere l'analisi del comportamento delle soluzioni di (46), con il metodo di perturbazione esposto nei n. precedenti, per valori dello stesso parametro appartenenti ad un intorno dello zero.

Trascurando termini dipendenti da θ ed a valore medio nullo nell'intervallo $(0, 2\pi)$ di variabilità per θ, ci si riduce a considerare soltanto il seguente integrale

$$-\int_0^{2n\pi/\omega} \{-(\alpha_1+\alpha_2)\dot{x}(\tau)-(\beta_1+\beta_2)\dot{x}(\tau)^3+3\beta_2\dot{x}(\tau)^2 a \operatorname{sen}(\omega\tau+\psi)$$

$$-3\beta_2\dot{x}(\tau)a^2\operatorname{sen}^2(\omega\tau+\psi)\}\operatorname{sen}(\tau+\theta)d\tau.$$

Proseguendo col calcolo, trascurando sempre i termini che non danno contributo ad $R_0(A_0)$ si perviene infine molto rapidamente alla seguente espressione di $R_0(A_0)$,

$$(48)\quad R_0(A_0) = -\frac{n\pi}{\omega}\left\{\alpha_1+\alpha_2+3\beta_2\frac{a^2}{2}-3\beta_2 a \operatorname{sen}\psi\frac{E\omega}{1-\omega^2}+\right.$$

$$\left.\frac{3}{2}(\beta_1+\beta_2)\frac{E^2\omega^2}{(1-\omega^2)^2}+\frac{3}{4}(\beta_1+\beta_2)A_0^2\right\}.$$

Si ha ora senz'altro che se è

$$(49)\qquad \begin{cases} \beta_1+\beta_2>0 \\ 3\beta_2^2 a^2\operatorname{sen}^2\psi > 2(\beta_1+\beta_2)\left(\alpha_1+\alpha_2+3\beta_2\dfrac{a^2}{2}\right), \end{cases}$$

certamente esiste un valore positivo di A_0 soddisfacente alle condizioni (30) e (31).

Un'analisi dal punto di vista meccanico delle condizioni (49), in relazione al sistema dinamico in discorso, sarà fatto in una nota a parte di prossima pubblicazione nei Rend. dell'Acc. dei Lincei.