RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LAMBERTO CATTABRIGA

Su alcuni problemi per equazioni differenziali di tipo composito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 122-143

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__122_0>

SU ALCUNI PROBLEMI PER EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI TIPO COMPOSITO

Nota (*) *di* LAMBERTO CATTABRIGA (*a Bologna*)

Secondo la denominazione introdotta da J. Hadamard [1]), per equazioni differenziali di tipo composito si intendono quelle equazioni differenziali a derivate parziali, che possiedono contemporaneamente direzioni caratteristiche reali e direzioni caratteristiche immaginarie in ogni punto dell'insieme in cui si considerano.

All'esame di equazioni di questo tipo, oltre alle ricerche di J. Hadamard, le quali riguardano problemi di valori al contorno per le equazioni $\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = 0$ e $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Delta u = 0 \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ sono stati in seguito dedicati due lavori da O. Sjöstrand, ancora sull'equazione $\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = 0$. Nel primo di questi [2] l'Autore si propone il problema di determinare una funzione $u(x, y)$ continua in un dominio circolare, soddisfacente alla equa-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 20 marzo 1957.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Bologna.

[1]) J. HADAMARD, *Sur les équations aux dérivées partielles d'ordre supérieure*. Verhandlungen des Internationalen Matematiker-Kongresses Zürich, 1932. Bd. II.

J. HADAMARD, *Propriétés d'une équation linéaire aux dérivées partielles du quatrième ordre*. Tôhoku Math. Journ., 37 (1933).

[2]) O. SJÖSTRAND, *Sur une équation aux dérivées partielles du type composite*. Arkiv for Mat. Astr. och Fysik, Bd. 25A, n. 21 (1937).

zione $\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = 0$ all'interno di questo ed assumente assegnati valori sulla circonferenza e sul diametro $x = 0$ del dominio stesso. Supponendo continue con la loro derivata prima le funzioni rappresentanti i valori assegnati, l'Autore dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione di questo problema traducendolo in una equazione integrale di Fredholm di seconda specie, della quale determina una soluzione con il metodo delle approssimazioni successive. Lo stesso Autore, in un secondo lavoro [3]), ha poi esteso questi risultati al caso di un dominio piano rappresentabile conformemente su di un cerchio.

Traendo spunto dalle applicazioni che le equazioni di tipo composito trovano nella idrodinamica, R. B. Davis [4]) ha poi recentemente trattato un problema per una più generale equazione del terzo ordine di tipo composito, riconducendolo a quello studiato da Sjöstrand, ed ha in seguito risolto un altro problema [5]) di valori al contorno, per l'equazione $\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = 0$.

Nel presente lavoro, riprendo dapprima a trattare (§ 1) il problema di Sjöstrand in un dominio circolare, facendo uso tuttavia di un diverso metodo di maggiorazione delle successive approssimazioni dell'equazione integrale a cui giungo, il quale consente di provare l'esistenza di una soluzione del problema, attenuando le ipotesi fatte da quell'Autore sulle funzioni rappresentanti i valori assegnati. Anche il relativo teorema di unicità è dimostrato senza restrizioni.

Nel § 2 e nel § 3, inizio poi lo studio di due problemi per le due equazioni di tipo composito $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Delta u = 0$ e $\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Delta u = 0$,

---

[3]) O. SJÖSTRAND, *Sur une équation aux dérivées partielles du type composite.* Note 2. Arkiv for Mat. Astr. och Fysik, Bd. 26A, n. 1 (1939).

[4]) R. B. DAVIS, *A boundary value problem for third-order partial differential equations of composite type.* Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1952).

[5]) R. B. DAVIS, *A special case of the normal derivative problem for a third order composite equation.* Proc. Amer. Math. Soc., 5 (1954).

in un dominio circolare. L'uso del medesimo procedimento tenuto per l'equazione $\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = 0$, permette anche qui di giungere ai relativi teoremi di esistenza.

— § **1** —

Un problema per l'equazione $\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = 0$.

1. - *Sia D il dominio circolare del piano x, y di centro l'origine e raggio unitario; si voglia determinare una funzione u(x, y) continua in D, che sia in D — FD soluzione regolare della equazione* $\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = 0$ *e tale che risulti*

$$(1) \qquad \begin{cases} u(\cos\vartheta,\ \mathrm{sen}\,\vartheta) = f(\vartheta) \quad , \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi \quad , \quad su\ FD \\ u(0,\ y) \qquad = g(y) \quad , \quad -1 \leq y \leq 1 \quad , \quad sul\ dia\text{-} \end{cases}$$

metro $x = 0$ *di D, ove* $f(\vartheta)$ *e* $g(y)$ *sono due assegnate funzioni continue in* $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ *e* $-1 \leq y \leq 1$ *rispettivamente, con* $f(\vartheta)$ *periodica di periodo* 2π *e tale che* $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g(-1)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g(1)$ *e* $g(y)$ *due volte derivabile nei punti interni di* $(-1,\ 1)$.

La funzione

$$u(x,\ y) = v(x,\ y) + \nu(y),$$

con v continua in D ed armonica in $D - FD$ e $\nu(y)$ continua in $-1 \leq y \leq 1$ e due volte derivabile nei punti interni a questo intervallo, è continua in D ed in $D - FD$ è soluzione regolare della equazione $\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = 0$. Cerchiamo quindi di determinare v e ν in modo che la u sia soluzione del problema considerato.

La funzione $v(x,\ y)$ potrà esprimersi mediante un integrale di Poisson e quindi le (1), che debbono essere soddisfatte affinchè la u sia soluzione del problema considerato, divengono ora:

$$
(1') \quad \begin{cases} \mu(\vartheta) + \nu(\text{sen}\,\vartheta) = f(\vartheta) & , \; -\pi \leq \vartheta < \pi \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{1 - y^2}{1 + y^2 - 2y\,\text{sen}\,\vartheta}\,\mu(\vartheta)d\vartheta + \nu(y) = g(y) & , \; -1 < y < 1, \end{cases}
$$

con $\mu(\vartheta)$ continua e periodica di periodo 2π in $(-\pi, \pi)$. Da queste si trae l'equazione

$$
\nu(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - y^2}{r^2}\,\nu(\text{sen}\,\vartheta)d\vartheta = g(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - y^2}{r^2}\,f(\vartheta)d\vartheta,
$$

ovvero, posto $g^*(y) = g(y) - \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{1 - y^2}{r^2}\,f(\vartheta)d\vartheta, \quad -1 < y < 1,$

ed $y = \text{sen}\,\tau$, $-\dfrac{\pi}{2} < \tau < \dfrac{\pi}{2}$, l'equazione integrale:

$$
(2) \qquad \nu(\text{sen}\,\tau) - \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\tau}{r^2}\,\nu(\text{sen}\,\vartheta)d\vartheta = g^*(\text{sen}\,\tau),
$$

ove, come sempre nel seguito, r^2 sta ad indicare l'espressione $1 + y^2 - 2y\,\text{sen}\,\vartheta = 1 + \text{sen}^2\,\tau - 2\,\text{sen}\,\tau\,\text{sen}\,\vartheta$.

2. - Determineremo una soluzione di questa equazione integrale, con il metodo delle approssimazioni sucessive, nella *ulteriore ipotesi che la funzione $g^*(y)$ soddisfi ad una condizione di Hölder di esponente α, $0 < \alpha \leq 1$, nei punti $y = -1$ ed $y = 1$.*

Ciò accade, in particolare, se anche *le funzioni $f(\vartheta)$ e $g(y)$ soddisfano ad una condizione di Hölder dello stesso esponente $\alpha < 1$ nei punti $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ed $y = -1$, $y = 1$ rispettivamente.* Si può infatti provare, imitando i ragionamenti tenuti da O. D. Kellogg [6]) per il caso tridimensionale, che la fun-

[6]) O. D. KELLOGG, *On the derivatives of harmonic functions on the boundary.* Trans. Math. Soc., 33 (1931).

zione armonica in $D - FD$ e continua in D che assume su FD i valori $f(\vartheta)$, soddisfa essa pure ad una condizione di Hölder dello stesso esponente α nei punti $(0, -1)$ e $(0, 1)$. Se invece è $\alpha = 1$, cioè se $f(\vartheta)$ è lipschitziana in $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, questa funzione armonica non sarà necessariamente lipschitziana in $(0, -1)$ e $(0, 1)$, ma soddisferà in generale soltanto ad una condizione di Hölder di esponente < 1.

Sia dunque:

$$\frac{|g^*(y)|}{(1-y^2)^\alpha} = \frac{|g^*(\operatorname{sen}\tau)|}{\cos^{2\alpha}\tau} \leq K$$

$$\text{per } -1 < y < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2},$$

con K costante positiva e $0 < \alpha \leq 1$.

Poniamo allora in $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$:

$$v_0(\operatorname{sen}\tau) = g^*(\operatorname{sen}\tau)$$

$$v_n(\operatorname{sen}\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\tau}{r^2} v_{n-1}(\operatorname{sen}\vartheta)d\vartheta, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ed esaminiamo il comportamento di $\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2-2\alpha}\tau\cos^{2\alpha}\vartheta}{r^2}d\vartheta$ nello stesso intervallo.

Se applichiamo la diseguaglianza di Hölder con esponenti $\frac{1}{1-\alpha}$ e $\frac{1}{\alpha}$, $\alpha < 1$, otteniamo

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2-2\alpha}\tau\cos^{2\alpha}\vartheta}{r^2}d\vartheta \leq \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\tau}{r^2}d\vartheta\right)^{1-\alpha} \cdot \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\vartheta}{r^2}d\vartheta\right)^\alpha,$$

nella quale vale il segno eguale per $\alpha = 1$. Il primo integrale che figura all'ultimo membro è eguale a π, mentre per il secondo, osservando che

$$\cos^2 \vartheta \leq 1 + \operatorname{sen}^2 \tau - 2 \operatorname{sen} \tau \operatorname{sen} \vartheta, \quad \text{ossia}$$

$$\frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} \leq \frac{\cos \vartheta}{r} \leq 1 \quad \text{per} \quad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, \ -\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2},$$

risulta

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \vartheta}{r^2} d\vartheta \leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \vartheta}{r} d\vartheta = -\frac{1}{\operatorname{sen} \tau} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial r}{\partial \vartheta} d\vartheta = 2.$$

Vale dunque la maggiorazione

$$\text{(3)} \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2-2\alpha} \tau \cos^{2\alpha} \vartheta}{r^2} d\vartheta \leq \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \vartheta}{r^2} d\vartheta \right)^{\alpha} \leq$$

$$\leq \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\alpha} < 1, \quad \text{in} \quad -\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}.$$

Otteniamo così per le ν_n le successive maggiorazioni:

$$|\nu_1(\operatorname{sen} \tau)| \leq \frac{\cos^{2\alpha} \tau}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2-2\alpha} \tau \cos^{2\alpha} \vartheta}{r^2} \frac{|g^*(\operatorname{sen} \tau)|}{\cos^{2\alpha} \vartheta} d\vartheta \leq$$

$$\leq K \cos^{2\alpha} \tau \cdot \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\alpha},$$

$$|\nu_n(\operatorname{sen} \tau)| \leq K \cos^{2\alpha} \tau \left[\left(\frac{2}{\pi} \right)^{\alpha} \right]^n \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}.$$

La serie $\sum_0^{\infty} {}_n \nu_n(\operatorname{sen} \tau)$ *è dunque uniformemente convergente in* $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$, *con funzione somma continua in tale intervallo e soluzione della equazione* (2). *Da essa, posto* $\nu(-1) = \nu(1) = 0$, *si trae una funzione* $\nu(y)$, *continua in* $-1 \leq y \leq 1$, *due volte* *derivabile come la g nei punti interni a questo intervallo e soddisfacente ad una condizione di Hölder di esponente α in $y = -1$ ed $y = 1$.* Dalla prima delle (1') si ricava quindi la $\mu(\vartheta)$.

Se dunque $f(\vartheta)$ e $g(y)$ soddisfano ad una condizione di Hölder di esponente $\alpha < 1$, nel modo indicato all'inizio di questo n., anche $\mu(\vartheta)$ sarà hölderiana come la f e quindi $v(x, y)$ sarà hölderiana di esponente α in $(0, -1)$ e $(0, 1)$. Si conclude così che in questo caso *la soluzione $u(x, y)$ trovata è hölderiana di esponente α negli estremi del diametro $x = 0$ di D.*

3. - Per provare *l'unicità della soluzione* del problema posto al n. 1, basterà far vedere che *ogni funzione $u(x, y)$ continua in D, che sia soluzione regolare di $\frac{\partial}{\partial x}\Delta u = 0$ in $D - FD$ e sia identicamente nulla su FD e sul diametro $x = 0$ di D, è identicamente nulla in D.*

Procedimenti dovuti a T. Boggio[7]) e J. Hadamard[8]) consentono infatti di rappresentare la $u(x, y)$ in $D - FD$ come somma di una funzione $v(x, y)$ armonica in $D - FD$ e di una funzione $\nu(y)$ due volte derivabile nei punti interni all'intervallo $(-1, 1)$. La v sarà perciò anche continua in tutti i punti di FD esclusi al più gli estremi del diametro $x = 0$ di D ed assumerà i valori della funzione $-\nu(y)$ per $x = -\sqrt{1 - y^2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{1 - y^2}$.

Proviamo di più che v è continua in tutto D. Siano infatti $D_{\eta_1\eta_2}$ il dominio costituito dai punti di D per cui è $-1 + \eta_1 \leq y \leq 1 - \eta_2$, con η_1, η_2 numeri positivi minori di uno e c_{η_1}, c_{η_2} le due corde di D limitanti questo dominio. Il massimo ed il minimo della v in $D_{\eta_1\eta_2}$ non potranno cadere che in punti appartenenti alle corde c_{η_1}, c_{η_2} Se però, comunque piccoli siano η_1 ed η_2 essi cadono entrambi su una sola di tali corde, v sarà identicamente nulla in D, poichè su ognuna delle c_{η_1} e c_{η_2} l'oscillazione della v è eguale a quella

---

[7]) T. BOGGIO, *Sull'integrazione di alcune equazioni lineari alle derivate parziali.* Annali di Mat., 8 (3) (1902).

[8]) J. HADAMARD, loc. cit. in [1]).

della u e quindi tende a zero per η_i tendente a zero. In caso contrario su c_{η_1} cadrà dunque o il massimo o il minimo della v in $D_{\eta_1\eta_2}$, non appena η_1 ed η_2 siano sufficientemente piccoli. Se per es. per certi valori di η_1 ed η_2 vi cade il massimo, esso continuerà a cadervi, fissato η_2, al tendere a zero di η_1, e tutti tali massimi costituiranno una funzione non decrescente di y, $\bar{v}(y)$, definita in un intorno destro di -1. Esisterà perciò, finito od infinito, il $\lim\limits_{y \to -1+} \bar{v}(y)$ e poichè u è continua in $(0, -1)$ anche il $\lim\limits_{y \to -1+} \nu(y)$ e quindi pure il $\lim\limits_{P(x,y) \to (0,-1)} v(x, y) = -\lim\limits_{y \to -1+} \nu(y)$. Possiamo tuttavia escludere che questo limite sia infinito. Indichiamo infatti con m_{η_1} ed m_{η_2} i minimi di v su c_{η_1} e c_{η_2} e sia $a_{\eta_1\eta_2}y + b_{\eta_1\eta_2}$ la funzione lineare della sola y che assume i valori m_{η_1} ed m_{η_2} su c_{η_1} e c_{η_2} rispettivamente. Si avrà:

$$a_{\eta_1\eta_2} = -\frac{m_{\eta_1} - m_{\eta_2}}{2 - \eta_1 - \eta_2} \quad , \quad b_{\eta_1\eta_2} = \frac{m_{\eta_1}(1 - \eta_2) + m_{\eta_1}(1 - \eta_1)}{2 - \eta_1 - \eta_2} .$$

La funzione $v(x, y) - a_{\eta_1\eta_2}y - b_{\eta_1\eta_2}$ sarà, come la v, armonica in $D - FD$ e come la v assumerà gli stessi valori per $x = -\sqrt{1 - y^2}$, $x = 0$, $x = \sqrt{1 - y^2}$ e quindi, essendo sempre ≥ 0 su c_{η_1} e c_{η_2}, tale resterà in tutto $D_{\eta_1\eta_2}$. Risulterà dunque in tutto questo dominio:

$$v(x, y) \geq a_{\eta_1\eta_2}y + b_{\eta_1\eta_2} .$$

Se ora è $\lim\limits_{P(x,y) \to (0,-1)} v(x, y) = +\infty$, sarà pure $\lim\limits_{\eta_1 \to 0+} m_{\eta_1} = +\infty$ e quindi

$$\lim_{\eta_1 \to 0+} a_{\eta_1\eta_2} = -\infty \quad , \quad \lim_{\eta_1 \to 0+} b_{\eta_1\eta_2} = +\infty , \text{ per } \eta_2 \text{ fissato.}$$

La diseguaglianza scritta sopra non potrà allora sussistere in un fissato punto interno a D di ordinata $y < 0$, per ogni η_1 sufficientemente piccolo.

Allo stesso modo si può escludere che sia $\lim\limits_{P(x,y) \to (0,-1)} v(x, y) = -\infty$, sostituendo nel ragionamento precedente ai minimi m_{η_1} ed m_{η_2} i massimi M_{η_1} ed M_{η_2} di v su c_{η_1} e c_{η_2}.

Ciò che precede, ed analoghi ragionamenti per il punto

(0, 1), ci permettono di concludere che esistono finiti i limiti di $v(x, y)$ nei punti (0, —1) e (0, 1). Posti quindi $v(0, -1)$ e $v(0, 1)$ eguali ai rispettivi valori di questi limiti, la $v(x, y)$ risulterà continua in D.

Imitando un ragionamento di Sjöstrand[9]), si può allora provare che $v(x, y)$ deve essere una funzione lineare della sola y e dovrà perciò coincidere in D con $-\nu(y)$. Riesce allora $u \equiv 0$ in D.

— § 2 —

Un problema per l'equazione $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta u = 0$.

4. - Nello stesso dominio D del § precedente, ci proponiamo ora di *determinare una funzione $u(x, y)$ continua in D, che sia soluzione regolare della equazione $\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Delta u = 0$ in $D - FD$ e tale che*

$$(4) \qquad \begin{cases} u(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta) = f(\vartheta) & , \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi \quad , \quad su\ FD, \\ u(0, y) \qquad\quad = g(y) & , \quad -1 \leq y \leq 1 \quad , \quad e \\ u_x(0, y) \qquad\quad = h(y) & , \quad -1 < y < 1 \quad , \quad sul\ dia- \end{cases}$$

metro $x = 0$ di D, ove $f(\vartheta)$, $g(y)$ ed $h(y)$ sono funzioni assegnate, con f continua, periodica di periodo 2π in $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ e derivabile in $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ e $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, g ed h continue in $-1 \leq y \leq 1$, due volte derivabili nei punti interni a questo intervallo e tali che $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g(-1)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g(1)$, $f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = h(-1)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -h(1)$.

Cerchiamo se è possibile determinare una soluzione di questo problema che sia della forma

$$u(x, y) = v(x, y) + \lambda(y)x + \nu(y)$$

---

[9]) loc. cit. in [2]) pag. 10.

con v armonica in $D - FD$ e continua in D e $\lambda(y)$. $\nu(y)$ continue in $-1 \leq y \leq 1$ e due volte derivabili nei punti interni a questo intervallo.

Possiamo sempre ridurci al caso in cui si abbia $h(-1) = h(1) = 0$. Infatti, in caso contrario, posto $a = \dfrac{h(1) - h(-1)}{2}$ $b = \dfrac{h(1) + h(-1)}{2}$ la funzione $u_0(x, y) = (ay + b)x$ riesce soluzione regolare della equazione data in$D - FD$ ed è tale che $\lim\limits_{y \to -1+} \left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right)_{(0, y)} = h(-1)$, $\lim\limits_{y \to 1-} \left(\dfrac{\partial u_0}{\partial x}\right)_{(0, y)} = h(1)$.

Supporremo dunque che sia $h(-1) = h(1) = f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Se si esprime v mediante un integrale di Poisson, le relazioni (4) richiedono che si abbia:

$$
(4') \quad \begin{cases} \mu(\vartheta) + \lambda(\operatorname{sen} \vartheta) \cos \vartheta + \nu(\operatorname{sen} \vartheta) = f(\vartheta) \quad , \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{1 - y^2}{r^2} \mu(\vartheta) d\vartheta + \nu(y) = g(y) \quad , \quad -1 < y < 1, \\[2ex] \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{(1 - y^2) \cos \vartheta}{r^4} \mu(\vartheta) d\vartheta + \lambda(y) = h(y) \quad , \quad -1 < y < 1, \end{cases}
$$

con $\mu(\vartheta)$ continua e periodica di periodo 2π in $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$. Da queste si traggono, per $-1 < y < 1$, le equazioni

$$
\nu(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - y^2}{r^2} \nu(\operatorname{sen} \vartheta) d\vartheta = g(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - y^2}{r^2} f(\vartheta) d\vartheta,
$$

$$
\lambda(y) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - y^2}{r^4} \cos^2 \vartheta \lambda(\operatorname{sen} \vartheta) d\vartheta =
$$

$$
= h(y) - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - y^2}{r^4} \cos \vartheta f(\vartheta) d\vartheta.
$$

In accordo con il § precedente poniamo allora in $-1<y<1$

$$g^*(y)=g'(y)-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-y^2}{r^2}f(\vartheta)d\vartheta\,,$$

$$h^*(y)=h(y)-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-y^2}{r^4}\cos\vartheta f(\vartheta)d\vartheta$$

ed $y=\operatorname{sen}\tau$, $-\frac{\pi}{2}<\tau<\frac{\pi}{2}$. Giungiamo così alle due equazioni integrali

$$\nu(\operatorname{sen}\tau)-\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\tau}{r^2}\nu(\operatorname{sen}\vartheta)d\vartheta=g^*(\operatorname{sen}\tau)$$

$$\lambda(\operatorname{sen}\tau)-\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\tau\cos^2\vartheta}{r^4}\lambda(\operatorname{sen}\vartheta)d\vartheta=h^*(\operatorname{sen}\tau). \tag{5}$$

5. - Supponiamo ora anche qui che *le funzioni $g^*(y)$ ed $h^*(y)$ soddisfino ad una condizione di Hölder di esponenti α e β $0<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$, rispettivamente in $y=-1$ ed $y=1$.* Sappiamo così trovare senz'altro una soluzione della prima delle due equazioni ottenute, poichè questa coincide con la (2) del n. 1. La funzione $\nu(y)$ che se ne trae riesce continua in $-1\leq y\leq 1$, due volte derivabile come la g nei punti interni a questo intervallo ed hölderiana di esponente α in $y=-1$ ed $y=1$. *Per $\alpha<1$, l'ipotesi fatta su g^* sarà certamente soddisfatta non appena lo sia per la g, mentre quella sulla h^* lo sarà per es. quando anche h è hölderiana di esponente β in $y=-1$ ed $y=1$ e di più f lo è di un esponente γ, $\beta+1<\gamma\leq 2$, in $\vartheta=-\frac{\pi}{2}$ e $\vartheta=\frac{\pi}{2}$.*

Risulta infatti

$$\frac{|h^*(y)|}{(1-y^2)^\beta} \leq \frac{|h(y)|}{(1-y^2)^\beta} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{(1-y^2)^{1-\beta}|\cos\vartheta|}{r^4}\left|f(\vartheta)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| d\vartheta +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{(1-y^2)^{1-\beta}|\cos\vartheta|}{r^4}\left|f(\vartheta)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| d\vartheta$$

e quindi il primo membro sarà limitato in $-1 < y < 1$ se tale risulta $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-y^2)^{1-\beta}\cos^{1+\gamma}\vartheta}{r^4}\, d\vartheta$. Applicando la diseguaglianza di Hölder con esponenti $\frac{1}{2-\gamma}$, $\frac{1}{\gamma-1}$ si ha subito

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-y^2)^{1-\beta}\cos^{1+\gamma}\vartheta}{r^4}\, d\vartheta \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi}(1-y^2)^{\gamma-\beta-1}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-y\;)\cos^2\vartheta}{r^4}\, d\vartheta\right)^{2-\gamma}\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\vartheta}{r^4}\, d\vartheta\right)^{\gamma-1}$$

nella quale il primo integrale al secondo membro è uguale a $\frac{\pi}{2}$, mentre il secondo risulta, dopo calcoli elementari, dato da

$$\begin{cases} \dfrac{1+y^2}{2y^3}\log\dfrac{1+y}{1-y} - \dfrac{1}{y^2} & \text{per} \quad y \neq 0 \quad \text{in} \quad -1 < y < 1 \\[2ex] \dfrac{4}{3} & \text{per} \quad y = 0 \end{cases}$$

Si ha dunque

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-y^2)^\beta\cos^{1+\gamma}\vartheta}{r^4}\, d\vartheta \leq \left[\frac{2}{\pi}(1-y^2)^{\frac{\gamma-\beta-1}{\gamma-1}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\vartheta}{r^4}\, d\vartheta\right]^{\gamma-1},$$

$$-1 < y < 1,$$

ove, come subito si mostra, il secondo membro è una funzione continua in $-1 < y < 1$, infinitesima per $y \to -1+$ ed $y \to 1-$ se è $\gamma - \beta - 1 > 0$.

Sia dunque:

$$\frac{|h^*(y)|}{(1-y^2)^\beta} = \frac{|h^*(\text{sen}\,\tau)|}{\cos^{2\beta}\tau} \leq L, \quad \text{per} \quad -1 < y < 1, \ -\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$$

con L costante > 0 e $0 < \beta \leq 1$.

6. - Costruiamo allora in $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$ la successione di funzioni:

$$\lambda_0(\text{sen}\,\tau) = h^*(\text{sen}\,\tau)$$

$$\lambda_n(\text{sen}\,\tau) = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\tau \cos^2\vartheta}{r^4}\lambda_{n-1}(\text{sen}\,\vartheta)d\vartheta, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

e cerchiamo, nello stesso intervallo, una maggiorazione per

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2-2\beta}\tau \cos^{2+2\beta}\vartheta}{r^4}\,d\vartheta.$$

La diseguaglianza di Hölder con esponenti $\frac{1}{1-\beta}, \frac{1}{\beta}$ dà luogo a

$$\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2-2\beta}\tau \cos^{2+2\beta}\vartheta}{r^4}\,d\vartheta \leq \frac{2}{\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\tau\cos^2\vartheta}{r^4}\,d\vartheta\right)^{1-\beta}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\vartheta}{r^4}\,d\vartheta\right)^{\beta} = \left(\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\vartheta}{r^4}\,d\vartheta\right)^{\beta} \leq \left(\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3\vartheta}{r^3}\,d\vartheta\right)^{\beta}$$

in cui l'ultimo integrale, integrato per parti, risulta eguale a $\frac{4}{3}$. Si ha dunque infine

$$(6)\qquad \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2-2\beta}\tau \cos^{2+2\beta}\vartheta}{r^4}\, d\vartheta \leq \left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{4}{3}\right)^{\beta} < 1 \quad , \quad -\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}.$$

Varranno dunque in questo intervallo le successive maggiorazioni:

$$|\lambda_0(\mathrm{sen}\,\tau)| \leq L\cos^{2\beta}\tau\,,$$

$$|\lambda_1(\mathrm{sen}\,\tau)| \leq L\cos^{2\beta}\tau\,\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2-2\beta}\tau \cos^{2+2\beta}\vartheta}{r^4}\, d\vartheta \leq L\cos^{2\beta}\tau\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{4}{3}\right)^{\beta}$$

$$|\lambda_n(\mathrm{sen}\,\tau)| \leq L\cos^{2\beta}\tau\left[\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{4}{3}\right)^{\beta}\right]^n, \qquad n = 1,\ 2, \ldots .$$

La serie $\sum_{0}^{\infty}{}_n\, \lambda_n(\mathrm{sen}\,\tau)$ *è allora uniformemente convergente in* $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$ *ed ha per somma una funzione continua in tale intervallo che è soluzione della* (5). *Da essa, posto* $\lambda(-1) = \lambda(1) = 0$, *otteniamo una funzione* $\lambda(y)$ *continua in* $-1 \leq y \leq 1$, *due volte derivabile come la h nei punti interni a questo intervallo e soddisfacente ad una condizione di Hölder di esponente* β *in* $y = -1$ *ed* $y = 1$.

La prima delle (4') fornisce poi, note λ e ν, la funzione $\mu(\vartheta)$.

Il metodo di approssimazioni successive seguito fornisce anche una prima considerazione sull'unicità della soluzione del problema considerato. Esso infatti assicura che la soluzione trovata è l'unica che possa esprimersi nella forma voluta con $\lambda(y)$ e $\nu(y)$ soddisfacenti ad una condizione di Hölder in $y = -1$ ed $y = 1$.

— § 3 —

Un problema per l'equazione $\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Delta u = 0$.

7. - Vogliamo infine considerare il problema di *determinare una funzione $u(x, y)$ di classe $C^{(1)}$ nel dominio D dei §§ precedenti, la quale sia in $D - FD$ soluzione regolare della equazione $\frac{\partial}{\partial x}\Delta\Delta u = 0$ e per la quale riesca*

$$(7) \quad \begin{cases} u(\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta) = f(\vartheta) \quad , \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi \quad , \quad e \\ \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{FD} = h(\vartheta) \quad , \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi \quad , \quad su\ FD\ e \\ u(0, y) = g(y) \quad , \quad -1 \leq y \leq 1 \quad , \quad sul\ dia- \end{cases}$$

metro $x = 0$ di D, ove si è indicata con n la normale interna ad FD ed f, g, h sono funzioni assegnate, la f periodica di periodo 2π e di classe $C^{(1)}$ in $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$, la g di classe $C^{(1)}$ in $-1 \leq y \leq 1$ e quattro volte derivabile nei punti interni a questo intervallo e la h continua e periodica di periodo 2π in $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$. Dovrà poi essere $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g(-1)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = g(1)$, $h\left(-\frac{\pi}{2}\right) = g'(-1)$, $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = -g'(1)$.

Cerchiamo di determinare una soluzione che sia della forma:

$$u(x, y) = v(x, y) + \nu(y)$$

con v di classe $C^{(1)}$ in D e biarmonica in $D - FD$ e ν di classe $C^{(1)}$ in $-1 \leq y \leq 1$ e quattro volte derivabile nei punti interni di questo intervallo.

Supponiamo che la funzione $\nu(y)$ si annulli con la sua derivata prima in $y = -1$ ed $y = 1$, potendo sempre ridurci a questo caso aggiungendo e togliendo alla u il polinomio $P(y)$ di terzo grado in y per cui è $P(-1) = \nu(-1)$, $P(1) = \nu(1)$, $P'(-1) = \nu'(-1)$, $P'(1) = \nu'(1)$. Il rapporto $\frac{\nu(y)}{1 - y^2}$ sarà allora limitato in $-1 < y < 1$ ed infinitesimo per $y \to -1+$ ed $y \to 1-$.

La funzione $v(x,y)$ potrà esprimersi in $D - FD$ mediante la classica formula di Lauricella

$$v(x, y) =$$

$$= \frac{(1-x^2-y^2)^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(1-x\cos\vartheta - y \operatorname{sen}\vartheta)\mu(\vartheta) + [1-x^2-y^2-2(x\cos\vartheta + y\operatorname{sen}\vartheta)]\sigma(\vartheta)}{[1-x^2-y^2-2(x\cos\vartheta + y\operatorname{sen}\vartheta)]^2} d\vartheta,$$

ove $\mu(\vartheta)$ è periodica di periodo 2π e di classe $C^{(1)}$ in $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ e rappresenta i valori assunti da v su FD, mentre $\sigma(\vartheta)$ è continua e periodica di periodo 2π in $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$ e rappresenta i valori assunti da $\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_{FD}$.

Per la funzione u le condizioni (7) divengono dunque:

$$(7') \quad \begin{cases} \mu(\vartheta) + \nu(\operatorname{sen}\vartheta) = f(\vartheta) \qquad , \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \\ \sigma(\vartheta) - \nu'(\operatorname{sen}\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta = h(\vartheta) \qquad , \quad -\pi \leq \vartheta \leq \pi, \\ \dfrac{(1-y^2)^2}{4\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(1-y\operatorname{sen}\vartheta)\mu(\vartheta) + r^2\sigma(\vartheta)}{r^4} d\vartheta + \nu(y) = g(y), \\ \qquad\qquad -1 < y < 1. \end{cases}$$

Ne segue che deve essere soddisfatta la equazione

$$\nu(y) - \frac{(1-y^2)^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(1-y\operatorname{sen}\vartheta)\nu(\operatorname{sen}\vartheta) - r^2\nu'(\operatorname{sen}\vartheta)\operatorname{sen}\vartheta}{r^4} d\vartheta =$$

$$= g(y) - \frac{(1-y^2)^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(1-y\operatorname{sen}\vartheta)f(\vartheta) + r^2 h(\vartheta)}{r^4} d\vartheta.$$

Scomponendo opportunamente la funzione integranda a primo membro ed eseguendo una integrazione per parti, ove si tenga conto che $\frac{\nu(\operatorname{sen}\vartheta)}{\cos^2\vartheta}$ è limitata in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, questa equazione si trasforma nella

$$\nu(y) - \frac{(1-y)^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{r^4} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \vartheta}\right) \nu(\operatorname{sen} \vartheta) d\vartheta = g^*(y),$$

ove si è posto, in $-1 < y < 1$,

$$g^*(y) = g(y) - \frac{(1-y^2)^2}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2(1-y \operatorname{sen} \vartheta) f(\vartheta) + r^2 h(\vartheta)}{r^4} d\vartheta.$$

La $g^*(y)$, ove si ponga $g^*(-1) = g^*(1) = 0$, è di classe $C^{(1)}$ in $-1 \leq y \leq 1$ e si annulla con la sua derivata per $y = -1$ ed $y = 1$, come segue dalle relazioni cui soddisfano le f, g, h negli estremi del diametro $x = 0$ di D. Il rapporto $\dfrac{g^*(y)}{1-y^2}$ sarà pertanto limitato in $-1 < y < 1$ ed infinitesimo per $y \to -1+$ ed $y \to 1-$. Se dunque si pone $y = \operatorname{sen} \tau$, $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$ l'equazione cui si è giunti si può scrivere

$$(8) \quad \frac{\nu(\operatorname{sen} \tau)}{\cos^2 \tau} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\pi} \frac{\cos^2 \tau \cos^2 \vartheta}{r^4} + \frac{1}{2\pi} \frac{\cos^2 \tau}{r^2}\right) \frac{\nu(\operatorname{sen} \vartheta)}{\cos^2 \vartheta} d\vartheta = \frac{g^*(\operatorname{sen} \tau)}{\cos^2 \tau}.$$

Il nucleo di questa equazione integrale nella funzione incognita $\dfrac{\nu(\operatorname{sen} \tau)}{\cos^2 \tau}$ è dunque la semisomma dei nuclei delle equazioni (2) e (5).

8. - Una ipotesi di hölderianità sulla $g^*(y)$ ci permetterà anche qui di determinare una soluzione della equazione (8). *Supporremo precisamente che la* g^* *soddisfi ad una condizione di Hölder di esponente* $1 + \delta$, $0 < \delta \leq 1$, *in* $y = -1$ *ed* $y = 1$. Ciò si verifica in particolare quando f', h, g' *sono hölderiane di esponente* δ *in* $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ *e* $y = -1$, $y = 1$ *rispettivamente.*

Risulta infatti

$$g^{*\prime}(y) = g'(y) - \frac{1-y^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\vartheta}{r^2}f'(\vartheta)d\vartheta - \frac{(1-y^2)^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos\vartheta}{r^4}f'(\vartheta)d\vartheta +$$

$$+\frac{y}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-y^2}{r^2}h(\vartheta)d\vartheta + \frac{1-y^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\vartheta)\frac{d}{d\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{r^2}d\vartheta,$$

e quindi

$$\frac{|g^{*\prime}(y)|}{(1-y^2)^\delta} \leq \frac{|g'(y)-yg'(1)|}{(1-y^2)^\delta} + \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-y^2)^{1-\delta}}{r^2}\cos\vartheta f'(\vartheta)d\vartheta\right| +$$

$$+\frac{(1-y^2)^{2-\delta}}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{|\cos\vartheta|}{r^4}|f'(\vartheta)|d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{(1-y^2)^{2-\delta}}{r^4}|\cos\vartheta|\left|f'(\vartheta)-\right.$$

$$\left.-f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|d\vartheta + \left|\frac{y}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-y^2)^{1-\delta}}{r^2}\left(h(\vartheta)-h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)d\vartheta\right| +$$

$$+\frac{(1-y^2)^{1-\delta}}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}|h(\vartheta)|\left|\frac{d}{d\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{r^2}\right|d\vartheta +$$

$$+\frac{(1-y^2)^{1-\delta}}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\left|h(\vartheta)-h\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|\left|\frac{d}{d\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{r^2}\right|d\vartheta +$$

$$+\frac{(1-y^2)^{1-\delta}}{2\pi}\left|h\left(\frac{\pi}{2}\right)\int_{0}^{\pi}\frac{d}{d\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{r^2}d\vartheta\right|.$$

Il primo termine a secondo membro di questa diseguaglianza resta limitato in $0 \leq y < 1$ per la hölderianità della g' e così pure il secondo ed il quinto ove si tenga presente quanto ricordato all'inizio del n. 2 sulla hölderianità delle funzioni armoniche in $D - FD$ e continue in D, assumenti su FD valori che soddisfano in un punto ad una condizione di Hölder. Anche il terzo ed il quarto termine sono limitati in $0 \leq y < 1$ poichè sono maggiorati, a meno di un fattore positivo costante, rispettivamente da

$$(1-y^2)^{2-\delta}\int_{-\pi}^{0}\frac{|\cos\vartheta|}{r^4}\,d\vartheta\leq\pi\,\frac{(1-y^2)^{2-\delta}}{(1+y^2)^2}$$

e

$$(1-y^2)^{2-\delta}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{\delta+1}\vartheta}{r^4}\,d\vartheta\leq(1-y^2)^{2-\delta}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\vartheta}{r^4}\,d\vartheta\right)^{1-\delta}\cdot$$

$$\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\vartheta}{r^4}\,d\vartheta\right)^{\delta}=(1-y^2)^{2-2\delta}\cdot\left(\frac{2}{(1-y^2)^2}\right)^{1-\delta}\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\delta}\leq 2.$$

Ricordando poi che è $\dfrac{\cos^2\vartheta}{r^2}\leq 1$ per ogni ϑ di $(-\pi,\pi)$ ed ogni y interno a $(-1,1)$ si può scrivere

$$\left|\frac{d}{d\vartheta}\frac{\cos\vartheta}{r^2}\right|\leq\frac{|2y\cos^2\vartheta|}{r^4}+\frac{|\operatorname{sen}\vartheta|}{r^2}\leq\frac{3}{r^2}$$

e pertanto, a meno di un fattore positivo costante, il sesto termine sarà maggiorato in $0\leq y<1$ da

$$(1-y^2)^{1-\delta}\int_{-\pi}^{0}\frac{d\vartheta}{r^2}\leq\frac{(1-y^2)^{1-\delta}}{1+y^2},$$

mentre per il settimo termine si dovrà ancora applicare la proprietà di hölderianità delle funizoni armoniche, menzionata più sopra. Eseguendo l'integrale che figura all'ultimo termine si vede poi che anche questo è limitato in $0\leq y<1$. Considerazioni analoghe valgono nell'intervallo $-1<y\leq 0$, e si può così concludere con quanto affermato.

Supporremo dunque che il rapporto $\dfrac{g_*(y)}{(1-y)^{1+\delta}}$ resti limitato in $-1<y<1$ e quindi che in $-\frac{\pi}{2}<\tau<\frac{\pi}{2}$ si abbia

$$\frac{|g^*(\operatorname{sen}\tau)|}{\cos^{2+2\delta}\tau}\leq M$$

con M costante positiva e $0<\delta\leq 1$.

9. - Per trovare una soluzione della equazione integrale (8), poniamo allora in $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$:

$$\nu_0(\operatorname{sen}\tau) = g^*(\operatorname{sen}\tau),$$

$$\nu_n(\operatorname{sen}\tau) = \cos^2\tau \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\pi}\frac{\cos^2\tau\cos^2\vartheta}{r^4} + \frac{1}{2\pi}\frac{\cos^2\tau}{r^2}\right)\frac{\nu_{n-1}(\operatorname{sen}\vartheta)}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta,$$
$$n = 1,\ 2, \ldots .$$

Se si tengono allora presenti le (3) e (6) si traggono le successive maggiorazioni:

$$|\,\nu_0(\operatorname{sen}\tau)\,| \leq M\cos^{2+2\delta}\tau\ ,$$

$$|\,\nu_n(\operatorname{sen}\tau)\,| \leq M\cos^{2+2\delta}\tau\left[\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{4}{3}\right)^{\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\delta}\right]^n,$$
$$n = 1,\ 2, \ldots,\ -\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}.$$

La serie $\sum_0^{\infty}{}_n\, \nu_n(\operatorname{sen}\tau)$ è allora uniformemente convergente in $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$, poichè risulta $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\,\frac{4}{3}\right)^{\delta} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\delta} < 1$, *ed avrà per somma una funzione* $\nu(\operatorname{sen}\tau)$, *continua in* $-\frac{\pi}{2} < \tau < \frac{\pi}{2}$ ed infinitesima con $\frac{\nu(\operatorname{sen}\tau)}{\cos^2\tau}$ per $\tau \to -\frac{\pi}{2}+$ e $\tau \to \frac{\pi}{2}-$, *che riesce soluzione della* (8). *La funzione* $\nu(y)$ *che da essa si ottiene ponendo* $\nu(-1) = \nu(1) = 0$ *è di classe* $C^{(1)}$ *in* $-1 \leq y \leq 1$ *e di più la sua derivata prima soddisfa ad una condizione di Hölder di esponente* δ *in* $y = -1$ *ed* $y = 1$, *se ciò accade per* $g^{*\prime}$.
Si ha infatti

$$\nu(y) = (1-y^2)\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-y^2}{r^4}\,\nu(\operatorname{sen}\vartheta)\,d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-y^2}{r^2}\,\frac{\nu(\operatorname{sen}\vartheta)}{\cos^2\vartheta}\right] + g^*(y)$$

e quindi la funzione $\nu(y)$ *sarà quattro volte derivabile, come* *la g, nei punti interni a* $(-1, 1)$; *inoltre si avrà*

$$\nu'(y) = -\frac{4y}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-y^2}{r^4}\nu(\operatorname{sen}\vartheta)d\vartheta - \frac{2y}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-y^2}{r^2}\frac{\nu(\operatorname{sen}\vartheta)}{\cos^2\vartheta}d\vartheta -$$

$$-\frac{4}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-y^2)^2(y-\operatorname{sen}\vartheta)}{r^6}\nu(\operatorname{sen}\vartheta)d\vartheta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-y^2)^2(y-\operatorname{sen}\vartheta)}{r^4}\frac{\nu(\operatorname{sen}\vartheta)}{\cos^2\vartheta}d\vartheta + g^{*\prime}(y).$$

In questa tenendo conto che $\dfrac{\nu(\operatorname{sen}\tau)}{\cos^{2+2\delta}\tau}$ rimane limitata in $-\dfrac{\pi}{2} < \tau < \dfrac{\pi}{2}$ e ricordando i risultati del n. 5 e del n. 2, si vede che il primo e secondo termine a secondo membro soddisfano certamente ad una condizione di Hölder di esponente δ in $y = -1$ ed $y = 1$, mentre osservando che risulta $\dfrac{|y-\operatorname{sen}\vartheta|}{r} \leq 1$ e $\dfrac{\cos^2\vartheta}{r^2} \leq 1$ per ogni y e ϑ interni a $(-1, 1)$ e $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, i due ultimi termini possono essere maggiorati, a meno di fattori positivi costanti, da

$$(1-y^2)^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2\delta}\vartheta}{r^3}d\vartheta \leq (1-y^2)^2\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{r^3}\right)^{1-\delta}\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\vartheta}{r^3}d\vartheta\right)^{\delta} \leq$$

$$\leq (1-y^2)^{\delta}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-y^2}{r^2}\frac{1-y^2}{r}d\vartheta\right)^{1-\delta}\cdot\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-y^2}{r^2}\cos\vartheta\right)^{\delta}$$

ove, essendo $\frac{1-y^2}{r} < 2$ in $-1 < y < 1$, gli integrali all'ultimo membro sono certamente limitati in $-1 < y < 1$.

Dalle prime due equazioni (7′) si traggono poi *le* $\mu(\vartheta)$ *e* $\sigma(\vartheta)$. *Esse possiedono la stessa regolarità di* $f(\vartheta)$ *e* $h(\vartheta)$ *rispettivamente. In particolare* μ' *e* σ *saranno hölderiane di esponente* δ *in* $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ *e* $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, *se tali sono* f' *ed* h.

Anche qui si può poi affermare che la soluzione trovata è l'unica che sia esprimibile nella forma considerata, con $\nu(y)$ soddisfacente ad una condizione di Hölder di esponente > 1 in $y = -1$ ed $y = 1$.