RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARIO VOLPATO

**Sugli elementi uniti delle trasformazioni funzionali continue**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 25 (1956), p. 343-356

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__343_0>

# SUGLI ELEMENTI UNITI DELLE TRASFORMAZIONI FUNZIONALI CONTINUE

*Nota* (*) *di* MARIO VOLPATO (*a Ferrara*)

Altrove ho stabilito un teorema sull'esistenza di elementi uniti di una trasformazione continua in uno spazio funzionale lineare, normale, completo, senza richiedere la completa continuità della trasformazione stessa [1]).

In questa Nota dimostro che nelle ipotesi di quel teorema, considerate anche in una forma più ampia, si può caratterizzare un insieme chiuso, convesso, limitato che contiene la propria immagine e nel quale la trasformazione è completamente continua. Di guisa che [2]) quell'insieme contiene elementi uniti della trasformazione, i quali, in quanto contenuti in quell'insieme, godono, eventualmente, di certe proprietà, che potreb-

---

(*) Pervenuta in Redazione il 25 aprile 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto matematico, Università, Ferrara

L'argomento della presente Nota è stato oggetto di una comunicazione al V Congresso dell'U.M.I. (Pavia-Torino, 6-12 ottobre 1955).

1) M. VOLPATO, *Sugli elementi uniti di trasformazioni funzionali: un problema ai limiti per una classe di equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico*, Annali dell'Univ. di Ferrara, (nuova serie), sezione VII, vol. II, (1953), pp. 93-109.

Un teorema analogo, con referenza a trasformazioni continue in uno spazio lineare, normale, completo qualsiasi, è stato, successivamente, indicato da G. DARBO, *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*, Rendic. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. XXIV, (1955), pp. 84-92.

Non sarebbe del tutto privo di interesse vedere se le condizioni da me assunte sono o no contenute in quelle di DARBO.

2) A norma del classico principio di Birkhoff-Kellogg-Schauder-Caccioppoli.

bero sfuggire se la loro esistenza fosse stabilita col mio teorema ricordato in (1): si vegga l'esempio del n. 8 e la nota, a piè di pagina, [6]). Il teorema del n. 1 si riferisce a trasformazioni definite nello spazio delle funzioni continue, mentre quello che enuncio al n. 9 si riferisce a trasformazioni definite nello spazio delle funzioni di potenza $p$-ma ($p \geq 1$) sommabile secondo Lebesgue.

**1.** - Ecco il primo dei teoremi cui alludo nelle righe precedenti.

*Siano:*

I) *$X$ lo spazio (lineare, normale, completo) delle funzioni reali $z(P)$, $P \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, continue nell'intervallo:*

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2 \times \ldots \times \mathfrak{J}_\nu, \quad \mathfrak{J}_r = a_r \leq x_r \leq b_r, \quad (a_r < b_r,\ r = 1, 2, \ldots, \nu),$$

*dello spazio reale euclideo $\mathcal{E}^\nu$ (a $\nu$, $\nu \geq 1$, dimensioni), la metrica essendo definita assumendo come norma*

$$\| z(P) \| = \operatorname*{Max}_{P \in \mathfrak{J}} | z(P) | ;$$

II) *$v(P) = T[z(P)]$ una trasformazione continua definita in un insieme convesso e chiuso $X_0$ di $X$.*

*Inoltre,*

III) *l'immagine $V_0$ di $X_0$ sia una porzione limitata di $X_0$;*

IV) *esistano: $\nu$ costanti $k_i(X_0)$, $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$, soddisfacenti le $\nu$ disuguaglianze*

$$0 \leq k_i(X_0) < 1, \tag{1}$$

*e $\nu$ funzioni reali $H_i(X_0, \xi)$, $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$, della variabile reale $\xi$, non negative e infinitesime per $\xi \to 0$, tali che, per ogni elemento $z(P)$ di $X_0$, e per ogni fissata coppia $x_i'$, $x_i''$ di punti di $\mathfrak{J}_i$, siano soddisfatte le $\nu$ disuguaglianze:*

$$\begin{aligned} &| v(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_\nu) - v(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_\nu) | \leq \\ &\leq k_i(X_0) \left\{ \operatorname*{Estr.\,Sup.}_{\substack{x_r \in \mathfrak{J}_r \\ r \neq i}} | z(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_\nu) - z(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_\nu) | \right\} + \\ &\qquad + H_i(X_0, | x_i' - x_i'' |), \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu). \end{aligned} \tag{2}$$

*In tali ipotesi:*

$\alpha$) *il sottoinsieme $X_0^*$, di $X_0$, formato dagli elementi che, per ogni fissata coppia $x_i'$, $x_i''$ di punti di $\mathfrak{J}_i$, soddisfano le $\nu$ disuguaglianze:*

$$|z(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_\nu) - z(x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_\nu)| \leq \tag{3}$$
$$\leq \frac{H_i(X_0, |x_i' - x_i''|)}{1 - k_i(X_0)}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

*non è vuoto, è chiuso e convesso;*

$\beta$) *l'immagine $V_0^*$ di $X_0^*$ è una porzione limitata di $X_0^*$;*

$\gamma$) *la trasformazione $T$ è completamente continua in $X_0^*$, e quindi ha almeno un elemento unito in $X_0^*$.*

La dimostrazione è indicata nei numeri che seguono.

**2.** - Per brevità di scrittura, useremo le notazioni:

$$P_i' \equiv (x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_\nu); \quad P_i'' \equiv (x_1, \ldots, x_i'', \ldots, x_\nu); \tag{4}$$
$$k_i = k_i(X_0); \; H_i(\xi) = H_i(X_0, \xi).$$

Ciò posto, dimostriamo intanto che: *$X_0^*$ è non vuoto.*

Sia infatti $z_0(P)$ un qualsivoglia elemento di $X_0$, e costruiamo la successione:

$$T[z_0(P)] = v_1(P); \; T[v_1(P)] = v_2(P); \ldots; \; T[v_{n-1}(P)] = v_n(P); \ldots \tag{5}$$

A norma dell'ipotesi III), la successione: $\{v_n(P)\}$ è formata da funzioni equilimitate, appartenenti all'insieme $X_0$.

Inoltre, a norma dell'ipotesi IV), la generica $v_n(P)$ soddisfa le $\nu$ relazioni:

$$|v_n(P_i') - v_n(P_i'')| \leq k_i^n \left\{ \operatorname*{Estr.\,Sup.}_{\substack{x_r \in \mathfrak{J}_r \\ r \neq i}} |z_0(P_i') - z_0(P_i'')| \right\} + \tag{6}$$
$$+ \frac{H_i(|x_i' - x_i''|)}{1 - k_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

Ora, osservato che, a norma della (1), il secondo membro di ognuna delle $\nu$ disuguaglianze (6) è maggiorato dall'espressione

$$\text{(7)} \qquad \underset{\substack{x_r \in \mathfrak{J}_r \\ r \neq i}}{\text{Estr. Sup.}} \, | z_0(P_i') - z_0(P_i'') | + \frac{H_i(| x_i' - x_i'' |)}{1 - k_i},$$

indipendente da $n$ e infinitesima con $| x_i' - x_i'' |$, segue che le funzioni della successione $\{v_n(P)\}$ sono pure equicontinue.

Esisterà quindi una sottosuccessione, uniformemente convergente verso una $v(P)$, la quale, per la supposta chiusura di $X_0$, apparterrà ad $X_0$. Inoltre, come si deduce facilmente dalle (6), $v(P)$ soddisferà le $\nu$ disuguaglianze:

$$\text{(8)} \qquad | v(P_i') - v(P_i'') | \leq \frac{H_i(| x_i' - x_i'' |)}{1 - k_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu),$$

e quindi apparterrà ad $X_0^*$. La nostra affermazione è così provata.

**3.** - Proviamo ora che: $X_0^*$ *è convesso.*

Infatti, se $p$ e $q$ sono due numeri non negativi per cui $p + q = 1$, e se $z_1(P)$, $z_2(P)$ sono due elementi di $X_0^*$ (e quindi di $X_0$), l'elemento $z(P) = pz_1(P) + qz_2(P)$, che per la supposta convessità di $X_0$ appartiene ad $X_0$, appartiene pure ad $X_0^*$ perchè, atteso che per gli elementi $z_1(P)$, $z_2(P)$ di $X_0^*$ sono verificate le (3), sussistono le relazioni:

$$\text{(9)} \quad | z(P_i') - z(P_i'') | \leq p \, | z_1(P_i') - z_1(P_i'') | + q \, | z_2(P_i') - z_2(P_i'') | \leq$$

$$\leq (p + q) \frac{H_i(| x_i' - x_i'' |)}{1 - k_i} = \frac{H_i(| x_i' - x_i'' |)}{1 - k_i}, \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu).$$

**4.** - Dimostriamo che: $X_0^*$ *è chiuso.*

Sia $z(P)$ un elemento, dello spazio $X$, d'accumulazione per $X_0^*$, e proviamo che: $z(P) \in X_0^*$.

Attesa la relazione: $X_0^* \subset X_0$, segue che $z(P)$ è pure d'accumulazione per $X_0$ e quindi che $z(P) \in X_0$. Basta allora provare che per $z(P)$ sono soddisfatte le $\nu$ disuguaglianze indicate in (3).

Queste, come ora vedremo, sono effettivamente soddisfatte.

Infatti, essendo $z(P)$ d'accumulazione per $X_\bullet^*$, fissato un $\varepsilon > 0$ arbitrario, esistono, in $X_\bullet^*$, degli elementi $z^*(P)$ tali che, per ogni $P \in \mathfrak{J}$, sia

$$|z(P) - z^*(P)| < \varepsilon. \tag{10}$$

Di qui e dalle (3), valide per $z^*(P)$, segue senz'altro

$$|z(P_i') - z(P_i'')| \leq \frac{H_i(|x_i' - x_i''|)}{1 - k_i} + 2\varepsilon, \tag{11}$$

la quale, data l'arbitrarietà di $\varepsilon$, mostra che anche $z(P)$ soddisfa alle (3). Donde la conclusione.

**5.** - Dimostriamo ora la $\beta$).

Essendo, per definizione, $X_\bullet^* \subset X_0$, si ha che $V_\bullet^* \subset V_0$; e la supposta limitatezza di $V_0$ porge la limitatezza di $V_\bullet^*$. Resta quindi da provare che l'immagine $v(P)$, di un elemento $z(P)$ di $X_\bullet^*$, appartiene ad $X_\bullet^*$. Ciò nel fatto è vero, perchè l'ipotesi III) porge la relazione di appartenenza: $v(P) \in X_0$ e l'ipotesi IV) porge le

$$|v(P_i') - v(P_i'')| \leq k_i \left\{ \underset{\substack{x_r \in \mathfrak{J}_r \\ r \neq i}}{\text{Estr. Sup.}} |z(P_i') - z(P_i'')| \right\} + \tag{12}$$
$$+ H_i(|x_i' - x_i''|), \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

dalle quali, atteso che $z(P)$ soddisfa le (3), segue

$$|v(P_i') - v(P_i'')| \leq k_i \frac{H_i(|x_i' - x_i''|)}{1 - k_i} + H_i(|x_i' - x_i''|) = \tag{13}$$
$$= \frac{H_i(|x_i' - x_i''|)}{1 - k_i}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu).$$

**6.** - Per completare la dimostrazione del teorema enunciato al n. 1 resta da provare la $\gamma$). Questa prova è immediata. Basta infatti osservare che ogni successione limitata di elementi di $X_\bullet^*$, a norma delle (3), è compatta e quindi, attesa la continuità della trasformazione $T$, essa verrà mutata in un'altra successione pure compatta [3]). Infine, la conclusione che $T$ ha almeno un elemento unito in $X_0^*$ è conseguenza del fatto che in $X_0^*$, per quanto si è finora provato, sussistono tutte le ipotesi per poter applicare il classico principio di Birkhoff-Kellogg-Schauder-Caccioppoli [4]).

**7.** - È appena il caso di osservare che se

$$z(P) \equiv [z_1(P), z_2(P), \dots, z_n(P)], \tag{14}$$

è una $n$-upla di funzioni continue in $\mathfrak{J}$, eventualmente legate fra loro da un complesso $\Phi$ di operazioni funzionali additive ed omogenee [5]), e se la trasformazione $T$ conserva quel complesso di relazioni, cioè le funzioni della $n$-upla

$$v(P) \equiv [v_1(P), v_2(P), \dots, v_n(P)], \tag{15}$$

immagine, nella $T$, della (14), sono anch'esse vincolate dallo stesso complesso $\Phi$, il teorema del n. 1 continua a sussistere anche se col simbolo $z(P)$, che figura nell'enunciato del teorema, si intende la $n$-upla (14). Naturalmente, con questa accezione per $z(P)$, si dovrà porre:

$$\| z(P) \| = \sum_1^n{}_r \operatorname*{Max.}_{P \in \mathfrak{J}} | z_r(P) |, \tag{16}$$

---

3) Cfr., per es., C. KURATOWSKI, *Topologie*, vol. I, 3ª éd., Warszawa (1952), p. 92, n. 5.

4) Cfr., per es., C. MIRANDA, *Problemi di esistenza in analisi funzionale*, Quaderni Matem. Scuola Normale Superiore Pisa (1948-49), p. 161, Teor. I.

5) Di guisa che dallo stesso complesso $\Phi$ sono vincolate e le funzioni di una $n$-upla prodotto della (14) per un numero reale $a$ e quelle di una $n$-upla somma di due $n$-uple del tipo (14). Per esempio, se $z^{(0)}(P)$ è una funzione continua in $\mathfrak{J}$ assieme ad alcune sue derivate parziali, che per semplicità di scrittura, indichiamo coi simboli $z^{(1)}(P)$, $z^{(2)}(P)$, ..., $z^{(n-1)}(P)$, la $n$-upla

$$z(P) \equiv [z^{(0)}(P), z^{(1)}(P), \dots, z^{(n-1)}(P)],$$

è formata da funzioni fra loro legate da un complesso di operazioni additive ed omogenee.

$$(17)\qquad |z(P)| = \sum_1^n {}_r\, |z_r(P)|,$$

$$(18)\qquad |z(x_1, \dots, x_i', \dots, x_\nu) - z(x_1, \dots, x_i'', \dots, x_\nu)| =$$

$$= \sum_1^n {}_r\, |z_r(x_1, \dots, x_i', \dots, x_\nu) - z_r(x_1, \dots, x_i'', \dots, x_\nu)|.$$

**8.** - A titolo di esempio, facciamo vedere che, applicando il teorema del n. 1 allo studio della trasformazione funzionale

$$(19)\qquad v(x, \lambda) = \lambda + \int_a^x f[t, z(t, \lambda)]dt,$$

si può stabilire, simultaneamente, l'esistenza *in grande* di una soluzione del problema di Cauchy

$$(20)\qquad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(a) = \lambda, \end{cases}$$

e la uniforme lipschitzianeità della soluzione stessa rispetto al valore iniziale $\lambda$, assumendo delle ipotesi che generalizzano quelle classiche. Precisamente dimostriamo che: *se sono soddisfatte le seguenti ipotesi*:

$\mathrm{I_a}$) *$f(x, y)$ è una funzione, reale di variabili reali, definita nella striscia.*

$$S:\ a \leq x \leq b \quad ; \quad |y| < +\infty,$$

*ivi misurabile rispetto ad $x$ e continua rispetto ad $y$;*

$\mathrm{II_a}$) *esistono due funzioni non negative $P(x)$, $Q(x)$ sommabili nell'intervallo $I$: $a \leq x \leq b$ e un numero reale positivo $\Lambda$ tali che nel dominio*

$$D:\ a \leq x \leq b,\ |y| \leq e^{\int_a^x P(t)dt}\left[\Lambda + \int_a^x Q(t)e^{-\int_a^t P(\xi)d\xi}dt\right],$$

*sia soddisfatta la*

$$(21)\qquad |f(x, y)| \leq P(x)\,|y| + Q(x),$$

*e inoltre la*

$$(22) \qquad | f(x, y') - f(x, y'') | \leq k(x) \, | y' - y'' | ,$$

*con* $k(x)$ *funzione non negativa sommabile in* $I$*; allora esistono una e una sola funzione* $y(x, \lambda)$ *continua nel rettangolo* $R(a \leq x \leq b;\ |\lambda| \leq \Lambda)$, *assolutamente continua rispetto ad* $x$ *in* $I$, *e una costante* $L$ *tale che si abbia*

$$(23) \qquad y(x, \lambda) = \lambda + \int_a^x f(t\, y(t, \lambda))dt,$$

$$(24) \qquad | y(x, \lambda') - y(x, \lambda'') | \leq L \, | \lambda' - \lambda'' | ,$$

$$(25) \qquad | y(x, \lambda) | \leq e^{\int_a^x P(t)dt} \left[ \Lambda + \int_a^t Q(t) e^{-\int_a^t P(\xi)d\xi} dt \right].$$

Dimostriamo la proposizione supponendo, provvisoriamente, che sia soddisfatta anche la

$$(26) \qquad \int_a^b k(t)dt < 1.$$

Attualmente lo spazio $X$ avrà come elementi le funzioni $z(x, \lambda)$ continue in $R$. Ebbene, posto

$$(27) \qquad M(x, \lambda) = P(x) e^{\int_a^x P(t)dt} \left[ | \lambda | + \int_a^x Q(t) e^{-\int_a^t P(\xi)d\xi} dt \right] + Q(x)$$

indichiamo con $X_0$ l'insieme (chiuso, convesso, limitato), di $X$, formato dagli elementi $z(x, \lambda)$ per cui sussiste la

$$(28) \qquad | z(x, \lambda) - \lambda | \leq \int_a^x M(t, \lambda)dt.$$

In $X_0$ la trasformazione funzionale $T$, definita dalla (19), è continua, ma non completamente continua. Vedremo ora, però, che per la $T$ sono soddisfatte tutte le condizioni per poter applicare il teorema del n. 1. Proviamo intanto che l'immagine $v(x, y)$ di un elemento $z(x, \lambda)$ di $X_0$ appartiene ad $X_0$. Infatti, poichè gli elementi di $X_0$ soddisfano la (28), e quindi la

$$(29) \qquad |z(x, \lambda)| \leq |\lambda| + \int_a^x M(t, \lambda)dt =$$

$$= e^{\int_a^x P(t)dt}\left[|\lambda| + \int_a^x Q(t)e^{-\int_a^t P(\xi)d\xi} dt\right],$$

a norma dell'ipotesi II$_a$) segue

$$(30) \qquad |f(x, z(x, \lambda))| \leq P(x)\,|z(x, \lambda)| + Q(x),$$

e quindi, attesa la (29), la

$$(31) \qquad |f(x, z(x, \lambda))| \leq M(x, \lambda).$$

Questa e la (19) porgono la

$$(32) \qquad |v(x, \lambda) - \lambda| \leq \int_a^x M(t, \lambda)dt,$$

sufficiente, assieme all'evidente continuità di $v(x, \lambda)$, per dire che $v(x, \lambda)$ appartiene ad $X_0$. Ma anche l'ipotesi IV) del teorema del n. 1 è soddisfatta. Per questo basta osservare che, posto $M^*(x) = M(x, \Lambda)$, sussistono le

$$(33) \qquad |v(x', \lambda) - v(x'', \lambda)| \leq \left|\int_{x'}^{x''} M^*(t)dt\right|,$$

$$(34) \qquad |v(x, \lambda') - v(x, \lambda'')| \leq$$

$$\leq \int_a^b k(t)dt \left\{ \underset{x \in I}{\text{Estr. Sup.}}\, |z(x, \lambda') - z(x, \lambda'')| \right\} + |\lambda' - \lambda''|,$$

in virtù dell'ipotesi II$_a$) e ricordare che vale la (26).

Allora, detto $X_0^*$ l'insieme degli elementi $z(x, \lambda)$ di $X_0$ per i quali sono soddisfatte le

$$|z(x', \lambda) - z(x'', \lambda)| \leq \left| \int_{x'}^{x''} M^*(t)dt \right|, \tag{35}$$

$$|z(x, \lambda') - z(x, \lambda'')| \leq \frac{|\lambda' - \lambda''|}{1 - \int_a^b k(t)dt} \tag{36}$$

a norma del teorema del n. 1, esiste almeno un elemento $y(x, \lambda)$, di $X_0^*$, unito in $T$, soddisfacente le (28), (35), (36). Tale elemento è unico, perchè la relazione

$$\| v_1(x, \lambda) - v_2(x, \lambda) \| \leq \int_a^b k(t)dt \, \| z_1(x, \lambda) - z_2(x, \lambda) \|, \tag{37}$$

di immediata verifica, assicura che la trasformazione $T$ è, in $X_0$, una *contrazione* [6]). Per completare la nostra dimostrazione non resta che liberarci dall'ipotesi supplettiva espressa dalla (26). Se questa non è soddisfatta, dato che l'assoluta continuità della funzione: $\int_a^x k(t)dt$ assicura l'esistenza di un numero positivo $\delta$ tale che per ogni $\xi$ di $I$ si ha

$$\int_\xi^{\xi+\delta} k(t)dt < 1, \tag{38}$$

detto $a_1$ un punto di $I$ per cui sia $a_1 \leq a + \delta$, col ragionamento precedente, si prova intanto che nel rettangolo

---

[6]) Come è noto, questa circostanza, a norma di un teorema di CACCIOPPOLI (*Un teorema generale sulla esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale*, Rend. Acc. Naz. Lincei, serie 6ª, vol. 11, (1930), pp. 794-799) assicura da sola l'esistenza e unicità di un elemento $y(x, \lambda)$ di $X_0$ soddisfacente la (23). Però, in questo modo, non si viene a conoscere che $y(x, \lambda)$ soddisfa la (36). Analoga osservazione può farsi se l'esistenza di $y(x, \lambda)$, soddisfacente la (23), venisse stabilita col mio teorema del loco cit. in [1]).

$R_1 (a \leq x \leq a_1 ,\ |\lambda| \leq \Lambda)$ esiste una sola funzione $y_1(x, \lambda)$ per cui si ha

$$y_1(x, \lambda) = \lambda + \int_a^x f(t, y_1(t, \lambda))dt, \tag{39}$$

$$| y_1(x, \lambda') - y_1(x, \lambda'') \leq \frac{|\lambda' - \lambda''|}{1 - \int_a^{a_1} k(t)dt} = L_1 |\lambda' - \lambda''|, \tag{40}$$

$$| y_1(x, \lambda) - \lambda | \leq \int_a^x M(t, \lambda)dt. \tag{41}$$

Ora proveremo che nel rettangolo $R_2(a_1 \leq x \leq a_2 ,\ |\lambda| \leq \Lambda)$, con $a_1 < a_2 \leq a_1 + \delta$, esiste una sola funzione continua $y_2(x, \lambda)$ per cui sono soddisfatte le

$$y_2(x, \lambda) = y_1(a_1, \lambda) + \int_{a_1}^x f(t, y_2(t, \lambda))dt, \tag{42}$$

$$| y_2(x, \lambda') - y_2(x, \lambda'') | \leq \frac{L_1}{1 - \int_{a_1}^{a_2} k(t)dt} |\lambda' - \lambda''| = L_2 |\lambda' - \lambda''|, \tag{43}$$

$$| y_2(x, y) - y_1(a_1, \lambda | \leq \int_{a_1}^x M(t, \lambda)dt. \tag{44}$$

Per questo scopo basta assumere come spazio $X$ l'insieme delle funzioni $z(x, \lambda)$ continue in $R_2$, come insieme $X_0$ gli elementi, di $X$, soddisfacenti la

$$| z(x, \lambda) - y_1(a_1, \lambda) | \leq \int_{a_1}^x M(t, \lambda)dt \tag{45}$$

e come trasformazione $T$ la

$$v(x, \lambda) = y_1(a_1, \lambda) + \int_{a_1}^x f(t, z(t, \lambda))dt. \tag{46}$$

Questa muta elementi di $X_0$ in elementi di $X_0$, perchè, per $R_2$, la (41) e la (45) porgono

$$(47)\qquad |z(x,\lambda)| \leq |\lambda| + \int_a^{a_1} M(t,\lambda)dt + \int_{a_1}^{x} M(t,\lambda)dt =$$

$$= e^{\int_a^x P(t)dt}\left[|\lambda| + \int_a^x Q(t)e^{-\int_a^t P(\xi)d\xi}dt\right],$$

mentre la (21), ovviamente valida anche nel dominio

$$D_2:\ a_1 \leq x \leq a_2,\quad |y| \leq e^{\int_a^x P(t)dt}\left[\Lambda + \int_a^x Q(t)e^{-\int_a^t P(\xi)d\xi}dt\right],$$

contenuto in $D$, porge la

$$(48)\qquad |f(x, z(x,\lambda))| \leq P(x)\,|z(x,\lambda)| + Q(x),$$

e quindi, attesa la (47), la

$$(49)\qquad |f(x, z(x,\lambda))| \leq M(x,\lambda).$$

La (33) continua a sussistere immutata, e, dato che in $D_2$ sussiste la (22), attesa la (40), la (34), diventa

$$(50)\qquad |v(x,\lambda') - v(x,\lambda'')| \leq$$

$$\leq \int_{a_1}^{a_2} k(t)dt \left\{ \underset{x \in (a_1, a_2)}{\text{Estr. Sup.}} |z(x,\lambda') - z(x,\lambda'')| \right\} + L_1 |\lambda' - \lambda''|.$$

Di qui e dal teorema del n. 1 la conclusione che in $R_2$ esiste una funzione continua $y_2(x,\lambda)$ che soddisfa le (42), (43), (44). L'unicità è ancora dovuta al fatto che $T$, definita dalla (46), è una *contrazione* in $X_0$.

Ripetendo per un conveniente numero finito $n$ di volte il procedimento descritto, si perviene all'esistenza di una sola funzione $y_n(x,\lambda)$, continua nel rettangolo $R_n(a_{n-1} \leq x \leq b,\ |\lambda| \leq \Lambda)$, $(b - a_{n-1} \leq \delta)$, tale che si abbia

$$(51)\qquad y_n(x,\lambda) = y_{n-1}(a_{n-1},\lambda) + \int_{a_{n-1}}^{x} f(t, y_n(t,\lambda))dt,$$

$$(52) \qquad | y_n(x, \lambda') - y_n(x, \lambda'') | \leq \frac{L_{n-1}}{1 - \int_{a_{n-1}}^{b} k(t)dt} | \lambda' - \lambda'' | = L_n | \lambda' - \lambda'' |,$$

$$(53) \qquad | y_n(x, \lambda) - y_{n-1}(a_{n-1}, \lambda) | \leq \int_{a_{n-1}}^{x} M(t, \lambda)dt.$$

Ovviamente risulta

$$(54) \qquad L_1 \leq L_2 \leq \ldots \leq L_n = L,$$

e allora si riconosce che la funzione $y(x, \lambda)$, definita in $R$ nel modo che segue:

$$(55) \qquad y(x, \lambda) = \begin{cases} y_1(x, \lambda) & \text{per} \quad (x, \lambda) \in R_1, \\ y_2(x, \lambda) & \text{»} \quad (x, \lambda) \in R_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ y_n(x, \lambda) & \text{»} \quad (x, \lambda) \in R_n, \end{cases}$$

soddisfa alle (23), (24), (25) che figurano nella proposizione da dimostrarsi.

**9.** - Ed ora passiamo al secondo dei teoremi cui ho alluso nella introduzione.

*Siano*:

I) $X$ *lo spazio* (*lineare, normale, completo*) *delle funzioni reali* $z(P)$, $P \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, *di potenza* $p$, $(p \geq 1)$, *sommabile, secondo Lebesgue, nell'intervallo*:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2 \times \ldots \times \mathfrak{J}_\nu, \ \mathfrak{J}_r = a_r \leq x_r \leq b^r, (a_r < b_r, \ r = 1, 2, \ldots, \nu),$$

*dello spazio reale euclideo* $\mathcal{E}^\nu$ (*a* $\nu$, $\nu \geq 1$, *dimensioni*), *la metrica essendo definita assumendo come norma*

$$|| z(P) || = \left\{ \int_{\mathfrak{J}} | z(P) |^p dP \right\}^{\frac{1}{p}};$$

II) $v(P) = T[z(P)]$ *una trasformazione continua definita in un insieme convesso e chiuso* $X_0$ *di* $X$.

*Inoltre,*

III) *l'immagine $V_0$ di $X_0$ sia una porzione limitata di $X_0$;*

IV) *esistano: una costante $k(X_0)$ soddisfacente la*

$$0 \leq k(X_0) < 1 \tag{56}$$

*e una funzione $H(X_0, \xi)$, della variabile reale $\xi$, non negativa e infinitesima per $\xi \to 0$, tali che per ogni n-upla $h \equiv (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ di numeri reali si abbia*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{v}(P+h) - \bar{v}(P)|^p dP \leq \tag{57}$$

$$\leq k(X_0) \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{z}(P+h) - \bar{z}(P)|^p dP + H(X_0, |h|),$$

*ove $|h| = (h_1^2 + h_2^2 + \ldots + h_n^2)^{1/2}$ e i simboli $\bar{v}(P)$, $\bar{z}(P)$ stanno ad indicare, rispettivamente, $v(P)$, $z(P)$ se $P \in \mathfrak{J}$, entrambi lo zero se $P$ è fuori di $\mathfrak{J}$.*

In tali ipotesi

$\alpha$) *il sottoinsieme $X_0^*$, di $X_0$, formato dagli elementi per i quali risulta*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{z}(P+h) - \bar{z}(P)|^p dP \leq \frac{1 - k(X_0)}{H(X_0, |h|)}, \tag{58}$$

*non è vuoto, è chiuso e convesso;*

$\beta$) *l'immagine $V_0^*$ di $X_0^*$ è una porzione limitata di $X_0^*$;*

$\gamma$) *la trasformazione $T$ è completamente continua in $X_0^*$, e quindi ha almeno un elemento unito (cioè equivalente in media di ordine p, alla propria immagine) in $X_0^*$.*

La dimostrazione si ottiene sulla falsariga di quella indicata per il teorema del n. 1.