RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

LETIZIA DAL SOGLIO

Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di 3-celle

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 25 (1956), p. 386-405

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__386_0>

GRADO TOPOLOGICO E TEOREMI DI ESISTENZA DI PUNTI UNITI PER TRASFORMAZIONI PLURIVALENTI DI 3-CELLE

Memoria (*) *di* LETIZIA DAL SOGLIO (*a Padova*)

Il teorema di Brouwer sull'esistenza di punti uniti in trasformazioni continue ed univalenti di una n-cella in sè, si può dimostrare ricorrendo per quelle trasformazioni alla nozione di grado topologico relativo ad un ciclo [1]). Il problema dell'esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti semicontinue superiormente di una 2-cella, è stato studiato da Darbo, il quale è pervenuto a criteri di esistenza di punti uniti, definendo sotto opportune ipotesi il *grado* topologico per trasformazioni plurivalenti di insiemi piani [2]).

Sulla traccia del lavoro di Darbo ho cercato di introdurre la nozione di grado topologico per una trasformazione plurivalente $\mathcal{T}$ di un insieme E dello spazio euclideo tridimensionale $\mathcal{E}^{(3)}$, e di trovare poi delle condizioni sufficienti per l'esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti di 3-celle [3]). Per poter superare alcune difficoltà che non trovano

---

(*) Pervenuta in Redazione il 10 aprile 1956.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico Università, Padova.

1) F. BROUWER, *Ueber Abbildungen von Mannigfaltigkeiten* [Mathematische Annalen, vol. 71 (1912), pag. 97-115].

2) G. DARBO, *Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di bicelle.* [Rendiconti del seminario matematico dell'Univ. di Padova, (1950), pp. 371-395].

3) I risultati conseguiti ed esposti in questo lavoro si trovano già nella mia tesi di laurea: « *Grado topologico e teoremi di esistenza di punti uniti per trasformazioni plurivalenti di 3-celle* » discussa a Padova il 14 nov. 1955.

riscontro nell'analogo caso bidimensionale, ho dovuto supporre che l'immagine $\mathcal{T}(P)$ di ogni punto $P \in E$ non unito, fosse rinchiudibile in un numero finito di insiemi chiusi e convessi, non contenenti P e a due a due disgiunti. Questa ipotesi risulta sempre verificata per trasformazioni che facciano corrispondere ad ogni punto di E un sottoinsieme di $\mathcal{E}^{(3)}$ costituito da un numero finito di punti. In particolare si prova che, se la trasformazione $\mathcal{T}$ di una 3-cella in sè, fa corrispondere ad ogni punto P della 3-cella un insieme $\mathcal{T}(P)$ costituito da al più due punti ed è continua, allora $\mathcal{T}$ possiede almeno un punto unito.

1.

In questo numero sarà precisato il significato di notazioni e simboli usati nel presente lavoro e saranno date alcune definizioni.

Lo spazio ambiente sarà lo spazio euclideo tridimensionale $\mathcal{E}^{(3)}$ che supporremo orientato.

Nel seguito considereremo sempre catene singolari intere e cicli singolari del complesso singolare totale $S(\mathcal{E}^{(3)})$ [4]).

Col simbolo $|U|$ sarà indicato il supporto della catena singolare intera U, vale a dire l'insieme costituito dai punti dei simplessi che compaiono in U con coefficiente non nullo.

Il simbolo $\boldsymbol{k}(U)$ rappresenterà invece il sostegno simpliciale (o semplicemente sostegno) di U, cioè l'insieme costituito da tutti i simplessi che compaiono in U con coefficiente diverso da zero e da tutte le loro faccie.

Con K si indicherà generalmente un sottocomplesso *chiuso* [5]) di $S(\mathcal{E}^{(3)})$, mentre un simplesso singolare j-dimensionale generico sarà indicato con σ^j.

---

[4]) Catene e cicli singolari nel senso di catene e cicli di EILEMBERG, cfr. anche per la nozione di complesso singolare totale $S(X)$ di uno spazio topologico X: S. EILEMBERG, *Singular Homology Theory*. [Annals of Math. 1944, Princeton University].

[5]) Un complesso K dicesi chiuso se contiene tutte le faccie di ogni suo simplesso.

Faremo uso inoltre dei coefficienti di incidenza $[\sigma^j : \sigma^{j-1}]$, rappresentando $[\sigma^j : \sigma^{j-1}]$ il coefficiente con cui σ^{j-1} compare nel contorno di σ^j.

DEF. I^a - Dato un complesso K ed un punto $x \in \mathcal{E}^{(3)}$ dicesi *stella* di centro x relativa a K, $St(x, K)$, l'insieme unione dei supporti dei simplessi σ^j di K per cui $x \in |\sigma^j|$ [6]).

DEF. II^a - Un insieme A di $\mathcal{E}^{(3)}$ dicesi pluriconvesso quando è unione di un numero finito di insiemi chiusi, limitati e convessi a due a due disgiunti.

Oss. I^a - L'intersezione di due insiemi pluriconvessi è ancora un insieme pluriconvesso.

Infatti se $A = \bigcup\limits_i A_i$ e $B = \bigcup\limits_k B_k$ (con A_i, B_k insiemi chiusi limitati e convessi ecc.) $A \cap B = \bigcup\limits_{ik} A_i \cap B_k$ dove gli $A_i \cap B_k$ se non sono vuoti, sono insiemi chiusi limitati e convessi, in numero finito e a due a due disgiunti.

Oss. II^a - Il complementare di un insieme pluriconvesso è un insieme connesso ed aciclico nella dimensione 1.

Se A è un insieme chiuso e limitato di $\mathcal{E}^{(3)}$ potremo considerare l'*involucro convesso* di A cioè il più piccolo insieme chiuso e convesso contenente A. L'*involucro convesso* di A sarà indicato con $i.c.A$.

2.

Nel seguito sarà presa in considerazione una trasformazione plurivalente $\mathcal{T}$, definita in un sottoinsieme $E \subset \mathcal{E}^{(3)}$, per cui siano soddisfatte le seguenti ipotesi:

I. - *L'immagine $\mathcal{T}(P)$ di P sia per ogni $P \in E$ un sottoinsieme compatto di $\mathcal{E}^{(3)}$.*

II. - *$\mathcal{T}$ sia superiormente semicontinua in tutto E* (vale a dire per ogni $P_0 \in E$, comunque si fissi $\varepsilon > 0$ sia possibile determinare un ρ-intorno di P_0, $[P_0]_\rho$, per cui abbia $\mathcal{T}(P) \subset \subset [\mathcal{T}(P_0)]_\varepsilon$ per ogni $P \in [P_0]_\rho \cdot E)$ [7]).

---

6) Si noti che se K è finito vi è numero finito di stelle distinte e che inoltre per ogni punto $x \in \mathcal{E}^{(3)}$ $St(x, K)$ è un continuo.

7) Se A è un insieme di punti di $\mathcal{E}^{(3)}$ col simbolo $[A]_\varepsilon$ (ε essendo un numero positivo) si indica l' ε-intorno aperto di A, ossia l'insieme dei punti di $\mathcal{E}^{(3)}$ che distano da A per meno di ε.

Inoltre, indicando con E_0 l'insieme dei punti $P \in E$ per cui $P \in \mathcal{T}(P)$ si abbia che:

III. - *L'immagine $\mathcal{T}(P)$ di P sia, per ogni $P \in E - E_0$, rinchiudibile in un insieme pluriconvesso non contenente P.*

Se $P \in E$ chiameremo *pezzo* di $\mathcal{T}(P)$ un sottoinsieme τ di $\mathcal{T}(P)$ che risulti contemporaneamente aperto e chiuso rispetto a $\mathcal{T}(P)$, potendo τ in particolare coincidere con l'insieme vuoto o con $\mathcal{T}(P)$. Si fa allora l'ulteriore ipotesi:

IV. - *Per ogni $P \in E$ sia assegnata una funzione $F_P(\tau)$ dei pezzi τ di $\mathcal{T}(P)$, a valori in un gruppo additivo G, additiva, tale cioè che se τ' e τ'' sono due pezzi disgiunti di $\mathcal{T}(P)$ risulti:*

$$F_P(\tau' + \tau'') = F_P(\tau') + F_P(\tau'').$$

Si osservi che se A è un sottoinsieme di $\mathcal{E}^{(3)}$ la cui frontiera sia disgiunta da $\mathcal{T}(P_0)$ $(P_0 \in E)$, l'insieme $A \cdot \mathcal{T}(P_0)$ è un *pezzo* τ di $\mathcal{T}(P_0)$. Inoltre se ε è un numero positivo minore della distanza tra $\mathcal{T}(P_0)$ e la frontiera di A, esiste, per l'ipotesi II un ρ-intorno di P_0, $[P_0]_\rho$, per cui se $P \in [P_0]_\rho \cdot E$ $\mathcal{T}(P) \subset [\mathcal{T}(P_0)]_\varepsilon$. Quindi se $P \in [P_0]_\rho \cdot E$, $A \cdot \mathcal{T}(P)$ è un *pezzo* di $\mathcal{T}(P)$ ed ha senso considerare la funzione $F_P[A \cdot \mathcal{T}(P)]$.

Si supporrà allora che:

V. - *Se $P_0 \in E$ ed A è un sottoinsieme di $\mathcal{E}^{(3)}$ la cui frontiera sia disgiunta da $\mathcal{T}(P_0)$ si possa determinare un ρ-intorno di P_0, $[P_0]_\rho$, per cui se $P \in [P_0]_\rho \cdot E$ sia:*

$$F_P[A \cdot \mathcal{T}(P)] = F_{P_0}[A \cdot \mathcal{T}(P_0)].$$

Oss. III^a - Una trasformazione plurivalente $\mathcal{T}$ di E che faccia corrispondere ad ogni punto $P \in E$ un numero finito di punti soddisfa alle ipotesi I e III.

3.

Consideriamo un punto $P \in E$ ed un ciclo bidimensionale Γ il cui supporto appartenga ad $\mathcal{E}^{(3)} - \mathcal{T}(P)$.

L'insieme $\mathcal{E}^{(3)} - |\Gamma|$ è costituito da un numero finito od al più da una infinità numerabile di insiemi aperti connessi, a due a due disgiunti A_k. Per ogni k l'insieme $\tau_k =$

$= A_k \cdot \mathcal{C}(P)$ è un *pezzo* di $\mathcal{C}(P)$. I *pezzi* τ_k non vuoti sono in numero finito: infatti gli insiemi τ_k costituiscono un ricoprimento aperto (relativamente a $\mathcal{C}(P)$) di $\mathcal{C}(P)$; poichè $\mathcal{C}(P)$ è un compatto tale ricoprimento ammette un sottoricoprimento finito $\{\tau_{k_1}, \tau_{k_2}, \ldots \tau_{k_n}\}$; ma allora, essendo i *pezzi* τ_k a due a due disgiunti, debbono essere necessariamente vuoti tutti i rimanenti τ_k.

Inoltre l'*ordine* [8]) di un punto $Q \in \tau_k$ rispetto al ciclo Γ non varia al variare di Q in τ_k, in quanto $\tau_k \subset A_k$ ed A_k è un componente connesso di $\mathcal{E}^{(3)} - |\Gamma|$. Indicando questo ordine con ν_k si pone:

$$\omega(P, \Gamma) = \sum_k \nu_k F_P(\tau_k). \tag{1}$$

LEMMA I. - *Il numero $\omega(P, \Gamma)$ non varia al variare di P in un continuo $I \subset E$ la cui immagine $\mathcal{C}(I)$ non abbia punti comuni con $|\Gamma|$.*

Infatti se $P_0 \in I$ e se $\tau_k^0 = A_k \cdot \mathcal{C}(P_0)$ è possibile per la proprietà V determinare un numero $\rho > 0$ per cui risulti:

$$F_P[A_k \cdot \mathcal{C}(P)] = F_{P_0}[A_k \cdot \mathcal{C}(P_0)] \quad \text{se} \quad P \in [P_0]_\rho \cdot I.$$

Pertanto se $P \in [P_0]_\rho \cdot I$ si ha

$$\omega(P, \Gamma) = \sum_k \nu_k F_P(\tau_k) = \sum_k \nu_k F_{P_0}(\tau_k^0)$$

dove ν_k è l'ordine di un qualsiasi punto $Q \in A_k$ rispetto al ciclo Γ. Ad ogni punto $P_0 \in I$ è possibile quindi associare un ρ-intorno $[P_0]_\rho$ tale che, variando P in $[P_0]_\rho \cdot I$, il numero $\omega(P, \Gamma)$ rimane costante. Ma essendo I un continuo $\omega(P, \Gamma)$ risulterà costante in tutto I come risulta dal teorema di ricoprimento di Pincherle-Borel.

Oss. IV^a - Nelle ipotesi del lemma precedente si può at-

---

8) Cfr. P. ALEXANDROFF - H. HOPF, *Topologie.* Berlin 1935, pp. 419-423, 458 e segg.

tribuire significato al simbolo $\omega(I, \Gamma)$ mediante la posizione:

$$\omega(I, \Gamma) = \omega(P, \Gamma) \quad \text{con} \quad P \in I.$$

Dimostriamo che:

Se Γ, Γ', Γ'', sono tre cicli bidimensionali di $\mathcal{E}^{(3)} - \mathcal{T}(P_0)$ e se $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$ risulta:

$$\omega(P_0, \Gamma) = \omega(P_0, \Gamma') + \omega(P_0, \Gamma''). \tag{2}$$

Indichiamo con $\{\tau_k\}$, $\{\tau'_i\}$, $\{\tau''_l\}$ i sistemi di *pezzi* in cui $\mathcal{T}(P_0)$ è decomposto rispettivamente dai cicli Γ, Γ', Γ''; ν_k, ν'_i, e ν''_l siano gli ordini dei punti di τ_k, τ'_i, τ''_l relativi ai cicli corrispondenti.

Risulta allora, in base alla definizione data:

$$\omega(P_0, \Gamma' + \Gamma'') = \sum_k \nu_k F_{P_0}(\tau_k)$$

$$\omega(P_0, \Gamma') = \sum_i \nu'_i F_{P_0}(\tau'_i)$$

$$\omega(P_0, \Gamma'') = \sum_l \nu''_l F_{P_0}(\tau''_l).$$

Ponendo $\tau_{kil} = \tau_k \cdot \tau'_i \cdot \tau''_l$, τ_{kil} è un *pezzo* di $\mathcal{T}(P_0)$ ed inoltre:

$$\tau_k = \sum_{il} \tau_{kil} \quad , \quad \tau'_i = \sum_{kl} \tau_{kil} \quad , \quad \tau''_l = \sum_{ik} \tau_{kil}$$

da cui, per l'additività di $F_{P_0}(\tau)$ si ha:

$$\begin{aligned} \omega(P_0, \Gamma' + \Gamma'') &= \sum_k \nu_k F_{P_0}(\sum_{il} \tau_{kil}) = \sum_{kil} \nu_k F_{P_0}(\tau_{kil}) \\ \omega(P_0, \Gamma') &= \sum_i \nu'_i F_{P_0}(\sum_{kl} \tau_{kil}) = \sum_{kil} \nu'_i F_{P_0}(\tau_{kil}) \\ \omega(P_0, \Gamma'') &= \sum_l \nu''_l F_{P_0}(\sum_{ik} \tau_{kil} = \sum_{kil} \nu''_l F_{P_0}(\tau_{kil}) \end{aligned} \tag{3}$$

le somme essendo estese a tutte le terne di indici k, i, l per cui $\tau_{kil} \neq 0$. Sommando membro a membro le ultime due uguaglianze delle (3) si ottiene:

$$\omega(P_0, \Gamma') + \omega(P_0, \Gamma'') = \sum_{kil} (\nu'_i + \nu''_l) F_{P_0}(\tau_{kil}). \tag{4}$$

Essendo per l'additività dell'ordine di un punto rispetto ad un ciclo [9]) $\nu_k = \nu_i' + \nu_l''$ (dove per ogni k, i ed l sono gli indici per cui $\tau_{kil} \neq 0$) dal confronto della (4) con la prima delle (3) si trae la (2).

È ovvio inoltre che, se Γ è un ciclo bidimensionale di $\mathcal{E}^{(3)} - \mathcal{T}(P_0)$ e $-\Gamma$ è il ciclo opposto:

$$\omega(P_0, -\Gamma) = -\omega(P_0, \Gamma).$$

Più in generale se $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ sono cicli bidimensionali di $\mathcal{E}^{(3)} - \mathcal{T}(P_0)$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ interi relativi si ha:

$$\omega(P_0, \lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2 + \dots + \lambda_n\Gamma_n) = \lambda_1\omega(P_0, \Gamma_1) + \dots + \lambda_n\omega(P_0, \Gamma).$$

4.

DEF. III^a - Sia K un sottocomplesso del complesso singolare totale $S(E)$; una *stella* di K, $St(x, K)$ dicesi *normale* quando la sua immagine $\mathcal{T}(St(x, K))$ è rinchiudibile in un insieme pluriconvesso disgiunto da $St(x, K)$.

DEF. IV^a - Un complesso $K \subset S(E)$ dicesi *normale* se è finito e se ogni sua stella è normale.

LEMMA II - *Se K è un sottocomplesso finito del complesso singolare totale $S(E - E_0)$, esiste una suddivisione baricentrica di K che è un complesso normale.*

Siano $K = {}^0K, {}^1K, {}^2K, \dots, {}^nK \dots$ i complessi che si ottengono mediante successive suddivisioni baricentriche di K. Indichiamo con G_n l'insieme somma delle stelle *non normali* di ${}^nK$; G_n è un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathcal{E}^{(3)}$ (cfr. (6) pag. 388).

Supponiamo che per ogni n sia $G_n \neq 0$, possiamo allora considerare la successione di insiemi chiusi, limitati e non vuoti di $\mathcal{E}^{(3)}$:

$$G_0, G_1, G_2 \dots.$$

Tale successione risulta monotona decrescente, vale a dire $G_0 \supset G_1 \supset \dots$ poichè se $St(x, {}^{n+1}K)$ non è *normale* non lo è neppure $St(x, {}^nK)$ essendo $St(x, {}^{n+1}K) \subset St(x, {}^nK)$. Pertanto in base al teorema di Cantor esiste almeno un punto P_0 comune a tutti gli insiemi G_n. Per l'ipotesi III^a del n. 2 $\mathcal{T}(P_0)$

---

[9]) V. loc. cit. in [8]) pag. 418 formula (2) e pp. 419-423.

è rinchiudibile in un insieme pluriconvesso R non contenente P_0. Sia ε un numero positivo minore della distanza di P_0 da R e della più piccola fra le mutue distanze degli insiemi convessi costituenti R. Per l'ipotesi II^a del n. 2 si può determinare un ρ-intorno di P_0, $[P_0]_\rho \left(\rho < \frac{\varepsilon}{3}\right)$, tale che il trasformato mediante $\mathcal{T}$ di $[P_0]_\rho \cdot E$ sia contenuto in $[\mathcal{T}(P_0)]_{\varepsilon/3}$ e quindi, a maggior ragione in $[R]_{\varepsilon/3}$. La chiusura dell'insieme $[R]_{\varepsilon/3}$ risulta pertanto, in base alla particolare scelta di ε e di ρ, un insieme pluriconvesso che rinchiude $\mathcal{T}([P_0]_\rho \cdot E)$ e che non ha punti comuni con $[P_0]_\rho$. Si osservi ora che, se δ_n è il massimo diametro delle stelle di ${}^nK$ si ha $\lim\limits_{n \to \infty} \delta_n = 0$, quindi per n abbastanza grande, le stelle di ${}^nK$ non *normali* contenenti P_0 sono interamente contenute in $[P_0]_\rho \cdot E$. Ma allora tali stelle risulterebbero *normali*. Dovrà essere dunque $G_n = 0$ per n abbastanza grande, e per tali n, ${}^nK$ sarà *normale*.

5. Grado della trasformazione T relativo ad un ciclo di un complesso normale.

Sia Ξ un ciclo di un complesso normale K, sarà pertanto: $\Xi = \sum\limits_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2)\sigma^2$ dove $\lambda(\sigma^2)$ è un intero relativo e la somma va estesa a tutti i $\sigma^2 \in K$ [10]).

x^0 sia un punto ($= 0$ simplesso) appartenente al complementare di *i.c.* $\mathcal{T}(|K|)$ (*i.c.* = *involucro convesso*). Si fissi per ogni *stella* di K del tipo $St(\sigma^0, K)$ un insieme pluriconvesso $R(\sigma^0)$ che contenga $\mathcal{T}(St(\sigma^0, K))$ e che sia disgiunto da $St(\sigma_0, K)$; $R(\sigma^0)$ sia inoltre un sottoinsieme di *i.c.* $\mathcal{T}(|K|)$.

L'osservazione II^a del n. 1 ci assicura che, se σ^0 è uno 0 — simplesso di K ed $R(\sigma^0)$ è l'insieme pluriconvesso ad esso associato, è possibile determinare una 1-catena $C(\sigma^0)$ tale che:

$$|C(\sigma^0)| \subset \mathcal{E}^{(3)} - R(\sigma^0)$$

$$\dot{C}(\sigma^0) = x^0 - \sigma^0.$$

---

10) Nel seguito ove non vi sia pericolo di ambiguità la sommatoria $\sum\limits_{\sigma^i}$ ($i = 0, 1, 2$) si intenderà estesa a tutti i $\sigma^i \in K$.

Inoltre in relazione ad ogni simplesso $\sigma^1 \in K$ consideriamo il ciclo 1-dimensionale $\sigma^1 + \sum_{\sigma^0}[\sigma^1 : \sigma^0]C(\sigma^0)$ [11]. Tale ciclo appartiene al complementare dell'insieme pluriconvesso $\bigcap_{\sigma^0 \in k(\sigma^1)} R(\sigma^0)$, quindi, sempre per l'oss. IIª del n. 1, si può determinare una catena $U(\sigma^1)$ bidimensionale e tale che:

$$|U(\sigma^1)| \subset \mathcal{E}^{(3)} - \bigcap_{\sigma^0 \in k(\sigma^1)} R(\sigma^0)$$

$$\dot{U}(\sigma^1) = \sigma^1 + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C(\sigma^0).$$

Associamo tale catena al simplesso σ^1.

Si sono introdotti pertanto i seguenti sistemi di insiemi e di catene:

$\{R(\sigma^0)\}$ sistema di insiemi pluriconvessi associati ai simplessi $\sigma^0 \in K$.

$\{C(\sigma^0)\}$ ed $\{U(\sigma^1)\}$ sistemi di catene $1-$ e $2-$ dimensionali associate irspettivamente agli $0-$, 1-simplessi di K.

In relazione ad ogni simplesso σ^2 consideriamo il ciclo bidimensionale:

$$\Gamma(\sigma^2) = \sigma^2 - \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1] U(\sigma^1) \text{ [12]}$$

$|\Gamma(\sigma^2)| \in \mathcal{E}^{(3)} - \bigcap_{\sigma^0 \in k(\sigma^2)} R(\sigma^0)$. Si osservi che l'insieme pluriconvesso $\bigcap_{\sigma^0 \in k(\sigma^2)} R(\sigma^0)$ rinchiude $\mathcal{T}(|\sigma^2|)$ e che quindi $|\Gamma(\sigma^2)|$ non ha punti in comune con $\mathcal{T}(|\sigma^2|)$, pertanto in base al lemma I del n. 3 è lecito considerare $\omega(|\sigma^2|, \Gamma(\sigma^2))$. (Cfr. oss. IVª, n. 3).

---

[11]) La catena $\sigma^1 + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C(\sigma^0)$ è un ciclo, infatti la sua frontiera è data da:

$$\sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0]\sigma^0 + x^0 \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0]\sigma^0 = x^0 \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] = 0.$$

[12]) $\Gamma(\sigma^2)$ è un ciclo, infati:

$$\dot{\Gamma}(\sigma^2) = \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1]\sigma^1 - \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1]\sigma^1 - \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1] \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C(\sigma^0) =$$

$$= \sum_{\sigma^0} C(\sigma^0) \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1][\sigma^1 : \sigma^0] = 0$$

per note proprietà dei coefficienti di incidenza.

Oss. V^a - Si noti che se $[\sigma^2 : \sigma^1] \neq 0$ risulta $\omega(|\sigma^1|, \Gamma(\sigma^2)) = \omega(|\sigma^2|, \Gamma(\sigma^2))$ essendo $|\sigma^1| \subset |\sigma^2|$.

Prendiamo ora in esame la seguente somma

$$\sum_{\sigma^2 \in K} \lambda(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \Gamma(\sigma^2)).$$

Se si fa assumere il ruolo di K al complesso $\boldsymbol{k}(\Xi)$ e si associano ai simplessi di $\boldsymbol{k}(\Xi)$ le catene già associate agli stessi simplessi in quanto appartenenti a K si ha che:

$$\sum_{\sigma^2 \in \boldsymbol{k}(\Xi)} \lambda(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \Gamma(\sigma^2)) = \sum_{\sigma^2 \in K} \lambda(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \Gamma(\sigma^2))$$

poichè i termini che portano contributo non nullo nella somma a secondo membro sono solo quelli relativi ai simplessi che compaiono in Ξ con coefficiente diverso da zero.

Porremo allora:

$$\Omega(\Xi) = \sum_{\sigma^2 \in K} \lambda(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \Gamma(\sigma^2))$$

e chiameremo $\Omega(\Xi)$ *grado topologico della trasformazione* $\mathcal{T}$ *relativo al ciclo* Ξ. Tale denominazione è lecita in quanto si dimostra che $\Omega(\Xi)$ *non dipende dal punto* x^0, *dal sistema di insiemi pluriconvessi* $\{R(\sigma^0)\}$ *nè dai particolari sistemi di catene* $\{C(\sigma^0)\}$, $\{U(\sigma^1)\}$ *associate agli* 0 —, 1 — *simplessi di* K.

Infatti siano $\{R'(\sigma^0)\}$, $\{C'(\sigma^0)\}$, $\{U'(\sigma^1)\}$ dei nuovi sistemi di insiemi e di catene associate ai simplessi di K e sia:

$$R'(\sigma^0) \subset i.c.\mathcal{T}(|K|)$$

$$|C'(\sigma^0)| \subset \mathcal{E}^{(3)} - R'(\sigma^0) \quad \dot{C}'(\sigma^0) = x'^0 - \sigma^0 \quad (x'^0 \in \mathcal{E}^{(3)} - i.c.\mathcal{T}(|K|))$$

$$|U'(\sigma^1)| \subset \mathcal{E}^{(3)} - \bigcap_{\sigma^0 \in \boldsymbol{k}(\sigma^1)} R'(\sigma^0) \qquad \dot{U}'(\sigma^1) = \sigma^1 + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C'(\sigma^0)$$

Poichè x^0 e x'^0 appartengono entrambi ad $\mathcal{E}^{(3)} - i.c.\ \mathcal{T}(|K|)$ ed $\mathcal{E}^{(3)} - i.c.\ \mathcal{T}(|K|)$ è connesso, sarà possibile trovare una catena 1 — dimensione C tale che:

$$|C| \subset \mathcal{E}^{(3)} - \mathcal{T}(|K|) \quad , \quad \dot{C} = x'^0 - x^0.$$

Consideriamo ora il ciclo 1-dimensionale $C'(\sigma^0) - C - C(\sigma^0)$; tale ciclo appartiene ad $\mathcal{E}^{(3)} - R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0)$, quindi per l'oss. II^a del n. 1 è possibile determinare una catena bidimensionale $V(\sigma^0)$ che soddisfa alle seguenti condizioni:

$$|V(\sigma^0)| \subset \mathcal{E}^{(3)} - R(\sigma^0) \cap R'(\sigma^0) \quad , \quad \dot{V}(\sigma^0) = C'(\sigma^0) - C - C(\sigma^0).$$

Se $\Gamma'(\sigma^2) = \sigma^2 - \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1] U'(\sigma^1)$ è anche:

$$\Gamma'(\sigma^2) = \Gamma(\sigma^2) - \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1](U'(\sigma^1) - U(\sigma^1))$$

Aggiungendo al secondo membro di questa uguaglianza $\sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1] \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] V(\sigma^0) = 0$ si ottiene:

$$\Gamma'(\sigma^2) = \Gamma(\sigma^2) - \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1](U'(\sigma^1) - U(\sigma^1)) + \tag{5}$$
$$+ \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1] \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] V(\sigma^0).$$

Cioè

$$\Gamma'(\sigma^2) = \Gamma(\sigma^2) - \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1](U'(\sigma^1) - U(\sigma^1) - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] V(\sigma^0)). \tag{5_1}$$

Dalla (5_1) segue

$$\sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \Gamma'(\sigma^2)) = \sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \Gamma(\sigma^2)) - \tag{6}$$
$$- \sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1][U'(\sigma^1) - U(\sigma^1) - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] V(\sigma^0)]).$$

Se si osserva che la catena $U'(\sigma^1) - U(\sigma^1) - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] V(\sigma^0)$ è un ciclo [13]), si ha, per quanto affermato nel n. 4 e per l'oss. V^a di questo numero:

$$\sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1][U'(\sigma^1) - U(\sigma^1) - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] V(\sigma^0)]) = \tag{7}$$
$$= \sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2) \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1]\omega(|\sigma^1|, U'(\sigma^1) - U(\sigma^1) - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] V(\sigma^0)) =$$
$$= \sum_{\sigma^1} \omega(|\sigma^1|, U'(\sigma^1) - U(\sigma^1) - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] V(\sigma^0)) \sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2)[\sigma^2 : \sigma^1] = 0$$

poichè essendo Ξ un ciclo $\sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2)[\sigma^2 : \sigma^1] = 0$.

---

13) Infatti la frontiera di questa catena è data da

$$\dot{U}'(\sigma^1) - \dot{U}(\sigma^1) - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] \dot{V}(\sigma^0) = \sigma^1 + \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C'(\sigma^0) - \sigma^1 -$$
$$- \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] C(\sigma^0) - \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] (C'(\sigma^0) - C - C(\sigma^0)) = C \sum_{\sigma^0} [\sigma^1 : \sigma^0] = 0.$$

Dalla (6) tenendo conto del risultato conseguito nella (7) discende immediatamente

$$\sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \Gamma'(\sigma^2)) = \sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \Gamma(\sigma^2))$$

il che prova la nostra affermazione.

6.

a). *Se* $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$ *sono cicli bidimensionali di un complesso normale* K *e se è*

$$\Xi = \sum_{1}^{n}{}_i\, \mu_i \Xi_i \qquad (\mu_i \text{ intero relativo})$$

allora è anche

$$\Omega(\Xi) = \sum_{1}^{n}{}_i\, \mu_i \Omega(\Xi_i).$$

Nelle nostre ipotesi sarà:

$$\Xi_i = \sum_{\sigma^2 \in K} \lambda_i(\sigma^2)\sigma^2 \qquad (\lambda_i(\sigma^2) \text{ intero relativo})$$

$$\Xi = \sum_{\sigma^2 \in K} \lambda(\sigma^2)\sigma^2 \qquad \text{dove } \lambda(\sigma^2) = \sum_{1}^{n}{}_i \mu_i\lambda_i(\sigma^2).$$

Se ad ogni $\sigma^2 \in K$ associamo un ciclo bidimensionale $\Gamma(\sigma^2)$ nel modo indicato nel numero precedente avremo:

$$\begin{aligned}\Omega(\Xi) &= \sum_{\sigma^2 \in K} \lambda(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \Gamma(\sigma^2)) = \\ &= \sum_{\sigma^2 \in K} \sum_{1}^{n}{}_i\, \mu_i\lambda_i(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \Gamma(\sigma^2)) = \\ &= \sum_{1}^{n}{}_i\, \mu_i \sum_{\sigma^2 \in K} \lambda_i(\sigma^2)\omega(|\sigma^2|, \Gamma(\sigma^2)) = \\ &= \sum_{1}^{n}{}_i\, \mu_i\Omega(\Xi_i).\end{aligned}$$

b). *Se* Ξ *è un ciclo bidimensionale normale*[14]) *il cui sup-*

---

14) Diremo normale un ciclo di un complesso normale; naturalmente condizione necessaria e sufficiente perchè Ξ sia normale è che tale sia $k(\Xi)$.

porto $|\Xi|$ *sia un continuo e se* $\mathcal{T}(|\Xi|)$ *è rinchiudibile in un insieme pluriconvesso* R *disgiunto da* Ξ *allora*:

$$\Omega(\Xi) = \omega(|\Xi|, \Xi).$$

In tal caso infatti si può prendere come sistema di insiemi pluriconvessi $\{R(\sigma^0)\}$ associati agli 0-simplessi di $\boldsymbol{k}(\Xi)$ e soddisfacenti alle condizioni specificate nel n. 5, quello costituito dall'unico insieme R. Di conseguenza per le catene $C(\sigma^0)$, $U(\sigma^1)$ associate ai σ^0 e σ^1 di $\boldsymbol{k}(\Xi)$ si avrà:

$$|C(\sigma^0)| \subset \mathcal{E}^{(3)} - R \quad , \quad |U(\sigma^1) \subset \mathcal{E}^{(3)} - R.$$

Pertanto essendo $\Gamma(\sigma^2) = \sigma^2 - \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1] U(\sigma^1)$ risulta anche:

$$|\Gamma(\sigma^2)| \subset \mathcal{E}^{(3)} - R.$$

Poichè $R \supset \mathcal{T}(|\Xi|)$ e $|\Xi|$ è un continuo $\omega(P, \Gamma(\sigma^2))$ (per ogni $\sigma^2 \in \boldsymbol{k}(\Xi)$) non varia al variare di P in $|\Xi|$, e si può scrivere:

$$\begin{aligned}\Omega(\Xi) &= \sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2)\omega(|\Xi|, \sigma^2 - \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1] U(\sigma^1)) = \\ &= \omega(|\Xi|, \sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2)\sigma^2 - \sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2) \sum_{\sigma^1} [\sigma^2 : \sigma^1] U(\sigma^1)) = \\ &= \omega(|\Xi|, \Xi - \sum_{\sigma^1} U(\sigma^1) \sum_{\sigma^2} \lambda(\sigma^2)[\sigma^2 : \sigma^1]) = \\ &= \omega(|\Xi|, \Xi).\end{aligned}$$

b$_1$). *Se per il ciclo* Ξ *è soddisfatta l'ipotesi* b) *e se inoltre*

$$\Xi \backsim 0 \ \textit{in} \ \mathcal{E}^{(3)} - \mathcal{T}(|\Xi|)$$
$$\Omega(\Xi) = 0.$$

Infatti l'aver supposto $\Xi \backsim 0$ in $\mathcal{E}^{(3)} - \mathcal{T}(|\Xi|)$ porta come conseguenza che nella sommatoria esprimente $\omega(P, \Xi)$, $(P \in |\Xi|)$ tutti i ν_k siano nulli.

Oss. VI^a - Se $\dot{\sigma}^3$ è il ciclo frontiera di un simplesso normale σ^3, allora per $\dot{\sigma}^3$ è verificata l'ipotesi b$_1$) e si ha: $\Omega(\dot{\sigma}^3) = 0$.

c). *Se* Ξ *è un ciclo di un complesso normale* K*, omologo a* *zero in K allora*:

$$\Omega(\Xi) = 0.$$

In tal caso infatti si ha:

$$\Xi = \dot{V} \text{ dove } V = \sum_{\sigma^3 \in K} \lambda(\sigma^3)\sigma^3, \text{ cioè:}$$

$$\Xi = \sum_{\sigma^3 \in K} \lambda(\sigma^3)\dot{\sigma}^3.$$

Ora i cicli $\dot{\sigma}^3$ appartengono tutti al complesso normale K, quindi per la a) risulta

$$\Omega(\Xi) = \sum_{\sigma^3 \in K} \lambda(\sigma^3)\Omega(\dot{\sigma}^3) = 0$$

poichè per l'oss. VI è $\Omega(\dot{\sigma}^3) = 0$ (per ogni $\sigma^3 \in K$).

d). *Se* Ξ *è un ciclo di un complesso normale* K, ${}^p\Xi$ *è un ciclo del complesso* ${}^pK$ *che risulta pure normale in quanto, per ogni* x, $St(x, {}^pK) \subset St(x, K)$, *quindi ha senso considerare* $\Omega({}^p\Xi)$. *Si dimostra che*:

$$\Omega(\Xi) = \Omega({}^p\Xi).$$

Basterà dimostrare la d) per $p = 1$. Si indichi con $\mathfrak{D}K$ il complesso di deformazione per la prima suddivisione baricentrica di K [15]); $\mathfrak{D}K$ è un complesso normale poichè $St(x, \mathfrak{D}K) = St(x, K)$ inoltre si ha:

$$K \subset \mathfrak{D}K \quad , \quad {}^1K \subset \mathfrak{D}K \quad , \quad \Xi - {}^1\Xi \backsim 0 \quad \text{in} \quad \mathfrak{D}K$$

In base alla *a*) ed alla *c*) abbiamo allora:

$$\Omega(\Xi) - \Omega({}^1\Xi) = \Omega(\Xi - {}^1\Xi) = 0$$

cioè:

$$\Omega(\Xi) = \Omega({}^1\Xi)$$

Quest'ultima proprietà ci permette di estendere la definizione di *grado di* $\mathfrak{T}$ *rispetto ad un ciclo bidimensionale non*

---

[15]) v. loc. cit. in [4]) pag. 428-429.

normale Ξ *di* $E - E_0$ *ponendo*

$$\Omega(\Xi) = \Omega({}^p\Xi)$$

dove ${}^p\Xi$ *è una suddivisione baricentrica di* Ξ *di rango* p *tale che* ${}^p\Xi$ *sia normale.* E la definizione è legittima in quanto $\Omega({}^p\Xi)$ non dipende da p.

7.

Abbiamo definito il grado della trasformazione $\mathcal{T}$ per un qualunque ciclo Ξ del complesso singolare totale $S(E - E_0)$.

Il grado così definito resta invariato per le successive suddivisioni baricentriche di Ξ, ed è evidente che se $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$ sono cicli di $E - E_0$ e $\Xi = \sum_1^n{}_i \, \mu_i \Xi_i$ allora $\Omega(\Xi) = \sum_1^n{}_i \, \mu_i \Omega(\Xi_i)$

Infatti basta considerare $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$ come cicli di un sottocomplesso finito K di $S(E - E_0)$. Allora se p è abbastanza grande ${}^pK$ è normale e per la a) del n. 6.

$$\Omega({}^p\Xi) = \sum_1^n{}_i \, \mu_i \, \Omega({}^p\Xi_i).$$

Inoltre si verifica subito che, in analogia a quanto abbiamo dimostrato in c) per cicli di un complesso normale K:

Se Ξ *è un ciclo di* $E - E_0$ *omologo a zero in* $E - E_0$, $\Omega(\Xi) = 0$.

Da qui segue:

Se Ξ_1 *e* Ξ_2 *sono due cicli di* $E - E_0$ *e* $\Xi_1 \sim \Xi_2$ *in* $E - E_0$ $\Omega(\Xi_1) = \Omega(\Xi_2)$.

8. Teorema di esistenza di punti uniti in trasformazioni plurivalenti di una 3-cella.

Come applicazione della teoria svolta diamo un teorema di esistenza di punti uniti per una trasformazione plurivalente $\mathcal{T}$ dei punti di E, soddisfacente alle condizioni I, II, III, IV, V del n. 2, nel caso che E sia una 3-cella. In tale ipotesi E è il supporto di un simplesso topologico X. Se sulla frontiera di E non ci sono punti uniti, X è un ciclo di $E - E_0$, e possiamo pertanto valutare $\Omega(\dot{X})$. Ora se $\Omega(\dot{X}) \neq 0$ *esiste almeno un punto* $P \in E$ *tale che* $P \in \mathfrak{T}(P)$.

Infatti se l'insieme E_0 fosse vuoto, $\dot{X}$ sarebbe un ciclo di $E - E_0$ omologo a zero in $E - E_0$. Pertanto sarebbe $\Omega(\dot{X}) = 0$ contro l'ipotesi. Valutiamo ora il *grado* della trasformazione $\mathfrak{T}$ relativo ad $\dot{X}$ nel caso che E sia il supporto di un simplesso lineare tridimensionale H, $(E = |H|,\ \dot{X} = \dot{H})$, e che $\mathfrak{T}(|\dot{H}|) \subset E$. Consideriamo un simplesso H^* omotetico ad H con centro di omotetia nel baricentro 0 di H e tale che $|H| \subset |H^*|$.

Definiamo la trasformazione $\mathfrak{T}^*$ dei punti P del supporto E^* di H^* nel seguente modo:

$$\mathfrak{T}^*(P) = \quad (P) \quad \text{se} \quad P \in E$$

$$\mathfrak{T}^*(P) = \mathfrak{T}(P_1) \quad \text{se} \quad P \in E^* - E$$

dove P_1 è il punto della frontiera di H che si ottiene proiettando P da 0.

È evidente che la trasformazione $\mathfrak{T}^*$ soddisfa, come la $\mathfrak{T}$ alle condizioni I II III del n. 2. Per la $\mathfrak{T}^*$ risulteranno inoltre verificate anche le condizioni IV e V dello stesso numero ove si ponga:

$$F_P^*(\tau) = F_P(\tau) \quad \text{se} \quad P \in E$$

$$F_P^*(\tau) = F_{P_1}(\tau) \quad \text{se} \quad P \in E^* - E.$$

Si osservi che, in base alla definizione di $\mathfrak{T}^*$ l'immagine di $|\dot{H}^*|$, $\mathfrak{T}^*(|\dot{H}|)$, è rinchiudibile nell'insieme pluriconvesso E ed E è disgiunto da $\dot{H}^*$. Pertanto per la b) del n. 6 risulta:

$$\Omega^*(\dot{H}^*) = \omega(P, \dot{H}^*) \quad \text{con} \quad P \in \dot{H}^*$$

ed essendo l'*ordine* di un qualsiasi punto interno ad E^* rispetto ad $\dot{H}^*$, ± 1 a seconda dell'orientazione di $\dot{H}^*$, si ha:

$$\Omega^*(\dot{H}^*) = \pm F_P^*[\mathfrak{T}^*(P)] = \pm F_{P_1}[\mathfrak{T}(P_1)] \quad (P_1 \in |\dot{H}|).$$

Si osservi che i cicli $\dot{H}^*$ ed $\dot{H}$ sono omologhi in $E^* - E_0$ e quindi risulta $\Omega^*(\dot{H}^*) = \Omega^*(\dot{H})$. D'altronde $\Omega^*(\dot{H}) = \Omega(\dot{H})$ poichè $|\dot{H}| \subset E$ e in tutto E la $\mathfrak{T}^*(P)$ e la F_P^* coincidono rispettivamente con la $\mathfrak{T}(P)$ e la F_P. Si avrà quindi:

$$\Omega(\dot{H}) = \Omega^*(\dot{H}) = \Omega^*(\dot{H}^*) = \pm F_{P_1}[\mathfrak{T}(P_1)] \quad (P_1 \in |\dot{H}|).$$

La funzione $F_P[\mathfrak{T}(P)]$ non varia al variare di P in E, quindi sarà

$$\Omega(\dot{H}) = \pm F_P[\mathfrak{T}(P)] \qquad (P \in E).$$

Siamo ora in grado di enunciare il seguente teorema:

Se $\mathfrak{T}$ *è una trasformazione plurivalente di una 3-cella* E*, supporto di un simplesso lineare* H *di* $\mathcal{E}^{(3)}$*, che faccia corrispondere ad ogni punto* $P \in E$ *un numero finito di punti e che soddisfi alle condizioni* II, IV, V *del* n. 2, *e se inoltre*:

α) *Per ogni* $P \in |\dot{H}|$ *sia* $\mathfrak{T}(P) \subset E$

β) $F_P[\mathfrak{T}(P)] \neq 0 \qquad (P \in E)$

allora esiste in E *almeno un punto* $P \in \mathfrak{T}(P)$.

Il teorema sussiste anche nel caso che E *sia il supporto di un simplesso topologico tridimensionale* X *appartenente ad* $\mathcal{E}^{(3)}$ *e che sia possibile porre un omeomorfismo* Φ *tra i i punti dello spazio euclideo tridimensionale* $\Sigma^{(3)}$ *e i punti di* $\mathcal{E}^{(3)}$*, tale che* X *risulti il trasformato mediante* Φ *di un simplesso lineare* H *di* $\Sigma^{(3)}$.

In questa ipotesi definiamo la trasformazione $\overline{\mathfrak{T}}$ dei punti $P \in |H|$ nel seguente modo

$$\overline{\mathfrak{T}} = \Phi^{-1}\mathfrak{T}\Phi(P) \qquad (P \in |H|) \tag{8}$$

La trasformazione $\overline{\mathfrak{T}}$ fa corrispondere ad ogni punto $P \in |H|$ un numero finito di punti ed è superiormente semicontinua.

Dimostriamo che $\overline{\mathfrak{T}}$ soddisfa anche alle altre ipotesi del teorema enunciato. Si ponga:

$$\overline{F}_P(\tau) = F_{P'}(\tau')$$

dove $P' = \Phi(P)$ e τ' è il *pezzo* di $\mathfrak{T}(P')$ corrispondente a τ nell'omeomorfismo Φ. La funzione $\overline{F}_P(\tau)$ è evidentemente una funzione additiva dei *pezzi* τ di $\overline{\mathfrak{T}}(P)$. Inoltre se A è un insieme aperto di $\Sigma^{(3)}$ la cui frontiera sia disgiunta da $\overline{\mathfrak{T}}(P_0)$

($P_0 \in | H |$) il corrispondente A' di A attraverso Φ è un insieme aperto di $\mathcal{E}^{(3)}$ la cui frontiera è disgiunta da $\mathcal{T}(P'_0)$ e risulta:

$$\bar{F}_{P_0}[A \cdot \bar{\mathcal{T}}(P_0)] = F_{P_0'}[A' \cdot \mathcal{T}(P'_0)].$$

Poichè la trasformazione $\mathcal{T}$ soddisfa all'ipotesi V del n. 2 potremo determinare un numero $\rho' > 0$ in modo che risulti:

$$F_{P'}[A' \cdot \mathcal{T}(P')] = F_{P_0'}[A' \cdot \mathcal{T}(P'_0)] \quad \text{se} \quad P' \in [P'_0]_{\rho'} \cdot E.$$

Ma essendo Φ un omeomorfismo si può determinare un numero $\rho > 0$ tale che per ogni $P \in [P_0]_\rho$ sia $\Phi(P) \in [P'_0]_{\rho'}$. Quindi se $P \in [P_0]_\rho \cdot | H |$:

$$\bar{F}_P[A \cdot \bar{\mathcal{T}}(P)] = F_{P'}[A' \cdot \mathcal{T}(P')] = F_{P_0'}[A' \cdot \mathcal{T}(P'_0)] = F_{P_0}[A \cdot \bar{\mathcal{T}}(P_0)]$$

Pertanto la trasformazione $\bar{\bar{\mathcal{T}}}$ soddisfa alla condizione V del n. 2. Inoltre

$$\bar{F}_P[\bar{\mathcal{T}}(P)] = F_{P'}[\mathcal{T}(P')] \qquad (P \in \bar{H} \quad P' = \Phi(P))$$

e per la $\dddot{\mathcal{T}}'$ è soddisfatta anche l'ipotesi β).

Se si osserva infine che l'esistenza di punti uniti nella $\mathcal{T}$ equivale all'esistenza di punti uniti nella $\mathcal{T}$, nel senso che se esistono punti $P' \in \mathcal{T}(P')$ esistono anche punti $P \in \bar{\mathcal{T}}(P)$ e viceversa, il teorema sarà dimostrato.

Oss. - Se E è una 3-cella supporto di un simplesso topologico X appartenente ad $\mathcal{E}^{(3)}$, per cui non sia possibile porre un omeomorfismo Φ fra tutto lo spazio $\Sigma^{(3)}$ ed $\mathcal{E}^{(3)}$ che faccia corrispondere X ad un simplesso lineare H di $\Sigma^{(3)}$, il teorema sussiste ancora se si sostituisce alla α) la seguente ipotesi;

α') Per ogni punto $P \in E$ sia $\mathcal{T}(P) \subset E$.

In questo caso infatti l'esistenza di un omeomorfismo Φ che fa corrispondere X ad un simplesso lineare tridimensionale H, è sufficiente per la dimostrazione del teorema.

9.

Se $\mathcal{T}$ è una trasformazione di una 3-cella E in sè, superiormente semicontinua in tutto E, per cui siano soddisfatte le seguenti condizioni:

α_1) *se P_0 è un punto qualunque di E e se τ_0 è un pezzo di $\mathcal{T}(P_0)$ l'insieme $\mathcal{T}(P)\cdot[\tau_0]_\varepsilon$ per ogni $\varepsilon>0$ sia definitivamente non vuoto al tendere di P a P_0 in E* [16]).

α_2) *$\mathcal{T}(P)$ per ogni $P\in E$ sia costituito da al più due punti,* allora $\mathcal{T}$ soddisfa a tutte le condizioni del teorema precedente.

Basta porre infatti

$$(9) \qquad F_P(\tau)\begin{cases} 0 & \text{se} \quad \tau=0 \\ 1 & \text{se} \quad \tau\neq 0 \quad \text{e} \quad \tau\neq\mathcal{T}(P) \\ 2 & \text{se} \quad \tau=\mathcal{T}(P) \end{cases}$$

τ essendo un pezzo qualunque di $\mathcal{T}(P)$. Si riconosce subito che la $F_P(\tau)$ ora definita è una funzione additiva dei *pezzi* τ di $\mathcal{T}(P)$. Bisogna dimostrare ora che vale la condizione V del n. 2.

Sia infatti $P_0\in E$ ed A un insieme aperto la cui frontiera sia disgiunta da $\mathcal{T}(P_0)$; si possono presentare tre casi:

1°. $A\cdot\mathcal{T}(P_0)=0$. Se ε è un numero positivo minore della distanza certamente positiva tra $\mathcal{T}(P_0)$ e la frontiera di A, per la semicontinuità superiore di $\mathcal{T}(P)$ è possibile determinare un $\rho>0$ tale che per ogni $P\in E\cdot[P_0]_\rho$ si abbia: $\mathcal{T}(P)\subset[\mathcal{T}(P_0)]_\varepsilon$, ma allora per $P\in E\cdot[P_0]_\rho$ sarà $A\cdot\mathcal{T}(P)=0$ da cui per la (9):

$$F_P[A\cdot\mathcal{T}(P)]=F_{P_0}[A\cdot T(P_0)]=0.$$

2°. $A\cdot\mathcal{T}(P_0)=\mathcal{T}(P_0)$; per $P\in E\cdot[P_0]_\rho$ è $\mathcal{T}(P)\subset[\mathcal{T}(P_0)]_\varepsilon\subset A$ e per tali P si avrà per la (9)

$$F_P[A\cdot\mathcal{T}(P)]=F_{P_0}[A\cdot T(P_0)]=2.$$

3°. $A\cdot\mathcal{T}(P_0)\neq 0$, $A\cdot\mathcal{T}(P_0)\neq\mathcal{T}(P_0)$; in questo caso $\mathcal{T}(P_0)$

---

[16]) Cioè per ogni $\varepsilon>0$ esista un intorno di P_0, $[P_0]_\rho$ tale che per $P\in[P_0]_\rho\cdot E$ sia $\mathcal{T}(P)\cdot[\tau_0]_\varepsilon\neq 0$.

è costituito da due punti P_1 e P_2 uno interno e l'altro esterno ad A.

Per $P \in E \cdot [P_0]_\rho$ si avrà $\mathfrak{T}(P) \subset [P_1]_\varepsilon + [P_2]_\varepsilon = [\mathfrak{T}(P_0)]_\varepsilon$ e se ρ è abbastanza piccolo per la (α_2), ciascun *pezzo* $\mathfrak{T}(P) \cdot [P_1]_\varepsilon$, $\mathfrak{T}(P) \cdot [P_2]_\varepsilon$ è non vuoto ed è quindi un componente di $\mathfrak{T}(P)$.

Se P_1 è il componente di $\mathfrak{T}(P_0)$ contenuto in A si ha:

$$A \cdot \mathfrak{T}(P) = \mathfrak{T}(P) \cdot [P_1]_\varepsilon \neq \mathfrak{T}(P)$$

per ogni $P \in E \cdot [P_0]_\rho$. Avremo dunque in questo caso per la (9)

$$F_P[A \cdot \mathfrak{T}(P)] = F_{P_0}[A \cdot \mathfrak{T}(P_0)] = 1.$$

È soddisfatta quindi la condizione V del n. 2. Inoltre si ha:

$$F_P[\mathfrak{T}(P)] = 2 \quad \text{per} \quad P \in E$$

e la trasformazione $\mathfrak{T}$ soddisfa a tutte le ipotesi del teorema del n. 8. Pertanto esiste almeno un punto $P \in E$ per cui risulti $P \in \mathfrak{T}(P)$.