

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BRUNO PINI

Sul primo problema di valori al contorno per l'equazione parabolica non lineare del secondo ordine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 27 (1957), p. 149-161

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__149_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUL PRIMO PROBLEMA DI VALORI AL CONTORNO PER L'EQUAZIONE PARABOLICA NON LINEARE DEL SECONDO ORDINE

Nota () di BRUNO PINI (a Modena)*

Recentemente T. Satō ha ottenuto, con mezzi assai semplici, notevoli risultati circa l'esistenza di una soluzione, della sua unicità e, nel caso che questa manchi, della più grande e più piccola soluzione del problema

$$\begin{aligned}\Delta^* u &= f(x, y, u, u_x, u_y) && \text{in } D - FD \\ u &= 0 && \text{su } FD,\end{aligned}$$

essendo D un dominio piano opportunamente regolare e Δ^* il laplaciano generalizzato di Blaschke¹⁾.

Da un punto di vista analogo a quello da cui si è posto Satō possono essere conseguiti dei risultati anche per il primo problema di valori al contorno per l'equazione parabolica non lineare del secondo ordine.

Per il dominio rettangolare $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq h$, e per l'equazione $u_{xx} - u_y = f(x, y, u, u_x)$ il primo problema di valori al contorno è stato trattato anche recentemente, in parti-

(*) Pervenuta in Redazione il 28 maggio 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Modena.

¹⁾ T. SATŌ, *Sur l'équation aux dérivées partielles* $\Delta z = f(x, y, z, p, q)$, *Compositio Mathematica*, 12 (1954); nello stesso ordine d'idee è da ricordare S. SIMODA, *Sur Théoremes d'Existence dans les Problèmes aux limites pour l'Équation* $\Delta u = F(x, y, \text{grad } u)$, *Osaka Math. Journal*, 6 (1954).

colare da C. Ciliberto e G. Prodi ²⁾); sulla funzione $f(x, y, u, p)$ gli A.A. citati fanno, tra l'altro, l'ipotesi della hölderianità rispetto a (x, y, u, p) per $0 < x < 1$, $0 < y \leq h$, e u, p variabili in un conveniente campo; ciò è naturale se si richiede che l'equazione sia soddisfatta in senso ordinario ³⁾. Abbandonando tale ipotesi e supponendo la f soltanto continua, si può, seguendo Satō, sostituire l'operatore $\partial^2 \partial x^2 - \partial \partial y$ con un operatore generalizzato come ad esempio quello da me introdotto in un precedente lavoro ⁴⁾ e che è l'analogo, per l'equazione del calore o sua aggiunta, dell'operatore di Blaschke.

Le righe seguenti hanno lo scopo di provare come si possano facilmente trasportare al caso parabolico i risultati di Satō. In vista di ciò, ci si è limitati ai più essenziali risultati di questo A. senza preoccuparci di ottenere dei miglioramenti, certamente possibili, delle ipotesi, sotto le quali si provano le proposizioni seguenti, rispetto a quelle del citato A.; per completezza si sono poi accennati i ragionamenti anche nei casi in cui essi si deducono immediatamente da quelli di Satō.

Indichiamo con P e Q i punti (x, y) e (ξ, η) ; se r è un numero positivo indichiamo con $\mathcal{C}(P, r)$ la curva

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = x + r \sqrt{2} \operatorname{sen} \theta \sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2 \theta)} \\ \eta = y + r \operatorname{sen}^2 \theta, \end{array} \right. \quad -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2.$$

²⁾ C. CILIBERTO, *Su di un problema al contorno per l'equazione $u_{xx} - u_y = f(x, y, u, u_x)$* , Ricerche di Mat., 1 (1952); G. PRODI, *Teoremi di esistenza per equazioni alle derivate parziali non lineari di tipo parabolico*, Rend. Ist. Lombardo, 86 (1953).

³⁾ Se $f(x, y)$ è una funzione definita ad esempio nel rettangolo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq h$ e ivi soltanto continua, l'equazione $u_{xx} - u_y = f(x, y)$ può non avere alcuna soluzione se come tale s'intende una funzione continua nel rettangolo e dotata in ogni punto dell'insieme $0 < x < 1$, $0 < y \leq h$ delle derivate seconda rispetto a x e prima rispetto a y , verificanti l'equazione; cfr. J. HADAMARD, *Équations du Type Parabolique Dépourvues de Solutions*, Journal of Rat. Mech. and Analysis, 3 (1954).

⁴⁾ B. PINI, *Su un integrale analogo al potenziale logaritmico*, B.U.M.I., 3, 9 (1954).

Sia \mathcal{A} un campo del piano x, y ove sia assegnata una funzione continua $u(P)$. Se $P \in \mathcal{A}$ ed r è tale che il dominio limitato di frontiera $\mathcal{C}(P, r)$ appartiene ad \mathcal{A} , poniamo

$$(2) \quad \mu(u, P, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (u)_{\mathcal{C}(P, r)} \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta$$

e

$$(3) \quad \mathfrak{N}^*[u] = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3\sqrt{3} [\mu(u, P, r) - u(P)]}{r^2},$$

tutte le volte che il limite a secondo membro di (3) esiste.

Se $u(P)$ ha le derivate u_{xx} e u_y allora

$$(4) \quad \mathfrak{N}^*[u(P)] = u_{xx}(P) + u_y(P) = \mathfrak{N}[u(P)] \text{ } ^5).$$

Sia \mathfrak{D} il dominio

$$a \leq y \leq b, \quad \chi_1(y) \leq x \leq \chi_2(y)$$

con $\chi_1(y)$ e $\chi_2(y)$ due funzioni continue su $a < y \leq b$ tali che $\chi_1(y) < \chi_2(y)$ per $a \leq y \leq b$. È noto ⁶⁾ che se $\chi_1(y)$ e $\chi_2(y)$ sono dotate di derivate prime continue, il cambiamento di variabili

$$x' = \frac{x - \chi_1(y)}{\chi_2(y) - \chi_1(y)}, \quad y' = \int_a^y \frac{dt}{[\chi_2(t) - \chi_1(t)]^2}$$

trasforma \mathfrak{D} nel rettangolo $\mathfrak{R} : 0 \leq x' \leq 1, 0 \leq y' \leq h$

$$\left(h = \int_a^b \frac{dt}{(\chi_2(t) - \chi_1(t))^2} \right) \text{ e l'equazione } \mathfrak{N}[u] = f(P, u, u_x)$$

in una equazione del medesimo tipo. Per semplicità ci riferiremo senz'altro al rettangolo $\mathfrak{R} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq h$ e, detta \mathfrak{S} la frontiera di \mathfrak{R} privata dei punti $0 < x < 1, y = 0$, con-

⁵⁾ Cfr. l. c. in ⁴⁾.

⁶⁾ Cfr. M. Gevrey, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, Journal de Math. pures et appl., 6, 9 (1913).

sidereremo il problema

$$(5) \quad \begin{cases} \mathfrak{N}^*[u] = f(P, u, u_x) & \text{per } P \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S} \\ u = u_0 & \text{per } P \in \mathfrak{S} \end{cases}$$

essendo u_0 una assegnata funzione continua e $f(P, u, p)$ una data funzione definita per $P \in \mathfrak{R}$ e (u, p) variabile in un certo insieme \mathcal{G} .

Una funzione $u(P)$ si dirà *regolare in \mathfrak{R}* se è continua in \mathfrak{R} , dotata di derivata rispetto ad x continua in $\mathfrak{R} - \mathfrak{S}$, e per la quale esiste il limite (3) in ogni punto $P \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}$.

1. - Siano $f(P, z, p)$ e $\bar{f}(P, \bar{z}, \bar{p})$ due funzioni definite per $P \in \mathfrak{R}$, $(z, p) \in \mathcal{G}$; $z(P)$ e $\bar{z}(P)$ due funzioni regolari in \mathfrak{R} tali che per $P \in \mathfrak{R}$ sia (z, z_x) , $(\bar{z}, \bar{z}_x) \in \mathcal{G}$ e

$$\mathfrak{N}^*[z] = f(P, z, z_x), \quad \mathfrak{N}^*[\bar{z}] = \bar{f}(P, \bar{z}, \bar{z}_x).$$

Se è

$$\bar{f}(P, \bar{z}, \bar{p}) < f(P, z, p)$$

per $P \in \mathfrak{R}$, (z, p) , $(\bar{z}, \bar{p}) \in \mathcal{G}$ e $\bar{z} < z$, allora se $\bar{z} \geq z$ su \mathfrak{S} , è $\bar{z} \geq z$ su \mathfrak{R} ; se è $\bar{z} > z$ su \mathfrak{S} , è $\bar{z} > z$ su \mathfrak{R} .

Sia $\bar{z} - z < 0$ in punti di $\mathfrak{R} - \mathfrak{S}$; sia $P_0 \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}$ un punto in cui $\bar{z} - z$ raggiunge il minimo. Si ha

$$\bar{z}(P_0) - z(P_0) < 0, \quad \bar{z}_x(P_0) - z_x(P_0) = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathfrak{N}^*[\bar{z}(P_0) - z(P_0)] = \mathfrak{N}^*[\bar{z}(P_0)] - \mathfrak{N}^*[z(P_0)] = \\ &= \bar{f}(P_0, \bar{z}(P_0), \bar{z}_x(P_0)) - f(P_0, z(P_0), z_x(P_0)) < 0, \end{aligned}$$

che è assurdo. Dunque da $\bar{z} \geq z$ su \mathfrak{S} segue $\bar{z} \geq z$ su \mathfrak{R} .

Sia $\bar{z} > z$ su \mathfrak{S} . Scegliamo un $\epsilon > 0$ tale che sia anche $\bar{z} - \epsilon > z$ su \mathfrak{S} . Ripetendo il ragionamento precedente con $\bar{z} - \epsilon$ al posto di \bar{z} , si ha $\bar{z} - \epsilon \geq z$ su \mathfrak{R} e quindi $\bar{z} > z$ su \mathfrak{R} .

2. - Siano $z(P)$, $\bar{z}(P)$ e $z_x(P)$ funzioni regolari in \mathfrak{R} e per $P \in \mathfrak{R}$ sia (z, z_x) , (\bar{z}, \bar{z}_x) , $(z, z_x) \in \mathcal{G}$. Allora se

$$\mathfrak{N}^*[\bar{z}] < f(P, z, \bar{z}_x) \quad \text{per } \bar{z} < z$$

$$\mathfrak{N}^*[z] > f(P, z, \bar{z}_x) \quad \text{per } \bar{z} > z$$

$$\mathfrak{N}^*[z] = f(P, z, z_x),$$

se è $\bar{z} \geq z \geq \underline{z}$ ($\bar{z} > z > \underline{z}$) su \mathcal{S} , è anche $\bar{z} \geq z \geq \underline{z}$ ($\bar{z} > z > \underline{z}$) su \mathcal{R} .

La dimostrazione si consegue con un ragionamento perfettamente analogo al precedente⁷⁾.

3. - Se $f(P, z, 0)$ è funzione crescente di z ed è $f(P, 0, 0) = 0$, esiste solo lo zero quale soluzione di $\mathfrak{N}^*[u] = f(P, z, z_x)$ regolare in \mathcal{R} e nulla su \mathcal{S} .

Si ha

$$\mathfrak{N}^*[0] = 0 > f(P, z, 0) \quad \text{per } z < 0,$$

$$\mathfrak{N}^*[0] = 0 < f(P, z, 0) \quad \text{per } z > 0,$$

onde l'asserto segue da **2**.

4. - Se $f(P, z, p)$ è definita per $P \in \mathcal{R}$, $-\infty < z, p < +\infty$ ed è

$$f(P, z, p) \leq f(P, \bar{z}, p) \quad \text{per } z < \bar{z},$$

allora esiste al più una soluzione del problema (5) regolare in \mathcal{R} .

Supponiamo dapprima che sia

$$(6) \quad f(P, z, p) < f(P, \bar{z}, p) \quad \text{per } z < \bar{z}.$$

Supponiamo che il problema (5) abbia due soluzioni $u^{(1)}(P)$ e $u^{(2)}(P)$ regolari in \mathcal{R} ; $u^{(1)}(P) - u^{(2)}(P)$ avrà o un massimo positivo o un minimo negativo in \mathcal{R} ; sia ad esempio P_0 un punto di $\mathcal{R} - \mathcal{S}$ ove $u^{(1)}(P) - u^{(2)}(P)$ raggiunge il suo massimo positivo. Si ha allora

$$u^{(1)}(P_0) > u^{(2)}(P_0), \quad u_x^{(1)}(P_0) = u_x^{(2)}(P_0)$$

onde per la (6)

$$0 \geq \mathfrak{N}^*[u^{(1)}(P_0) - u^{(2)}(P_0)] = f(P_0, u^{(1)}(P_0), u_x^{(1)}(P_0)) - \\ - f(P_0, u^{(2)}(P_0), u_x^{(2)}(P_0)) > 0,$$

da cui l'assurdo.

⁷⁾ Per le proposizioni 1 e 2 cfr. anche H. WESTPHAL, *Zur Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen*, Math. Zeit., 51 (1949).

Analogo ragionamento per il minimo.

Supponiamo in secondo luogo che sia

$$(7) \quad f(P, z, p) \leq f(P, \bar{z}, p) \quad \text{per } z < \bar{z}.$$

Sia $\varphi(y)$ una funzione positiva e continua con la derivata prima in $0 \leq y \leq h$. Poniamo

$$u(P) = \varphi(y)w(P);$$

si ha in $\mathfrak{R} - \mathfrak{S}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}^*[\varphi w] &= \varphi \mathfrak{N}^*[w] + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [\varphi(y + r^2 \sin^2 \theta) - \\ &\quad - \varphi(y)](w)_{\mathcal{C}(P, r)} \cos \theta \sqrt{\lg(1/\sin^2 \theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Ora è

$$\varphi(y + r^2 \sin^2 \theta) - \varphi(y) = r^2 \sin^2 \theta \varphi'(\bar{y}),$$

essendo \bar{y} un opportuno valore compreso tra y e $y + r^2 \sin^2 \theta$; tenendo conto della continuità di $\varphi'(y)$ e di $w(P)$ il limite precedente è

$$2\sqrt{2} \varphi'(y)w(P) \int_0^1 t^2 \sqrt{\lg \frac{1}{t}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{3\sqrt{3}} \varphi'(y)w(P);$$

perciò

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}^*[w] &= \frac{1}{\varphi} (\mathfrak{N}^*[w] - \varphi'w) = \frac{1}{\varphi} [f(P, \varphi w, \varphi w_x) - \varphi'w] = \\ &= g(P, w, w_x). \end{aligned}$$

Se è $\varphi > 0$ e $\varphi' < 0$ (al che basta prendere $\varphi = \exp(-y)$), si ha

$$\begin{aligned} g(P, w, w_x) - g(P, \bar{w}, w_x) &= \\ &= \frac{\varphi'}{\varphi} (\bar{w} - w) + \frac{1}{\varphi} [f(P, \varphi w, \varphi w_x) - f(P, \varphi \bar{w}, \varphi w_x)] < 0 \end{aligned}$$

per $w < \bar{w}$, essendo per ipotesi $f(P, \varphi w, \varphi w_x) \leq f(P, \varphi \bar{w}, \varphi w_x)$,

onde si è ricondotti al caso precedente relativamente al problema

$$\mathfrak{N}^*[w] = g(P, w, w_x) \quad \text{per } P \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S}$$

$$w = \frac{u_0}{\varphi} \quad \text{per } P \in \mathfrak{S}.$$

5. - Se esiste un numero positivo M tale che per $P \in \mathfrak{R}$, $-\infty < z, \bar{z}, p < +\infty$, è

$$(8) \quad |f(P, z, p) - f(P, \bar{z}, p)| \leq M |z - \bar{z}|,$$

allora il problema (6) ha al più una soluzione regolare in \mathfrak{R} .

Posto

$$\varphi = \exp(-Ny) \quad \text{con } N > M$$

e

$$u = \varphi w$$

si ha

$$\mathfrak{N}^*[w] = \frac{1}{\varphi} [f(P, \varphi w, \varphi w_x) - \varphi' w] = g(P, w, w_x)$$

ed è

$$g(P, w, w_x) - g(P, \bar{w}, w_x) = N(w - \bar{w}) +$$

$$+ \frac{1}{\varphi} [f(P, \varphi w, \varphi w_x) - f(P, \varphi \bar{w}, \varphi w_x)] <$$

$$< N(w - \bar{w}) + M |w - \bar{w}| < 0 \quad \text{per } w < \bar{w} \text{ } ^8).$$

⁸⁾ Cfr. anche il lavoro citato in ⁷).

Osserviamo che la condizione (8) di Lipschitz non può essere sostituita con una di Hölder. Ad esempio se

$$f(P, z, p) = -\pi^2 z - \frac{1}{1-\gamma} |z|^\gamma (\text{sen } \pi z)^{1-\gamma}$$

ove $0 < \gamma < 1$, è soddisfatta una condizione di Hölder d'ordine γ mentre esistono le due soluzioni

$$u^{(1)}(P) = 0, \quad u^{(2)}(P) = (h - y)^{\frac{1}{1-\gamma}} \text{sen } \pi x$$

nulle su \mathfrak{S} .

Nell'esempio ora indicato esistono addirittura infinite soluzioni nulle

Consideriamo ora il problema

$$(9) \quad \begin{cases} \mathfrak{N}^*[z] = f(P, z, z_x) & \text{per } P \in \mathfrak{R} - \mathfrak{S} \\ z = 0 & \text{per } P \in \mathfrak{S}. \end{cases}$$

Poniamo

$$U(Q, P) = \begin{cases} (\eta - y)^{-1/2} \exp \left[-\frac{(\xi - x)^2}{4(\eta - y)} \right] & \text{per } \eta > y \\ 0 & \text{per } \eta \leq y. \end{cases}$$

Indichiamo con \mathfrak{R}_y la porzione di \mathfrak{R} appartenente al semipiano $\eta \geq y$.

Se $\varphi(P)$ è una funzione definita in \mathfrak{R} e sommabile insieme a $|\varphi(P)|^\alpha$, essendo α una costante $> 3/2$, la funzione

$$u(P) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\mathfrak{R}_y} U(Q, P)\varphi(Q)dQ$$

verifica in ogni punto P di continuità della $\varphi(Q)$ la relazione

$$(10) \quad \mathfrak{N}^*[u(P)] = \varphi(P)^9).$$

Sia $G(Q, P)$ la funzione di Green, data com'è ben noto, da

$$(11) \quad G(Q, P) = \frac{1}{\sqrt{\eta - y}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left(\exp \left[-\frac{(\xi - x + 2n)^2}{4(\eta - y)} \right] - \exp \left[-\frac{(\xi + x + 2n)^2}{4(\eta - y)} \right] \right).$$

su \mathfrak{S} . Tali sono infatti le funzioni

$$u(P) = \begin{cases} (c - y)^{\frac{1}{2-\gamma}} \text{sen } \pi x & \text{per } 0 \leq y \leq c \\ 0 & \text{per } c \leq y \leq h, \end{cases}$$

con c un arbitrario numero compreso tra 0 ed h . Questo fatto si verifica, com'è ovvio, certamente tutte le volte che l'equazione $\mathfrak{N}^*[u] = f(P, u, u_x)$ ha una soluzione non identicamente nulla regolare in $\mathfrak{R} - \mathfrak{S}$ e nulla su \mathfrak{S} ed è $f(P, 0, 0) = 0$.

Osserviamo anche che la proposizione 5 non ha un corrispondente nel caso ellittico se non si fa alcuna restrizione sulla costante M ; cfr. l. c. in ¹⁾, p. 163 e p. 174.

⁹⁾ Cfr. l. c. in ⁴⁾.

È $G > 0$ per $0 < \xi < 1$, $y < \eta \leq h$, e. in \mathfrak{R}_y .

$$(12) \quad G(Q, P) \leq U(Q, P).$$

Tenendo poi presente che i termini della serie in (11) corrispondenti a $n \neq 0$ sono continui in \mathfrak{R}_y e convergenti esponenzialmente a zero per $\eta - y \neq 0$ insieme alle loro derivate e che, detta t una variabile positiva, esistono due costanti positive C e c , di cui la seconda $< 1/4$, tali che

$$t \exp\left(-\frac{t}{4}\right) < C \exp(-ct^2),$$

si ha, per due opportune costanti positive C e c ($C > 1$, $c < 1/4$)

$$(13) \quad |G_x(Q, P)| \leq \frac{C}{\eta - y} \exp\left[-c \frac{(\xi - x)^2}{\eta - y}\right].$$

Ora, per la (10), si è indotti a tradurre il problema (9) nell'equazione integro-differenziale

$$(14) \quad z(P) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\mathfrak{R}_y} G(Q, P) f(Q, z(Q), z_x(Q)) dQ.$$

Posto

$$V_s(Q, P) = \frac{1}{(\eta - y)^s} \exp\left[-c \frac{(\xi - x)^2}{\eta - y}\right]$$

e indicando con β una costante tale che $1 < \beta < 3/2$, poniamo

$$(15) \quad \varphi(P) = \left(\iint_{\mathfrak{R}_y} [V_{1/2}(Q, P)]^\beta dQ \right)^{1/\beta}$$

$$(16) \quad \psi(P) = \left(\iint_{\mathfrak{R}_y} [V_1(Q, P)]^\beta dQ \right)^{1/\beta}.$$

$\varphi(P)$ e $\psi(P)$ sono continue in \mathfrak{R} .

Sia \mathcal{E}_0 l'insieme delle coppie (z, z_x) per cui

$$(17) \quad |z| \leq K\varphi, \quad |z_x| \leq K\psi,$$

essendo K una costante positiva. Supponiamo che sia $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$. Se $f(P, z, p)$ è continua in $\mathfrak{R} \times \mathcal{E}$, poichè $\mathfrak{R} \times \mathcal{E}_0$ è chiuso,

esiste una costante positiva M tale che

$$|f(P, z, z_x)| \leq M \quad \text{in } \mathfrak{R} \times \mathcal{E}_0.$$

Diremo che la funzione $f(P, z, p)$ continua in $\mathfrak{R} \times \mathcal{E}$ verifica la condizione (A) in $\mathfrak{R} \times \mathcal{E}$ se è $\mathcal{E}_0 \subseteq \mathcal{E}$ e

$$\frac{CMh^{\beta-1}}{2\sqrt{\pi}} \leq K.$$

6. - Se $f(P, z, p)$ è continua e verifica la condizione (A) in $\mathfrak{R} \times \mathcal{E}$, allora il problema (9) ha almeno una soluzione $z(P)$ regolare in \mathfrak{R} verificante le (17).

La trasformazione

$$z'(P) = \mathfrak{T}[z(P)] = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\mathfrak{R}_y} G(Q, P) f(Q, z(Q), z_x(Q)) dQ$$

trasforma l'insieme \mathcal{E}_0 in un insieme \mathcal{E}'_0 contenuto in \mathcal{E}_0 perchè, come subito si verifica,

$$|z'| \leq \frac{CMh^{\beta-1}}{2\sqrt{\pi}} \varphi \leq K\varphi, \quad |z'_x| \leq \frac{CMh^{\beta-1}}{2\sqrt{\pi}} \psi \leq K\psi.$$

Essendo le $\varphi(P)$ e $\psi(P)$ limitate, le z' e z'_x sono funzioni egualmente limitate in \mathfrak{R} ; esse sono inoltre egualmente continue. Proviamo quest'ultima affermazione relativamente alle z'_x . Si ha, per un $\delta > 0$ tale che $y < y_0 + \delta \leq h$,

$$\begin{aligned} |z'_x(P) - z'_x(P_0)| &\leq \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\mathfrak{R}_{y_0+\delta}} |G_x(Q, P) - G_x(Q, P_0)| dQ + \\ &+ \frac{CM}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\mathfrak{R}_y - \mathfrak{R}_{y_0+\delta}} V_1(Q, P) dQ + \frac{CM}{2\sqrt{\pi}} \iint_{\mathfrak{R}_{y_0} - \mathfrak{R}_{y_0+\delta}} V_1(Q, P_0) dQ. \end{aligned}$$

Fissato δ il primo integrale converge a zero per $P \rightarrow P_0$; il secondo e il terzo sono maggiorati rispettivamente da

$$2 \left| \frac{\pi(y_0 + \delta - y)}{c} \right|^{1/2}, \quad 2 \left(\frac{\pi\delta}{c} \right)^{1/2}.$$

Ora \mathcal{E}_0 non è vuoto (infatti $(0, 0) \in \mathcal{E}_0$); se λ e μ sono due costanti non negative tali che $\lambda + \mu = 1$ e $(u, u_x), (v, v_x) \in \mathcal{E}_0$ anche $(\lambda u + \mu v, \lambda u_x + \mu v_x) \in \mathcal{E}_0$; da \mathcal{E}_0 si può estrarre una successione $\{z^{(n)}, z_x^{(n)}\}$ convergente uniformemente in \mathcal{R} ; se $z = \lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}$, si ha $z_x = \lim_{n \rightarrow \infty} z_x^{(n)}$ e $(z, z_x) \in \mathcal{E}_0$; le funzioni z' e z'_x , $(z', z'_x) \in \mathcal{E}'_0$, costituiscono famiglie di funzioni egualmente continue ed egualmente limitate; se $z^{(n)'}$, z' sono i trasformati mediante \mathcal{T} di $z^{(n)}$, z , allora z' e z'_x sono i limiti di $\{z^{(n)'}\}$ e $\{z_x^{(n)'}\}$. Quindi per un teorema di Satō¹⁰) la (14) ha almeno una soluzione, che è poi soluzione di (9).

Siano ora $\underline{\omega}(P)$ e $\bar{\omega}(P)$ due funzioni regolari in \mathcal{R} e tali che

$$\begin{aligned} \underline{\omega}(P) &\leq 0 \leq \bar{\omega}(P) \quad \text{per } P \in \mathcal{D} \\ \underline{\omega}(P) &< \bar{\omega}(P) \quad \text{per } P \in \mathcal{R} - \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Indichiamo con \mathcal{T} l'insieme (P, z, p) tale che $P \in \mathcal{R}$, $\underline{\omega} \leq z \leq \bar{\omega}$, $-\infty < p < +\infty$.

7. - Sia $f(P, z, p)$ una funzione continua verificante la condizione (A) in \mathcal{T} ; se è

$$(18) \quad \mathfrak{N}^*[\underline{\omega}] > f(P, \underline{\omega}, \underline{\omega}_x)$$

$$(19) \quad \mathfrak{N}^*[\bar{\omega}] < f(P, \bar{\omega}, \bar{\omega}_x)$$

in $\mathcal{R} - \mathcal{D}$, allora il problema (9) ha almeno una soluzione $z(P)$ regolare in \mathcal{R} tale che

$$(20) \quad \underline{\omega} \leq z \leq \bar{\omega} \quad \text{in } \mathcal{R}.$$

Poniamo

$$F(P, z, p) = f(P, z', p)$$

ove

$$z' = \begin{cases} \underline{\omega} & \text{se } z < \underline{\omega} \\ z & \text{se } \underline{\omega} \leq z \leq \bar{\omega} \\ \bar{\omega} & \text{se } \bar{\omega} < z. \end{cases}$$

¹⁰) T. SATŌ, *Fikspunkta teoremo en funkciala spaco*, Mem. Fac. Sci. Kyusyu, Ser. A., 5 (1950).

Si ha allora

$$(21) \quad \mathfrak{N}^*[\underline{\omega}] > F(P, z, \underline{\omega}_x) \quad \text{per } z < \underline{\omega}$$

$$(22) \quad \mathfrak{N}^*[\bar{\omega}] < F(P, z, \bar{\omega}_x) \quad \text{per } z > \bar{\omega}.$$

La funzione $F(P, z, p)$ verifica la condizione (A) per $P \in \mathfrak{R}$, $-\infty < z, p < +\infty$, onde l'equazione

$$\mathfrak{N}^*[z] = F(P, z, z_x)$$

ha almeno una soluzione regolare in \mathfrak{R} e nulla su \mathfrak{S} . Per **2** si ha poi, in base a (21) e (22), la (20). Perciò $z(P)$ è soluzione regolare in \mathfrak{R} di (9) verificante la (20).

8. - Se $f(P, z, p)$ è continua e limitata in \mathfrak{T} e valgono le (18) e (19), allora sussiste la tesi del teorema precedente.

Infatti $F(P, z, p)$ verifica ovviamente la condizione (A).

9. - Se $f(P, z, p)$ è continua per $P \in \mathfrak{R}$, $-\infty < z, p < +\infty$, se $f(P, 0, p)$ è limitata per $P \in \mathfrak{R}$, $-\infty < p < +\infty$, e se $f(P, z, p)$ verifica una condizione di Hölder rispetto a z

$$(23) \quad |f(P, z, p) - f(P, z', p)| < H |z - z'|^\lambda$$

con H e λ due costanti positive di cui la seconda < 1 , allora il problema (9) ha almeno una soluzione regolare in \mathfrak{R} .

Dalla (23) e dall'ipotesi che $f(P, 0, p)$ sia limitata, segue

$$(24) \quad |f(P, z, p)| < N + H |z|^\lambda$$

per una certa costante positiva N . Poniamo

$$-\underline{\omega}(P) = A \cos \alpha x = \bar{\omega}(P)$$

con A e α due costanti positive tali che

$$\frac{1}{2} \alpha^2 A > N + HA^\lambda. \quad 0 < \alpha \leq \pi/3.$$

Ne segue che

$$\underline{\omega} < 0 < \bar{\omega}$$

$$\mathfrak{N}^*[\underline{\omega}] = \alpha^2 A \cos \alpha x \geq \frac{1}{2} \alpha^2 A > N + HA^\lambda \geq f(P, \underline{\omega}, \underline{\omega}_x)$$

$$\mathfrak{N}^*[\bar{\omega}] = -\alpha^2 A \cos \alpha x \leq -\frac{1}{2} \alpha^2 A < -N - HA^\lambda \leq f(P, \bar{\omega}, \bar{\omega}_x).$$

Sono perciò soddisfatte le (18) e (19) e, a causa della (24), $f(P, z, p)$ è limitata in \mathcal{C} . Pertanto la proposizione **9** è conseguenza della **8**.

10. - Se $f(P, z, p)$ verifica le ipotesi del teorema **9** e, di più, è funzione non decrescente di z , allora il problema (9) ammette la più grande e la più piccola soluzione regolari in \mathcal{R} .

Proviamo l'esistenza della più grande soluzione (in modo analogo si procede per la più piccola soluzione).

Sia $\{\varepsilon_n\}$ una successione decrescente a zero. L'equazione

$$\mathfrak{N}^*[z] = f(P, z, z_x) - \varepsilon_n$$

ammette almeno una soluzione regolare in \mathcal{R} e nulla su \mathcal{S} , sia $z^{(n)}(P)$. Sia $z(P)$ una soluzione di (9). Per l'ipotesi è

$$f(P, z', p) - \varepsilon_n < f(P, z, p) \quad \text{per } z' < z;$$

ne segue per **1** che

$$z^{(n)} \geq z \quad \text{in } \mathcal{R}.$$

In modo analogo si prova che

$$z^{(n)} \geq z^{(n+1)} \quad \text{in } \mathcal{R}.$$

Sia $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}(P) = \bar{z}(P)$. Le funzioni $z^{(n)}(P)$ e $z_x^{(n)}(P)$ sono egualmente limitate ed egualmente continue in \mathcal{R} ; da $\{z^{(n)}(P)\}$ si può estrarre una successione, che per semplicità supponiamo sia quella stessa da cui si parte, uniformemente convergente insieme a $\{z_x^{(n)}(P)\}$; il suo limite, cioè $\bar{z}(P)$, è soluzione regolare in \mathcal{R} del problema (9) ed è

$$\bar{z} \geq z.$$

Dunque $\bar{z}(P)$ è la più grande soluzione di (9).