RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LETIZIA DAL SOGLIO

Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di n-celle

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 27 (1957), p. 103-121

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1957__27__103_0>

GRADO TOPOLOGICO E TEOREMI DI ESISTENZA DI PUNTI UNITI PER TRASFORMAZIONI PLURIVALENTI DI n-CELLE

Memoria (*) *di* LETIZIA DAL SOGLIO (*a Padova*)

In questa Memoria estendo al caso n-dimensionale i risultati conseguiti ed esposti in un mio precedente lavoro per il caso 3-dimensionale [1]). Precisamente introduco la nozione di grado topologico (n. 5) per trasformazioni plurivalenti di un sottoinsieme E dello spazio numerico euclideo $\mathcal{E}^{(n)}$, e deduco poi, dalle proprietà di tale grado, alcuni criteri di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di n-celle.

La nozione attuale di grado topologico si riesce ad introdurre, come avveniva del resto nel caso 3-dimensionale, solo per trasformazioni che soddisfino ad opportune ipotesi (n. 2); è da rilevare tuttavia che tali ipotesi si riducono, quando $n = 3$, a quelle già date nel caso 3-dimensionale.

1. - In questo numero intendo precisare il significato di notazioni e simboli usati nel presente lavoro e dare alcune definizioni utili per il seguito.

Lo spazio ambiente è lo spazio euclideo n-dimensionale $\mathcal{E}^{(n)}$ che suppongo orientato.

(*) Pervenuta in Redazione il 20 marzo 1957.
Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

1) L. DAL SOGLIO, *Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di 3-celle.* [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Univ. di Padova (1956), pp. 386-405].

Inoltre mi riferisco sempre alla teoria dell'omologia singolare di Eilenberg; pertanto considero catene singolari intere del complesso singolare totale $S(\mathcal{E}^{(n)})$ [2].

Col simbolo $|U|$ indico il supporto della catena U, vale a dire l'insieme dei punti dei simplessi che compaiono in U con coefficiente non nullo.

Il simbolo $\boldsymbol{k}(U)$ rappresenta invece il sostegno simpliciale (o semplicemente sostegno) di U, cioè il complesso chiuso [3]) costituito dai simplessi che compaiono in U con coefficiente non nullo e da tutte le loro faccie.

Con K indico generalmente un sottocomplesso chiuso di $S(\mathcal{E}^{(n)})$, mentre un simplesso singolare j-dimensionale generico viene indicato con σ^j.

Farò uso inoltre dei coefficienti di incidenza $[\sigma^j : \sigma^{j-1}]$, rappresentando $[\sigma^j : \sigma^{j-1}]$, il coefficiente con cui σ^{j-1} compare nel contorno di σ^j.

DEF. I^a - Dato un complesso K ed un punto $x \in \mathcal{E}^{(n)}$, dicesi stella di centro x relativa a K, $St(x, K)$, l'insieme unione dei supporti dei simplessi σ^j di K per cui $x \in |\sigma^j|$ [4]).

DEF. II^a - Un insieme A di $\mathcal{E}^{(n)}$ dicesi pluriconvesso quando è unione di un numero finito di insiemi chiusi, limitati e convessi, a due a due disgiunti.

OSS. I^a - L'intersezione di due insiemi pluriconvessi è ancora un insieme pluriconvesso.

Infatti se $A = \bigcup\limits_i A_i$ e $B = \bigcup\limits_k B_k$ (con A_i, B_k insiemi chiusi limitati e convessi ecc.) $A \cup B = \bigcup\limits_{ik} A_i \cap B_k$ dove gli $A_i \cap B_k$ se non sono vuoti, sono insiemi chiusi limitati e convessi, in numero finito e a due a due disgiunti.

[2]) Cfr. S. EILENBERG, *Singular Homology Theory*. [Annals of Math. 1944, Princeton University].

[3]) Un complesso K dicesi chiuso se contiene tutte le faccie di ogni suo simplesso.

[4]) Si noti che, se K è finito, vi è un numero finito di stelle distinte e che inoltre, per ogni punto $x \in \mathcal{E}^{(n)}$, $St(x, K)$ è un continuo.

Oss. IIª - Dal teorema di dualità di Alexander discende che il complementare di un insieme pluriconvesso è un insieme connesso ed aciclico nelle dimensioni 1, 2, ... $n-2$.

Se A è un insieme chiuso e limitato di $\mathcal{E}^{(n)}$ potremo considerare l'*involucro convesso* di A, cioè il più piccolo insieme chiuso e convesso contenente A. *L'involucro convesso* di A sarà indicato con $inv\{A\}$.

2. - Nel seguito sarà presa in considerazione una trasformazione $\mathcal{T}$, definita in un sottoinsieme $E \subset \mathcal{E}^{(n)}$ per cui siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

I. - L'immagine $\mathcal{T}(P)$ di P sia per ogni $P \in E$ un sottoinsieme compatto di $\mathcal{E}^{(n)}$.

II. - $\mathcal{T}$ sia superiormente semicontinua in tutto E (vale a dire per ogni $P_0 \in E$, comunque si fissi $\varepsilon > 0$ sia possibile determinare un ρ-intorno di P_0, $[P_0]_\rho$, per cui si abbia $\mathcal{T}(P) \subset [\mathcal{T}(P_0)]_\varepsilon$ per ogni $P \in [P_0]_\rho \cdot E$ [5]). Inoltre indicando con E_0 l'insieme dei punti $P \in E$ per cui $P \in \mathcal{T}(P)$ si abbia che:

III. - L'immagine $\mathcal{T}(P)$ di P sia, per ogni $P \in E - E_0$, rinchiudibile in un insieme pluriconvesso non contenente P.

Se $P \in E$ chiameremo *pezzo* di $\mathcal{T}(P)$ un sottoinsieme τ di $\mathcal{T}(P)$ che risulti contemporaneamente aperto e chiuso rispetto a $\mathcal{T}(P)$ potendo τ in particolare coincidere con l'insieme vuoto o con $\mathcal{T}(P)$. Si fa allora l'ulteriore ipotesi:

IV. - Per ogni $P \in E$ sia assegnata una funzione $F_P(\tau)$ dei *pezzi* τ di $\mathcal{T}(P)$, a valori in un gruppo additivo $\mathcal{G}$, additiva, tale cioè che se τ' e τ'' sono due *pezzi* disgiunti di $\mathcal{T}(P)$ risulti $F_P(\tau' + \tau'') = F_P(\tau') + F_P(\tau'')$.

Si osservi che, se A è un sottoinsieme di $\mathcal{E}^{(n)}$ la cui frontiera sia disgiunta da $\mathcal{T}(P_0)$ $(P_0 \in E)$ l'insieme $A \cdot \mathcal{T}(P_0)$ è un *pezzo* τ di $\mathcal{T}(P_0)$. Inoltre, se ε è un numero positivo minore della distanza tra $\mathcal{T}(P_0)$ e la frontiera di A, esiste, per

---

[5]) Se A è un insieme di punti di $\mathcal{E}^{(n)}$, col simbolo $[A]_\varepsilon$ (ε essendo un numero positivo) si indica l'ε-intorno aperto di A, ossia l'insieme dei punti di $\mathcal{E}^{(n)}$ che distano da A per meno di ε.

l'ipotesi II, un ρ-intorno di P_0, $[P_0]_\rho$, per cui se $P \in [P_0]_\rho \cdot E$ $\mathcal{T}(P) \subset [\mathcal{T}(P_0)]_\varepsilon$.
Quindi, se $P \in [P_0]_\rho \cdot E$, $A \cdot \mathcal{T}(P)$ è un *pezzo* di $\mathcal{T}(P)$ ed ha senso considerare la funzione $F_P[A \cdot \mathcal{T}(P)]$.

Si supporrà allora che:

V. - Se $P_0 \in E$ ed A è un sottoinsieme di $\mathcal{E}^{(n)}$ la cui frontiera sia disgiunta da $\mathcal{T}(P_0)$, si possa determinare un ρ-intorno di P_0, $[P_0]_\rho$, per cui se $P \in [P_0]_\rho \cdot E$ sia:

$$F_P[A \cdot \mathcal{T}(P)] = F_{P_0}[A \cdot \mathcal{T}(P_0)].$$

Oss. III[a] - Una trasformazione plurivalente $\mathcal{T}$ di E che faccia corrispondere ad ogni punto $P \in E$ un numero finito di punti soddisfa alle ipotesi I e III.

3. - Consideriamo un punto $P \in E$ ed un ciclo n-1-dimensionale Γ il cui supporto appartenga ad $\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{T}(P)$.

L'insieme $\mathcal{E}^{(n)} - |\Gamma|$ è costituito da un numero finito od al più da una infinità numerabile di insiemi aperti connessi, a due a due disgiunti, A_k. Per ogni k l'insieme $\tau_k = A_k \cdot \mathcal{T}(P)$ è un *pezzo* di $\mathcal{T}(P)$. I *pezzi* τ_k non vuoti sono in numero finito: infatti gli insiemi τ_k costituiscono un ricoprimento aperto (relativamente a $\mathcal{T}(P)$) di $\mathcal{T}(P)$; poichè $\mathcal{T}(P)$ è un compatto tale ricoprimento ammette un sottoricoprimento finito $\{\tau_{k_1}\ \tau_{k_2}\ \ldots..\ \tau_{k_n}\}$; ma allora, essendo i *pezzi* τ_k a due a due disgiunti, debbono essere necessariamente vuoti tutti i rimanenti τ_k.

Inoltre l'ordine[6]) di un punto $Q \in \tau_k$ rispetto al ciclo Γ non varia al variare di Q in τ_k, in quanto $\tau_k \subset A_k$ ed A_k è un componente connesso di $\mathcal{E}^{(n)} - |\Gamma|$. Indicando questo ordine con ν_k si pone:

$$\omega(P, \Gamma) = \Sigma \nu_k F_P(\tau_k) \tag{1}$$

la somma essendo estesa a tutti i *pezzi* τ_k non vuoti.

---

6) Cfr. P. ALEXANDROFF - H. HOPF, *Topologie*. Berlin, 1935, pp. 419-423, 458 e segg.

LEMMA I. - *Il numero* $\omega(P, \Gamma)$ *non varia al variare di* P *in un continuo* $I \subset E$ *la cui immagine* $\mathcal{T}(I)$ *non abbia punti comuni con* $|\Gamma|$.

Infatti se $P_0 \in I$ e se $\tau_k^0 = A_k \cdot \mathcal{T}(P_0)$, è possibile per la proprietà V del n. 2 determinare un numero $\rho > 0$, per cui risulti:

$$F_P[A_k \cdot \mathcal{T}(P)] = F_{P_0}[A_k \cdot \mathcal{T}(P_0)] \qquad \text{se} \qquad P \in [P_0]_\rho \cdot I.$$

Pertanto se $P \in [P_0]_\rho \cdot I$ si ha:

$$\omega(P, \Gamma) = \sum_k \nu_k F_P(\tau_k) = \sum_k \nu_k F_{P_0}(\tau_k^0)$$

dove ν_k è l'ordine di un qualsiasi punto $Q \in A_k$ rispetto al ciclo Γ. Ad ogni punto $P_0 \in I$ è possibile quindi associare un ρ-intorno $[P_0]_\rho$ tale che, variando P in $[P_0]_\rho \cdot I$, il numero $\omega(P, \Gamma)$ rimane costante. Ma essendo I un continuo $\omega(P, \Gamma)$ risulterà costante in tutto I come risulta dal teorema di ricoprimento di Pincherle - Borel.

Oss. IV. - Nelle ipotesi del lemma precedente si può attribuire significato al simbolo $\omega(I, \Gamma)$ mediante la posizione:

$$\omega(I, \Gamma) = \omega(P, \Gamma) \qquad \text{con} \qquad P \in I.$$

Possiamo inoltre affermare, e la dimostrazione è identica a quella data per $n = 3$ [7]), che:

Se Γ, Γ' e Γ'' sono tre cicli n-1-dimensionali di $\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{T}(P_0)$ e se $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ allora

$$\omega(P_0, \Gamma) = \omega(P_0, \Gamma') + \omega(P_0\ \Gamma''). \tag{2}$$

Più in generale se $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ sono cicli n-1-dimensionali di $\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{T}(P_0)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ interi relativi si ha:

$$\omega(P_0, \lambda_1\Gamma_1 + \dots + \lambda_r\Gamma_r) = \lambda_1\omega(P_0, \Gamma_1) + \dots + \lambda_r\omega(P_0, \Gamma_r). \tag{3}$$

---

[7]) V. loc. cit. in (1) pag. 391.

4. DEF. III. - Sia K un sottocomplesso del complesso singolare totale $S(E)$; una ***stella*** di K, $St(x, K)$, dicesi *normale* quando la sua immagine $\mathcal{T}(St(x, K))$ è rinchiudibile in un insième pluriconvesso disgiunto da $St(x, K)$.

DEF. IV. - Un complesso $K \subset S(E)$ dicesi *normale* se è finito e se ogni sua stella è *normale*.

LEMMA II. - *Se K è un sottocomplesso finito del complesso singolare totale $S(E - E_0)$, esiste una suddivisione baricentrica di K che è un complesso normale.*

Siano $K = {}^0K, {}^1K, {}^2K, \ldots, {}^rK, \ldots$ i complessi che si ottengono mediante successive suddivisioni baricentriche di K. Indichiamo con $\mathcal{G}_r$ l'insieme somma delle stelle *non normali* di ${}^rK$; $\mathcal{G}_r$ è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathcal{E}^{(n)}$ (cfr. (4) pag. 104).

Supponiamo che per ogni r sia $\mathcal{G}_r \neq 0$, possiamo allora considerare la successione di insiemi chiusi, limitati e non vuoti di $\mathcal{E}^{(n)}$:

$$\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots$$

Tale successione risulta monotona decrescente, vale a dire $\mathcal{G}_0 \supset \mathcal{G}_1 \supset \ldots$, poichè se $St(x, {}^{r+1}K)$ non è *normale* non lo è neppure $St(x, {}^rK)$ essendo $St(x, {}^{r+1}K) \subset St(x, {}^rK)$. Pertanto, in base al teorema di Cantor, esiste almeno un punto P_0 comune a tutti gli insiemi $\mathcal{G}_r$. Per l'ipotesi III del n. 2 $\mathcal{T}(P_0)$ è rinchiudibile in un insieme pluriconvesso R non contenente P_0. Sia ε un numero positivo minore della distanza di P_0 da R e della più piccola fra le mutue distanze degli insiemi convessi costituenti R. Per l'ipotesi II del n. 2 si può determinare un ρ-intorno di P_0, $[P_0]_\rho$ $(\rho < \frac{\varepsilon}{3})$, tale che $\mathcal{T}([P_0]_\rho \cdot E)$ sia contenuto in $[\mathcal{T}(P_0)]_{\frac{\varepsilon}{3}}$ e quindi, a maggior ragione in $[R]_{\frac{\varepsilon}{3}}$.

La chiusura dell'insieme $[R]_{\frac{\varepsilon}{3}}$ risulta pertanto, in base alla particolare scelta di ε e di ρ, un insieme pluriconvesso che rinchiude $\mathcal{T}([P_0]_\rho \cdot E)$ e che non ha punti comuni con $[P_0]_\rho$. Si osservi ora che, se δ_r è il massimo diametro delle stelle di ${}^rK$ si ha $\lim_{r\to\infty} \delta_r = 0$, quindi per r abbastanza grande le stelle di ${}^rK$ non *normali* contenenti P_0 sono interamente contenute in $[P_0]_\rho \cdot E$. Ma allora tali stelle risulterebbero normali. Dovrà essere dunque $\mathcal{G}_r = 0$ per r abbastanza grande, e per tali r, ${}^rK$ sarà *normale.*

5. - Consideriamo un n-1-ciclo Ξ *normale,* vale a dire un n-1-ciclo di un complesso normale K. Il ciclo Ξ ammette una rappresentazione del tipo:

$$\Xi = \sum_{\sigma^{n-1}\varepsilon K} \lambda(\sigma^{n-1})\sigma^{n-1}$$

dove i numeri $\lambda(\sigma^{n-1})$, $(\sigma^{n-1} \in K)$ sono interi relativi soddisfacenti alla:

$$(4) \qquad \sum_{\sigma^{n-1}\varepsilon K} \lambda(\sigma^{n-1})[\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] = 0.$$

Sia x^0 un punto ($= 0$ — simplesso) appartenente al complementare di *inv.* $\{\mathcal{T}(|K|\}$, (*inv.* $=$ *involucro convesso*). Si fissi, per ogni stella di K del tipo $St(\sigma^0, K)$, un sottoinsieme pluriconvesso di *inv.* $\{\mathcal{T}(|K|\}$, $R(\sigma^0)$, che contenga $\mathcal{T}(St(\sigma^0, K))$ e che sia disgiunto da $St(\sigma^0, K)$.

L'oss. II del n. 1 ci assicura che, se σ^0 è un simplesso di K ed $R(\sigma^0)$ l'insieme pluriconvesso ad esso associato, esiste una 1-catena $C^1(\sigma^0)$ appartenente ad $\mathcal{E}^{(n)} - R(\sigma^0)$ e tale che:

$$(5) \qquad \dot{C}^1(\sigma^0) = \sigma^0 - x^0.$$

Fissato un sistema di 1-catene siffatte, $\{C^1(\sigma^0)\}$, da associarsi agli 0-simplessi di K, si potrà associare ad ogni $\sigma^r \in K$ (per $r = 1, 2, \ldots, n-2$) una $r+1$-catena $C^{r+1}(\sigma^r)$, appartenente ad $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0\varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^0)$ e tale che soddisfi alla relazione ricorrente:

$$(5_1) \qquad \dot{C}^{r+1}(\sigma^r) = \sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}]C^r(\sigma^{r-1}) \text{ [8]}.$$

---

[8]) Qui e nel seguito, ove non vi sia pericolo di ambiguità la somma $\sum_{\sigma^i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ si intende estesa a tutti i $\sigma^i \varepsilon K$.

Infatti, ammesso che $C^r(\sigma^{r-1})$ appartenga ad $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^{r-1})} R(\sigma^0)$, si ha:

$$|\sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1})| \subset \mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^r).$$

Inoltre $\sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1})$ è, come discende facilmente dalle 5), 5_1) [9]), un r — ciclo di $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^0)$, omologo quindi a zero in $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^0)$ per $r = 1, \ldots, n-2$ (Cfr. Oss. I^a e II^a del n. 1).

Si consideri ora per ogni $\sigma^{n-1} \in K$ l'n-1-ciclo:

$$\Gamma(\sigma^{n-1}) = \sigma^{n-1} - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] C^{n-1}(\sigma^{n-2}) \text{ [10]}.$$

---

9) Infatti la frontiera di $\sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1})$, per $r > 1$, è data da:

$$\sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \sigma^{r-1} - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \sigma^{r-1} +$$
$$+ \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \sum_{\sigma^{r-2}} [\sigma^{r-1} : \sigma^{r-2}] C^{r-1}(\sigma^{r-2}) =$$
$$= \sum_{\sigma^{r-2}} C^{r-1}(\sigma^{r-2}) \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] [\sigma^{r-1} : \sigma^{r-2}] = 0$$

per note proprietà dei coefficienti di incidenza.

Per $r = 1$ si ha:

$$\dot{\sigma}^1 - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \dot{C}^1(\sigma^0) = \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \sigma^0 - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \sigma^0 + x^0 \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] =$$
$$= x^0 \sum [\sigma^1 : \sigma^0] = 0.$$

10) $\Gamma(\sigma^{n-1})$ è un ciclo, si ha infatti:

$$\dot{\Gamma}(\sigma^{n-1}) = \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \sigma^{n-2} - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \sigma^{n-2} +$$
$$+ \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] C^{n-2}(\sigma^{n-3}) =$$
$$= \sum_{\sigma^{n-3}} C^{n-2}(\sigma^{n-3}) \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3})] = 0.$$

Si osservi che $|\Gamma(\sigma^{n-1})| \subset \mathcal{E}^{(n)} - \bigcap\limits_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^{n-1})} R(\sigma^0)$ e che $\bigcap\limits_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^{n-1})} R(\sigma^0) \supset \mathcal{T}(|\sigma^{n-1}|)$; pertanto è lecito considerare per ogni $\sigma^{n-1} \in K$, $\omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1}))$.

Oss. V. - Se $[\sigma^{n-1} : \sigma'^{-2}] \neq 0$ allora

$$\omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1})) = \omega(|\sigma^{n-2}|, \Gamma(\sigma'^{-1}))$$

essendo

$$|\sigma^{n-2}| \subset |\sigma^{n-1}|.$$

Prendiamo ora in esame la seguente somma:

(6) $$\Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}) =$$

$$= \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda(\sigma'^{-1})\omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1})).$$

Si dimostra che $\Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\})$ dipende esclusivamente dal ciclo Ξ. Si potrà scrivere pertanto:

$$\Omega(\Xi) = \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda(\sigma^{n-1})\, \omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1}))$$

e chiamare $\Omega(\Xi)$, *grado della trasformazione* $\mathcal{T}$ *relativo al ciclo normale* Ξ.

Per giungere alla conclusione voluta proviamo intanto che $\Omega(\Xi)$ non dipende dal punto x^0, dal sistema di insiemi $\{R(\sigma^0)\}$, nè dai particolari sistemi di catene $\{C^{r+1}(\sigma^r)\}$ associate ai simplessi $\sigma^r \in K$, $(r = 0, 1, \ldots, n-2)$.

Siano $\{R'(\sigma^0)\}$, $\{C'^1(\sigma^0)\}$, ..., $\{C'^{n-1}(\sigma^{n-2})\}$, degli altri sistemi di insiemi e di catene associati ai simplessi di K e sia:

$$R'(\sigma^0) \subset inv.\ \{\mathcal{T}(|K|)\}$$

$$|C'^1(\sigma^0)| \subset \mathcal{E}^{(n)} - R'(\sigma^0)$$

$$\dot{C}'^1(\sigma^0) = \sigma^0 - x'^0 \qquad (x'^0 \in \mathcal{E}^{(n)} - inv.\ \{\mathcal{T}(|K|)\})$$

$$|\, C'^{r+1}(\sigma^r) \,| \subset \mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R'(\sigma^0)$$

$$\dot{C}'^{r+1}(\sigma^r) = \sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}]\, C'^r(\sigma^{r-1}) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-2).$$

Poichè x^0 ed x'^0 appartengono entrambi ad $\mathcal{E}^{(n)} - inv. \{\mathfrak{T}(|K|)\}$, e questo insieme è connesso, (Oss. II, n. 1)), potremo trovare una 1-catena C^1 di $\mathcal{E}^{(n)} - inv. \{\mathfrak{T}(|K|)\}$ la cui frontiera sia:

$$\dot{C}^1 = x'^0 - x^0.$$

La catena $C'^1(\sigma^0) - C^1(\sigma^0) + C^1$, $(\sigma^0 \in K)$, è allora un 1-ciclo di $\mathcal{E}^{(n)} - R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$, quindi, sempre per l'Oss. II del n. 1, è possibile determinare, per ogni $\sigma^0 \in K$, una 2-catena di $\mathcal{E}^{(n)} - R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$, $U^2(\sigma^0)$, tale che:

$$\dot{U}^2(\sigma^0) = C'^1(\sigma^0) - C^1(\sigma^0) + C^1. \tag{7}$$

Fissato un sistema di 2-catene siffatte, $\{U^2(\sigma^0)\}$, potremo trovare per ogni $\sigma^r \in K$, (e per $r = 1, 2, \ldots, n-3$) una $r+2$-catena $U^{r+2}(\sigma^r)$, appartenente ad $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$ e che soddisfi alla relazione ricorrente:

$$\dot{U}^{r+2}(\sigma^r) = C'^{r+1}(\sigma^r) - C^{r+1}(\sigma^r) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}]\, U^{r+1}(\sigma^{r-1}). \tag{7_1}$$

Infatti se $|\, U^{r+1}(\sigma^{r-1}) \,| \subset \mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^{r-1})} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$ allora è anche:

$$|\, C'^{r+1}(\sigma^r) - C^{r+1}(\sigma^r) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}]\, U^{r+1}(\sigma^{r-1}) \,| \subset$$

$$\subset \mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0).$$

Inoltre si riconosce facilmente in base alle (7), (7_1) che:

$$C'^{r+1}(\sigma^r) - C^{r+1}(\sigma^r) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}]\, U^{r+1}(\sigma^{r-1})$$

è un $r+1$-ciclo [11]) di $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$, omologo quindi a zero in $\mathcal{E}^{(n)} - \bigcap_{\sigma^0 \varepsilon k(\sigma^r)} R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$ per $r = 1, 2, \ldots, n-3$ (cfr. Oss. II del n. 1).

Ora se $\Gamma'(\sigma^{n-1})$ è l'$n-1$-ciclo associato al simplesso $\sigma^{n-1} \in K$, in relazione ai sistemi di catene $\{C'^{r+1}(\sigma^r)\}$ ($r = 0, \ldots, n-2$) si ha:

$$\Gamma'(\sigma^{n-1}) = \Gamma(\sigma^{n-1}) - \tag{8}$$
$$- \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] (C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2})).$$

Osservando che, per note proprietà dei coefficienti di incidenza,

$$\sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3})$$

è la $n-1$-catena nulla dalla (8) si ottiene la:

$$\Gamma'(\sigma^{n-1}) = \Gamma(\sigma^{n-1}) - \tag{9}$$

---

11) Infatti per $r > 1$ si ha:

$$\dot{C}'^{r+1}(\sigma^r) - \dot{C}^{r+1}(\sigma^r) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \dot{U}^{r+1}(\sigma^{r-1}) =$$
$$= \sigma^r - \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C'^r(\sigma^{r-1}) - \sigma^r + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] C^r(\sigma^{r-1}) +$$
$$+ \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}](C'^r(\sigma^{r-1}) - C^r(\sigma^{r-1})) + \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}] \sum_{\sigma^{r-2}} [\sigma^{r-1} : \sigma^{r-2}] U^r(\sigma^{r-2}) =$$
$$= \sum_{\sigma^{r-2}} U^r(\sigma^{r-2}) \sum_{\sigma^{r-1}} [\sigma^r : \sigma^{r-1}][\sigma^{r-1} : \sigma^{r-2}] = 0.$$

Per $r = 1$ si ha:

$$\dot{C}'^2(\sigma^1) - \dot{C}^2(\sigma^1) + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \dot{U}^2(\sigma^0) =$$
$$= \sigma^1 - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C'^1(\sigma^0) - \sigma^1 + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C^1(\sigma^0) + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0](C'^1(\sigma^0) - C^1(\sigma^0)) +$$
$$+ \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C^1 = C^1 \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] = 0.$$

$$- \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}](C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) +$$

$$+ \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3})).$$

Di qui per la (3) del n. 4 si ha:

$$\omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma'(\sigma^{n-1})) = \omega(|\sigma^{n-1}|, \Gamma(\sigma^{n-1})) -$$

$$- \omega(|\sigma^{n-1}|, \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}](C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) +$$

$$+ \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3}))).$$

e quindi:

$$\Omega(\Xi, K, x'^0, \{R'(\sigma^0)\}, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}) = \tag{10}$$

$$= \Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}) -$$

$$- \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \omega(|\sigma^{n-1}|, \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}](C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) -$$

$$- C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3}))).$$

Si noti che

$$C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] U^{n-1}(\sigma^{n-3})$$

è un ciclo [12]), pertanto, sempre per la (3) del n. 4 e per l'Oss. V

---

[12]) La frontiera di questa $n-1$-catena è data da:

$$\dot{C}'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - \dot{C}^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] \dot{U}^{n-1}(\sigma^{n-3}) =$$

$$= \sigma^{n-2} - \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] C'^{n-2}(\sigma^{n-3}) - \sigma^{n-2} + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] C^{n-2}(\sigma^{n-3}) +$$

$$+ \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}](C'^{n-2}(\sigma^{n-3}) - C^{n-2}(\sigma^{n-3}) + \sum_{\sigma^{n-4}} [\sigma^{n-3} : \sigma^{n-4}] U^{n-2}(\sigma^{n-4})) =$$

$$= \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}] \sum_{\sigma^{n-4}} [\sigma^{n-3} : \sigma^{n-4}] U^{n-2}(\sigma^{n-4}) =$$

$$= \sum_{\sigma^{n-4}} U^{n-2}(\sigma^{n-4}) \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2} : \sigma^{n-3}][\sigma^{n-3} : \sigma^{n-4}] = 0.$$

di questo numero potremo scrivere

$$\begin{aligned}(11)\qquad & \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1})\omega(|\sigma^{n-1}|, \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1}:\sigma^{n-2}](C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - \\ & \qquad - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2}:\sigma^{n-3}]U^{n-1}(\sigma^{n-3}))) = \\ & = \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1}:\sigma^{n-2}]\omega(|\sigma^{n-2}|, C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - \\ & \qquad - C^{n-1}(\sigma^{n-2}) + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2}:\sigma^{n-3}]U^{n-1}(\sigma^{n-3})) = \\ & = \sum_{\sigma^{n-2}} \omega(|\sigma^{n-2}|, C'^{n-1}(\sigma^{n-2}) - C^{n-1}(\sigma^{n-2} + \\ & \qquad + \sum_{\sigma^{n-3}} [\sigma^{n-2}:\sigma^{n-3}]U^{n-1}(\sigma^{n-3})) \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1})[\sigma^{n-1}:\sigma^{n-2}].\end{aligned}$$

Dalla (10) e dalla (11), tenendo conto della (4) si deduce

$$\begin{aligned}(12)\qquad & \Omega(\Xi, K, x'^0, \{R'(\sigma^0)\}, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}) = \\ & = \Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}).\end{aligned}$$

Resta ora da provare che $\Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\})$ non dipende da K. Si osservi che se $\boldsymbol{k}(\Xi)$ è il sostegno di Ξ, noi possiamo associare ad ogni $\sigma^0 \in \boldsymbol{k}(\Xi)$ l'insieme $R(\sigma^0) \cap \mathcal{T}(|\boldsymbol{k}(\Xi)|)$, e ad ogni $\sigma^r \in |\boldsymbol{k}(\Xi)|$, $(r = 0, 1, \ldots, n-2)$, la $r+1$-catena $C^{r+1}(\sigma^r)$ già associata allo stesso simplesso in quanto appartenente a K. Indicando con $\{R(\sigma^0)\}^*$ e $\{C^{r+1}(\sigma^r)\}^*$, i sistemi di insiemi e di catene associati ai simplessi $\boldsymbol{k}(\Xi)$, così ottenuti, si ha evidentemente

$$\begin{aligned}(13)\qquad & \Omega(\Xi, K, x^0, \{R(\sigma^0)\}, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}) = \\ & = \Omega(\Xi, \boldsymbol{k}(\Xi), x^0, \{R(\sigma^0)\}^*, \{C^{r+1}(\sigma^r)\}^*).\end{aligned}$$

Ora se Ξ è ciclo di un altro complesso normale K' ed $\{R'(\sigma^0)\}$, $\{C'^{r+1}(\sigma^r)\}$, sono i sistemi associati ai simplessi di K', potremo scrivere anche

$$\begin{aligned}(14)\qquad & \Omega(\Xi, K', x'^0, \{R'(\sigma^0)\}, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}) = \\ & = \Omega(\Xi, \boldsymbol{k}(\Xi), x'^0, \{R'(\sigma^0)\}^*, \{C'^{r+1}(\sigma^r)\}^*).\end{aligned}$$

Confrontando la (13) e la (14) con la (12) si ottiene

$$\Omega(\Xi,\ K',\ x'^{0},\ \{ R'(\sigma^0) \},\ \{ C'^{r+1}(\sigma^r) \}) =$$
$$= \Omega(\Xi,\ K,\ x^0,\ \{ R(\sigma^0) \},\ \{ C^{r+1}(\sigma^r) \}$$

che è appunto ciò che si voleva provare.

6. - a) *Se* $\Xi_1, \dots, \Xi_r$, *sono* $n-1$*-cicli di un complesso* normale K e se è:

$$\Xi = \sum_1^r{}_i\ \mu_i \Xi_i \qquad (\mu_i \text{ interi relativi})$$

allora è anche:

$$\Omega(\Xi) = \sum_1^n{}_i\ \mu_i \Omega(\Xi_i).$$

Nelle nostre ipotesi sarà:

$$\Xi_i = \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda_i(\sigma^{n-1})\sigma^{n-1} \quad (\lambda_i(\sigma^{n-1}) \text{ interi relativi, } i = 1, \dots, r).$$

$$\Xi = \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda(\sigma^{n-1})\sigma^{n-1} \quad \text{dove} \quad \lambda(\sigma^{n-1}) = \sum_1^r{}_i\ \mu_i \lambda_i(\sigma^{n-1}).$$

Se ad ogni $\sigma^{n-1} \in K$ associamo un ciclo n — 1-dimensionale $\Gamma(\sigma^{n-1})$ nel modo indicato nel n. precedente, avremo:

$$\Omega(\Xi) = \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda(\sigma^{n-1})\omega(|\sigma^{n-1}|,\ \Gamma(\sigma^{n-1})) =$$
$$= \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \sum_1^r{}_i\ \mu_i \lambda_i(\sigma^{n-1})\omega(|\sigma^{n-1}|,\ \Gamma(\sigma^{n-1})) =$$
$$= \sum_1^r{}_i\ \mu_i \sum_{\sigma^{n-1} \varepsilon K} \lambda_i(\sigma^{n-1})\omega(|\sigma^{n-1}\ ,\ \Gamma(\sigma^{n-1})) =$$
$$= \sum_1^r{}_i\ \mu_i \Omega(\Xi_i).$$

b) *Se* Ξ *è un* $n-1$*-ciclo normale il cui supporto* $|\Xi|$ *sia un continuo e se* $\mathcal{C}(|\Xi|)$ ***è rinchiudibile in un insieme pluriconvesso R disgiunto da*** Ξ, ***allora***:

$$\Omega(\Xi) = \omega(|\Xi|,\ \Xi).$$

In tal caso infatti si può prendere come sistema di in siemi pluriconvessi, $\{R(\sigma^0)\}$, associati agli 0-simplessi di $\boldsymbol{k}(\Xi)$ e soddisfacenti alle condizioni specificate nel n. 5, quello costituito dall'unico insieme R. Di conseguenza, per le catene $C^{r+1}(\sigma^r)$ associate ai simplessi σ^r di $\boldsymbol{k}(\Xi)$, $(r = 0, \ldots, n-2)$, si avrà:

$$|C^{r+1}(\sigma^r)| \subset \mathcal{E}^{(n)} - R \qquad (r = 0, \ldots, n-2).$$

Pertanto, essendo

$$\Gamma(\sigma^{n-1}) = \sigma^{n-1} - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] C^{n-1}(\sigma^{n-2}),$$

risulta anche:

$$|\Gamma(\sigma^{n-1})| \subset \mathcal{E}^{(n)} - R.$$

Poichè $R \supset \mathcal{C}(|\Xi|)$ e $|\Xi|$ è un continuo, $\omega(P, \Gamma(\sigma^{n-1}))$, (per ogni $\sigma^{n-1} \in \boldsymbol{k}(\Xi)$) non varia al variare di P in $|\Xi|$ e si può scrivere pertanto:

$$\Omega(\Xi) = \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \omega(|\Xi|, \sigma^{n-1} - \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] C^{n-1}(\sigma^{n-2})) =$$

$$= \sum \omega(|\Xi|, \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \sigma^{n-1} -$$

$$- \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) \sum_{\sigma^{n-2}} [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}] C^{n-1}(\sigma^{n-2})) =$$

$$= \omega(|\Xi|, \Xi - \sum_{\sigma^{n-2}} C^{n-1}(\sigma^{n-2}) \sum_{\sigma^{n-1}} \lambda(\sigma^{n-1}) [\sigma^{n-1} : \sigma^{n-2}]) =$$

$$= \omega(|\Xi|, \Xi).$$

b_1) *Se per l'$n-1$-ciclo Ξ è soddisfatta l'ipotesi* b) *e se inoltre Ξ è omologo a zero ($\Xi \sim 0$) in $\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{C}(|\Xi|)$ allora:*

$$\Omega(\Xi) = 0.$$

Infatti l'aver supposto $\Xi \sim 0$ in $\mathcal{E}^{(n)} - \mathcal{C}(|\Xi|)$, porta come conseguenza che nella sommatoria esprimente $\omega(P, \Xi)$, $(P \in |\Xi|)$, tutti i ν_k siano nulli.

Oss. VI^a - Se $\dot{\sigma}^n$ è il ciclo frontiera di un simplesso *normale* σ^n, allora per σ^n è verificata l'ipotesi b$_1$) e si ha: $\Omega(\dot{\sigma}^n) = 0$.

c) *Se* Ξ *è un* $n-1$*-ciclo di un complesso normale* K, *omologo a zero in* K, *allora*: $\Omega(\Xi) = 0$.

In tal caso infatti si ha:

$$\Xi = \dot{V} \quad \text{dove} \quad V = \sum_{\sigma^n \varepsilon K} \lambda(\sigma^n)\sigma^n \qquad \text{cioè}$$

$$\Xi = \sum_{\sigma^n \varepsilon K} \lambda(\sigma^n)\dot{\sigma}^n.$$

Ora i cicli $\dot{\sigma}^n$ appartengono tutti al complesso normale K, quindi per la a) risulta:

$$\Omega(\Xi) = \sum_{\sigma^n \varepsilon K} \lambda(\sigma^n)\Omega(\dot{\sigma}^n).$$

Da qui, per l'Oss. VI si trae la conclusione voluta.

d) *Se* Ξ *è un* $n-1$*-ciclo di un complesso normale* K, ${}^p\Xi$ *è un ciclo del complesso* ${}^pK$, *che risulta pure normale in quanto, per ogni* x, $St(x, {}^pK) \subset St(x, K)$, *quindi ha senso considerare* $\Omega({}^p\Xi)$. *Si dimostra che*:

$$\Omega(\Xi) = \Omega({}^p\Xi).$$

Basterà dimostrare la d) per $p = 1$. Si indichi con $\mathfrak{D}K$ il complesso di deformazione per la prima suddivisione baricentrica di K; $\mathfrak{D}K$ è un complesso normale poichè $St(x, \mathfrak{D}K) = St(x, K)$, inoltre si ha:

$$K \subset \mathfrak{D}K, \quad {}^1K \subset \mathfrak{D}K, \quad \Xi - {}^1\Xi \sim 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}K \text{ [13]}.$$

In base alla a) ed alla c) abbiamo allora:

$$\Omega(\Xi) - \Omega({}^1\Xi) = \Omega(\Xi - {}^1\Xi) = 0,$$

cioè

$$\Omega(\Xi) = \Omega({}^1\Xi)$$

---

[13]) V. loc. cit. in [2]) pag. 428-429.

Quest'ultima proprietà ci permette di estendere la definizione di *grado di $\mathcal{T}$ rispetto ad un $n-1$-ciclo non normale Ξ di $E-E_0$ ponendo*:

$$\Omega(\Xi) = \Omega({}^p\Xi)$$

dove ${}^p\Xi$ è una suddivisione baricentrica di rango p tale che ${}^p\Xi$ sia normale. E la definizione è legittima in quanto $\Omega({}^p\Xi)$ non dipende da p.

7. - Abbiamo definito il grado della trasformazione $\mathcal{T}$ per un qualunque $n-1$-ciclo Ξ del complesso singolare totale $S(E-E_0)$. Il grado così definito resta invariato per le successive suddivisioni baricentriche di Ξ, ed è evidente che se $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$ sono $n-1$-cicli di $E-E_0$ e $\Xi = \sum_1^n {}_i \mu_i \Xi^i$ allora $\Omega(\Xi) = \sum_1^n {}_i \mu_i \Omega(\Xi_n)$.

Infatti basta considerare $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$, come cicli di un sottocomplesso finito K di $S(E-E_0)$. Allora se p è abbastanza grande ${}^pK$ è normale e per la a) del n. 6

$$\Omega({}^p\Xi) = \sum_1^n {}_i \mu_i \Omega({}^p\Xi^i),$$

cioè:

$$\Omega(\Xi) = \sum_1^n {}_i \mu_i \Omega(\Xi^i).$$

In modo analogo si verifica che:

Se Ξ è un $n-1$-ciclo di $E-E_0$ omologo a zero in $E-E_0$, $\Omega(\Xi) = 0$.

Da qui segue:

Se Ξ_1 e Ξ_2 sono due cicli di $E-E_0$ e $\Xi_1 \sim \Xi_2$ in $E-E_0$ $\Omega(\Xi_1) = \Omega(\Xi_2)$.

8. - Siamo ora in grado di dare un criterio di esistenza di punti uniti per una trasformazione plurivalente $\mathcal{T}$ dei punti di una n-cella E, per cui siano soddisfatte le condizioni I, II, III, IV e V del n. 2.

In tal caso E è supporto di un simplesso topologico X. Se sulla frontiera di E non ci sono punti uniti $\dot{X}$ è un $n-1$-ciclo di $E-E_0$ e possiamo pertanto valutare $\Omega(\dot{X})$. Ora se $\Omega(\dot{X}) \neq 0$ *esiste almeno un punto* $P \in E$ *tale che* $P \in \mathcal{T}(P)$.

Infatti se l'insieme E_0 fosse vuoto $\dot{X}$ sarebbe omologo a zero in $E-E_0$ e pertanto sarebbe $\Omega(\dot{X})=0$ contro l'ipotesi.

Mediante una semplice applicazione della teoria svolta nei numeri precedenti è possibile valutare il grado topologico $\Omega(\dot{X})$ nel caso che X sia un n-simplesso lineare di $\mathcal{E}^{(n)}$ e che $\mathcal{T}(|\dot{X}|) \subset |X|$.

Precisamente si trova (e per la dimostrazione si veda il lavoro citato in (1) pag. 401):

$$\Omega(\dot{X}) = \pm F_P(\mathcal{T}(P)) \qquad P \in E.$$

Quest'ultimo risultato ci consente di stabilire il teorema:

Sia E una n-cella, sostegno di un simplesso topologico X *di* $\mathcal{E}^{(n)}$, *per cui sia possibile porre un omeomorfismo* Φ *tra lo spazio euclideo n-dimensionale* $\Sigma^{(n)}$ ed $\mathcal{E}^{(n)}$, *tale che* X *risulti il trasformato mediante* Φ *di un simplesso lineare* H *di* $\Sigma^{(n)}$.

Se $\mathcal{T}$ *è una trasformazione plurivalente di E, che faccia corrispondere ad ogni punto* $P \in E$ *un numero finito di punti e che soddisfi alle ipotesi* II, IV, *e* V *del n.* 2, *e se inoltre*:

α) Per $P \in |\dot{X}| \quad \mathcal{T}(P) \subset E$

β) $F_P[\mathcal{T}(P)] \neq 0$

allora esiste in E almeno un punto $P \in \mathcal{T}(P)$ [14].

Oss. - Se il dominio della trasformazione $\mathcal{T}$ è una n-cella E, supporto di un simplesso topologico X di $\mathcal{E}^{(n)}$, per cui non esista un omeomorfismo Φ tra $\Sigma^{(n)}$ ed $\mathcal{E}^{(n)}$, che muti un simplesso lineare H di $\Sigma^{(n)}$ in X, il teorema sussiste ancora se si sostituisce alla α l'ipotesi che $\mathcal{T}(E) \subset E$

[14]) Per la dimostrazione si veda loc. cit. in [1]), pag. 402.

Il precedente teorema ci permette infine di pervenire al seguente risultato:

Se $\mathcal{T}$ è una trasformazione di una n-cella in sè per cui siano soddisfatte le condizioni:

α_1) *Per ogni $P \in E$, $\mathcal{T}(P)$ sia costituito da al più due punti.*

α_2) *Se P_0 è un punto qualunque di E e se τ_0 è un pezzo di $\mathcal{T}(P_0)$, l'insieme $\mathcal{T}(P) \cdot [\tau_0]_\varepsilon$, per $\varepsilon > 0$, sia definitivamente non vuoto al tendere di P a P_0 in E* [15]),

allora esiste almeno un punto $P \in \mathcal{T}(P)$ [16]).

[15]) Cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esista un intorno di P_0 $[P_0]_\rho$, tale che, per $P \in [P_0]_\rho \cdot E$, sia $\mathcal{T}(P)[\tau_0]_\varepsilon \neq 0$.

[16]) Per la dimostrazione cfr. loc. cit. in [1]) n. 9.