

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SERGIO CAMPANATO

Sui problemi al contorno relativi al sistema di equazioni differenziali dell'elastostatica piana

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 25 (1956), p. 307-342

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1956__25__307_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1956, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUI PROBLEMI AL CONTORNO RELATIVI AL SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DELL' ELASTOSTATICA PIANA

Memoria () di SERGIO CAMPANATO (a Modena)*

Il presente lavoro è dedicato allo studio di varie questioni riguardanti i problemi al contorno, sia di tipo uniforme che misto ¹⁾, relativi al sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali

$$(I) \quad \Delta_2 \mathbf{u} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

relativo all'equilibrio di un corpo elastico, isotropo, omogeneo piano.

I principali risultati ai quali si giunge sono: la traduzione del secondo problema al contorno in un sistema di equazioni integrali ordinarie (a nucleo sommabile) di tipo di Fredholm; la risoluzione dello stesso problema anche nel caso del dato al contorno sommabile; uno studio dei potenziali di semplice e doppio strato elastico con « densità » e « momento » solo sommabili; infine un'applicazione al metodo di M. Picone per la risoluzione dei problemi al contorno mediante la loro

(*) Pervenuta in Redazione il 24 marzo 1956.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Modena.

¹⁾ I problemi di tipo uniforme sono: quello in cui si assegna lo spostamento \mathbf{u} su tutta la frontiera $\mathcal{F}\mathcal{D}$ del corpo, indicato abitualmente come « primo problema al contorno »; quello in cui si assegna la tensione su tutta la frontiera $\mathcal{F}\mathcal{D}$, o « secondo problema al contorno »; il problema misto, quello in cui si assegna lo spostamento su una parte $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ della frontiera, e la tensione sulla parte rimanente $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$.

traduzione in sistemi di equazioni integrali di Fischer-Riesz, attraverso la dimostrazione della completezza hiberniana, anche nel caso dei cosiddetti problemi misti, dei sistemi di vettori che realizzano la traduzione richiesta.

È noto che lo studio del secondo problema al contorno attraverso la teoria dei potenziali elastici, porta in generale a considerare sistemi di equazioni integrali singolari (cioè a integrale principale secondo Cauchy). La relativa teoria presenta difficoltà notevolmente superiori rispetto a quelle dei sistemi di equazioni integrali ordinarie e inoltre, a quanto mi consta, non è stata ancora trattata in ipotesi del tutto generali sui dati al contorno ²⁾ per es. per dati solo sommabili.

Si trovano, in sostanza, inconvenienti e difficoltà analoghe a quelle che si incontrano nella traduzione in equazioni integrali del problema di derivata obliqua regolare, per una sola equazione differenziale lineare di tipo ellittico, ricorrendo ai potenziali ordinari.

È noto però che, per quest'ultimo problema, C. W. Oseen e G. Giraud ³⁾, ricorrendo a « potenziali » costruiti con nuclei opportuni, anziché ai potenziali abituali, hanno dato del problema stesso una traduzione in equazioni integrali non più singolari, ma ordinarie (a nucleo sommabile). È anche noto che ciò è servito ad E. Magenes ⁴⁾ per trovare notevoli risultati circa diverse questioni relative ai problemi di derivata obliqua regolare, quali la teoria dei potenziali obliqui nel caso di densità o momento sommabile, l'applicazione del metodo del Picone a detti problemi, teoremi di esistenza per il problema misto di *Dirichlet* — *derivata obliqua* inteso in un opportuno senso generalizzato.

In questo lavoro ⁵⁾ ottengo in primo luogo, per il secondo problema al contorno relativo ad (I), risultati analoghi a quelli

²⁾ Cfr. [7], [13], [15]. I numeri fra [] si riferiscono alla bibliografia finale.

³⁾ Cfr. [7], [16], [8].

⁴⁾ Cfr. [10], [11], [12].

⁵⁾ Questo lavoro mi è stato suggerito dal Prof. E. Magenes che desidero qui ringraziare.

ottenuti da Oseen, Giraud e Magenes per i problemi di derivata obliqua regolare nel caso di una sola equazione differenziale.

La prima difficoltà che ho dovuto superare [n. 2, 3] è stata la costruzione di una matrice che, pur essendo simile a quella di Somigliana, goda di ulteriori particolari proprietà. Essa dipende sia dal dominio che dai parametri che compaiono nel problema in modo tale che, per i « potenziali » costruiti con questa matrice, analoghi a quelli di semplice e doppio strato elastico, si possono stabilire le formule limiti sulla frontiera del dominio, senza dover ricorrere ad integrali principali alla Cauchy.

Questi primi risultati mi hanno permesso [n. 4] di conseguire la voluta traduzione del secondo problema in un sistema di equazioni integrali ordinarie, ottenendo anche il teorema di esistenza nell'ipotesi della sommabilità del dato al contorno. Per rilevare l'interesse di questo ultimo risultato, si osservi che teoremi di esistenza, per questo problema, sono stati già da tempo dimostrati, sotto diverse ipotesi per il dominio e per i dati, da A. Korn, G. Fichera, Muskhelishvili⁶⁾. Nel presente lavoro, facendo sul dominio abituali ipotesi di regolarità, si è ottenuto un teorema di esistenza con ipotesi di sola sommabilità sui dati, e quindi, per questo ultimo aspetto, più generale di quelli dati dagli Autori citati.

Nei n. 5, 6, attraverso un'opportuna caratterizzazione delle classi dei potenziali di semplice e doppio strato elastico, ho potuto stabilire la validità delle classiche formule limiti ad essi relative, anche nell'ipotesi che la « densità » o il « momento » siano solo sommabili.

Ho quindi utilizzati i risultati precedenti nell'applicazione del metodo del Picone allo studio dei vari problemi di tipo misto per la (I). È noto che la traduzione richiesta da M. Picone⁷⁾ in equazioni integrali di prima specie o in sistemi di Fischer-Riesz è stata ottenuta da G. Fichera⁸⁾ mediante la dimostrazione del teorema di inversione della formula di Green.

⁶⁾ Cfr. [9], [5] e [15] parte V.

⁷⁾ Cfr. [17].

⁸⁾ Cfr. [3], [4], [5].

Egli ha anche dimostrato la completezza dei sistemi di vettori, che intervengono in tale traduzione, nel caso del primo e secondo problema al contorno.

Nel presente lavoro, attraverso una opportuna caratterizzazione della classe dei vettori in cui vale il teorema di inversione di G. Fichera (n. 8), ho potuto conseguire gli analoghi teoremi di completezza anche nel caso dei problemi misti⁹⁾. In particolare si ottiene così un teorema di completezza, relativo al problema misto, del sistema costruito mediante le soluzioni polinomiali del sistema omogeneo corrispondente a (I), nel caso di domini semplicemente connessi.

Questi teoremi di completezza oltre, come è noto, ad essere utili da un punto di vista pratico per il calcolo approssimato delle soluzioni, possono servire anche dal punto di vista teorico per la dimostrazione di teoremi di esistenza per i problemi misti per la I, generalizzati in un senso analogo a quello recentemente introdotto da E. Magenes, nel caso di una sola equazione di tipo ellittico¹⁰⁾.

Per semplicità ho esposto i risultati considerando, anziché il sistema (I), il corrispondente sistema omogeneo ma è noto come si possa passare da esso al caso completo.

Così pure mi sono limitato solo per semplicità al caso di domini semplicemente connessi.

L'estensione al caso di tre variabili non dovrebbe presentare difficoltà concettuali nuove.

1. Preliminari. - Sia \mathfrak{D} un dominio limitato del piano (x, y) con frontiera $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ costituita da un'unica curva semplice, chiusa, di classe 2¹¹⁾.

Con $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ indicheremo il complementare di \mathfrak{D} .

⁹⁾ Ulteriori teoremi di completezza relativi al problema misto per la (I) ho dato recentemente in una Nota in corso di pubblicazione sui Rendic. del Sem. Mat. dell'Univ. di Padova dal titolo: « *Teoremi di completezza relativi al sistema di equazioni dell'equilibrio elastico* ».

¹⁰⁾ Cfr. [12].

¹¹⁾ Che ammette cioè in ogni punto tangente e curvatura che variano con continuità. Le ipotesi sul dominio si possono generalizzare ma di ciò non ci occuperemo essendo ovvie le estensioni più abituali.

Consideriamo il sistema di equazioni differenziali dell'elastostatica, nel vettore incognito $\mathbf{u} \equiv (u_1, u_2)$

$$(1) \quad \Delta_2 \mathbf{u} + k \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0$$

con k costante numerica.

Indicato con \mathbf{n} il versore della normale interna alla $\mathcal{F}\mathcal{D}$ nei suoi punti, sia $L(\mathbf{u})$ il vettore, definito sulla $\mathcal{F}\mathcal{D}$, di componenti

$$(2) \quad \begin{aligned} L_1(\mathbf{u}) &= k \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1 + \frac{du_1}{dn} + \lambda \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} n_2 - \frac{\partial u_2}{\partial y} n_1 \right) \\ L_2(\mathbf{u}) &= k \operatorname{div} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2 + \frac{du_2}{dn} + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} n_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x} n_2 \right) \end{aligned}$$

con λ costante numerica.

Relativamente al sistema (1) si pone, come è noto, il problema di ricercare un vettore \mathbf{u} , soluzione in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$ di (1), assegnato che sia il vettore $L(\mathbf{u})$ sulla $\mathcal{F}\mathcal{D}$. Tale problema verrà in seguito chiamato, come d'abitudine, secondo problema al contorno dell'elastostatica.

Detti Q e P due punti del piano di coordinate (x, y) e (ξ, η) , indichiamo con $S(P, Q) \equiv \|S_i^h(P, Q)\|$ la matrice di Somigliana¹²⁾ e con $\mathcal{S}_h(P, Q)$ il vettore che ha per componenti gli elementi della riga h -esima della stessa matrice.

Consideriamo quindi il potenziale di semplice strato elastico¹³⁾

$$(3) \quad \mathbf{v}(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \mathbf{d}(Q) * S(P, Q) ds_Q$$

con $\mathbf{d}(Q)$ vettore hölderiano¹⁴⁾ su $\mathcal{F}\mathcal{D}$.

12) $\|S_i^h(P, Q)\| = \left\| \varepsilon_i^h \log \overline{PQ} - \frac{k}{4(1+k)} \frac{\partial^2 \overline{PQ}^2 \log \overline{PQ}}{\partial x_i \partial x_h} \right\|$, ove si è posto $x = x_1, y = x_2$ e ε_i^h è il simbolo di KRONECKER, cioè $\varepsilon_i^h = \begin{cases} 1 & \text{se } i=h \\ 0 & \text{se } i \neq h \end{cases}$.

13) Col simbolo $\mathbf{d} * S(P, Q)$ denoteremo il prodotto del vettore $\mathbf{d} \equiv (d_1, d_2)$ per la matrice $\|S_i^h(P, Q)\|$, cioè il vettore di componenti $\mathbf{d}(Q) \times \mathcal{S}^h(P, Q)$ ($h = 1, 2$). Il vettore (3) avrà pertanto le componenti

$$v_i(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \mathbf{d}(Q) \times \mathcal{S}^i(P, Q) ds_Q \quad (i = 1, 2).$$

14) Diremo che un vettore è continuo, hölderiano, sommabile ecc... se tali sono le sue componenti.

È noto ¹⁵⁾, nell'ipotesi dell'hölderianità del dato al contorno, che si dimostra l'equivalenza del secondo problema con un sistema di equazioni singolari a integrale principale. A tale sistema, cui si perviene cercando la soluzione del problema sotto forma di un vettore di tipo (3), è applicabile il teorema dell'alternativa e si trovano come condizioni di compatibilità

$$(4) \quad \int_{\mathfrak{D}} L[\mathbf{u}(Q)] ds_Q = 0$$

se $k > -1$ e $-1 < \lambda < \min(1, 2k + 1)$, oppure le

$$(5) \quad \int_{\mathfrak{D}} L[\mathbf{u}(Q)] ds_Q, \quad \int_{\mathfrak{D}} \{xL_2[\mathbf{u}(Q)] - yL_1[\mathbf{u}(Q)]\} ds_Q$$

se $k > 0$ e $\lambda = 1$.

Il sistema di equazioni integrali di cui sopra rientra fra quelli a nucleo sommabile di tipo di Fredholm soltanto nel caso che sia $\lambda = \frac{k}{k+2}$.

In seguito indicheremo con $\mathfrak{L}(\mathbf{u})$ il vettore (2) quando λ assume tale valore.

Noi ci proponiamo ora di dare una traduzione qualunque siano k e λ , soddisfacenti a limitazioni che preciseremo, del secondo problema al contorno in un sistema d'equazioni non più a integrali principali, ma di equazioni integrali ordinarie (a nucleo sommabile) del tipo di Fredholm, e studieremo questo sistema anche nel caso di dato al contorno soltanto sommabile o di quadrato sommabile.

Costruiremo a tal fine una matrice $F(P, Q) \equiv \|F_i^h(P, Q)\|$, dipendente dal dominio \mathfrak{D} , con comportamento analogo a quello della matrice di Somigliana, tale però che l'operatore L applicato ai vettori $F^h(P, Q)$ di tale matrice ¹⁶⁾, intesi come funzioni di P , dia luogo a vettori sommabili su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, e cercheremo

¹⁵⁾ Cfr. [4].

¹⁶⁾ $F^h(P, Q)$ ($h = 1, 2$) è il vettore che ha per componenti gli elementi della riga h -esima di $F(P, Q)$.

di esprimere la soluzione del secondo problema, anzichè con vettori di tipo (3), mediante analoghi vettori del tipo

$$(6) \quad \alpha(P) = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} d(Q) * F(P, Q) ds_Q$$

2. Matrice $F(P, Q)$ associata al dominio \mathfrak{D} . - In seguito diremo che le costanti k e λ soddisfano alla condizione (α) o alla (β) secondo che $k > -1$ e $-1 < \lambda < \min(1, 2k+1)$ oppure $k > 0$ e $\lambda = 1$.

Ciò posto, detto $P(\xi, \eta)$ un punto interno a \mathfrak{D} e $Q(x, y)$ un punto di $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, nell'ipotesi che k e λ soddisfino alla condizione (α) oppure (β)¹⁷⁾, consideriamo la seguente matrice

$$(7) \quad F(P, Q) = \| F_i^h(P, Q) \| \quad (i, h = 1, 2)$$

ove

$$\begin{aligned} F_1^1 &= \frac{k(\lambda+1) + 2(k+1)}{(\lambda+1)[3k+2-\lambda(k+2)]} \log r - \frac{k}{2[(2k+2)-\lambda(k+2)]} \frac{\partial^2 r^2 \log r}{\partial x^2} \\ F_2^1 &= -\frac{k}{2[3k+2-\lambda(k+2)]} \frac{\partial^2 r^2 \log r}{\partial x \partial y} + \frac{k - k\lambda - 2\lambda}{(\lambda+1)[3k+2-\lambda(k+2)]} f_1(P, Q) \\ F_1^2 &= -\frac{k}{2[3k+2-\lambda(k+2)]} \frac{\partial^2 r^2 \log r}{\partial x \partial y} + \frac{k - k\lambda - 2\lambda}{(\lambda+1)[3k+2-\lambda(k+2)]} f_2(P, Q) \\ F_2^2 &= \frac{k(\lambda+1) + 2(k+1)}{(\lambda+1)[3k+2-\lambda(k+2)]} \log r - \frac{k}{2[3k+2-\lambda(k+2)]} \frac{\partial^2 r^2 \log r}{\partial k} \end{aligned}$$

dove $r = \overline{PQ} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, e $f_1(P, Q)$, $f_2(P, Q)$ sono due opportune funzioni che ora definiremo. Osserviamo in proposito che, fissato Q , le funzioni $\arctg \frac{x-\xi}{y-\eta}$ ed $\arctg \frac{y-\eta}{x-\xi}$ come funzioni di ξ ed η separatamente, nei punti ove sono discontinue, presentano solo discontinuità di prima specie, eliminabili se alle funzioni stesse si aggiungono due opportune funzioni $\alpha_1(P, Q)$ e $\alpha_2(P, Q)$ di facile costruzione come vedremo.

¹⁷⁾ Si osservi che per k e λ soddisfacenti alle condizioni (α) o (β) è sempre $\lambda \neq -1$ e $\lambda \neq \frac{3k+2}{k+2}$, quindi non s'annullano mai i denominatori dei coefficienti numerici che figurano in (7).

Al variare di P in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ e di Q su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, definiamo allora le funzioni $f_i(P, Q)$ nel modo seguente:

$$f_1(P, Q) = \operatorname{arctg} \frac{x - \xi}{y - \eta} + \alpha_1(P, Q)$$

$$f_2(P, Q) = \operatorname{arctg} \frac{y - \eta}{x - \xi} + \alpha_2(P, Q)$$

ove $\alpha_i(P, Q)$ ($i = 1, 2$) sono due opportune funzioni costanti a tratti sia come funzioni di P , fissato Q su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, sia come funzioni di Q , fissato P in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$, tali da rendere continue le $f_i(P, Q)$.

Le funzioni $\alpha_i(P, Q)$ si costruiscono immediatamente. Per comodità del lettore esaminiamo la cosa su un esempio che d'altra parte è assai generale, facendo sul dominio \mathfrak{D} l'ipotesi che le sue intersezioni con le rette parallele agli assi coordinati siano costituite al più da un numero finito di segmenti, che possono anche ridursi a punti.

Sia $Q(x, y)$ un punto fissato su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$: definiamo la funzione $\alpha_1(P, Q)$ come funzioni di P .

La parallela r_Q all'asse ξ condotta per Q divide il dominio \mathfrak{D} in un numero finito di parti $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \dots \mathfrak{D}_n$. Diremo contigue le parti \mathfrak{D}_i e \mathfrak{D}_j se l'intersezione delle loro frontiere è costituita da uno o più segmenti, non riducendosi a punti, dei semiassi $\xi \geq x$ e $\xi \leq x$. Con $\alpha_1(\mathfrak{D}_i)$ indicheremo il valore costante della funzione $\alpha_1(P, Q)$ nei punti P di \mathfrak{D}_i . Allora se il numero n delle parti è 1, cioè se \mathfrak{D} sta tutto al di sopra o al di sotto di r_Q , basterà porre

$$\alpha_1(\mathfrak{D}) = 0.$$

Nel caso contrario, supponiamo che \mathfrak{D}_1 sia tutta posta nel semipiano delle $\eta \leq y$. Poniamo

$$\alpha_1(\mathfrak{D}_1) = 0$$

Siano poi $\mathfrak{D}_i, \mathfrak{D}_i \dots \mathfrak{D}_{i_h}$ le parti contigue a \mathfrak{D}_1 , necessariamente poste nel semipiano delle $\eta \geq y$. Poniamo

$$\alpha_1(\mathfrak{D}_{i_j}) = \alpha_1(\mathfrak{D}_1) \mp \pi = \mp \pi$$

secondo che $\mathfrak{F}\mathfrak{D}_{i_j} \cdot \mathfrak{F}\mathfrak{D}_1$ appartiene al semiasse delle $\xi \geq x$ o delle $\xi \leq x$.

Siano quindi $\mathfrak{D}_{r_1}, \mathfrak{D}_{r_2} \dots \mathfrak{D}_{r_s}$ le parti contigue alla generica \mathfrak{D}_i , considerata precedentemente, tutte poste necessariamente nel semipiano delle $\eta \leq y$. Poniamo

$$\alpha_1(\mathfrak{D}_{r_i}) = \alpha_1(\mathfrak{D}_i) \pm \pi$$

secondo che $\mathfrak{F}\mathfrak{D}_{r_i} \cdot \mathfrak{F}\mathfrak{D}_i$ appartiene al semiasse delle $\xi \geq x$ o delle $\xi \leq x$.

È ormai chiaro come si prosegue fino ad esaurimento delle parti $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2 \dots \mathfrak{D}_n$.

Questo ragionamento si può ripetere per tutti i Q di $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$. Fissato poi P in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$, la funzione $\alpha_1(P, Q)$ ottenuta precedentemente, pensata ora come funzione di Q , è ancora costante a tratti; basta osservare che essa cambia valore al più quando mutano segno le differenze $(x - \xi)$ o $(y - \eta)$, e ciò avverrà un numero finito di volte per le ipotesi fatte su \mathfrak{D} .

Analogamente si ragiona per $\alpha_2(P, Q)$ considerando la parallela per Q all'asse η .

Le funzioni $f_i(P, Q)$, come sono state precedentemente definite, risultano derivabili rispetto P in tutto \mathfrak{D} , con derivate di qualunque ordine continue, eccetto che per $P \equiv Q$.

Esaminiamo ora il comportamento della matrice $F(P, Q)$ rilevando come esso sia simile a quello della matrice di Somigliana.

Si verifica facilmente che:

a) - La matrice $F(P, Q)$ si riduce alla matrice $S(P, Q)$ per $\lambda = \frac{k}{k+2}$.

b) - Fissato Q su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, i vettori $F^h(P, Q)$ ($h = 1, 2$) di detta matrice sono, come funzioni di P , soluzioni di (1) in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ (anzi in tutto $\mathfrak{D} - Q$).

c) - Per $P \rightarrow Q$ si comportano come gli analoghi vettori della matrice $S(P, Q)$ e in particolare valgono per essi le limitazioni

$$(8) \quad |F^h(P, Q)| \leq A \left| \log \frac{B}{PQ} \right| \quad (h = 1, 2)$$

con A, B costanti numeriche.

Detto $\boldsymbol{w}(P, Q)$ un generico vettore, definito per $P \in \mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ e $Q \in \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ ed M un punto di $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ distinto da Q , col simbolo $L_P^M[\boldsymbol{w}(P, Q)]$ indicheremo il vettore ottenuto applicando l'operatore L al vettore $\boldsymbol{w}(P, Q)$ inteso come funzione di P , essendo il versore $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$, che in esso figura, quello della normale a $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ in M . Con $L_{i,P}^M[\boldsymbol{w}(P, Q)]$ indicheremo le componenti di questo vettore. Analoghe precisazioni valgono per il simbolo $\frac{d\boldsymbol{w}(P, Q)}{dn_P^M}$ (ove w potrebbe essere anche uno scalare). Scriveremo più semplicemente L_P e $\frac{d}{dn_P}$ invece di L_P^P e $\frac{d}{dn_P^P}$.

Ciò posto, valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} L_{1,P}^M[\boldsymbol{F}^1(P, Q)] &= \\ &= \left[\frac{2k(\lambda+1)}{(3k+2)-\lambda(k+2)} \frac{(x-\xi)^2}{r^2} + \frac{2(1-\lambda)(k+1)}{(3k+2)-\lambda(k+2)} \right] \frac{d}{dn_P^M} \log r \\ L_{2,P}^M[\boldsymbol{F}^1(P, Q)] &= \frac{2k(\lambda+1)}{(3k+2)-\lambda(k+2)} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^2} \frac{d}{dn_P^M} \log r \\ (9) \quad L_{1,P}^M[\boldsymbol{F}^2(P, Q)] &= \frac{2k(\lambda+1)}{(3k+2)-\lambda(k+2)} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^2} \frac{d}{dn_P^M} \log r \\ L_{2,P}^M[\boldsymbol{F}^2(P, Q)] &= \\ &= \left[\frac{2k(\lambda+1)}{(3k+2)-\lambda(k+2)} \frac{(y-\eta)^2}{r^2} + \frac{2(1-\lambda)(k+1)}{(3k+2)-\lambda(k+2)} \right] \frac{d}{dn_P^M} \log r. \end{aligned}$$

Le relazioni (9) hanno senso anche se il punto P si fa coincidere col punto M su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, sempre distinto da Q , riducendosi in tal caso alle

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} L_{1,P}[\boldsymbol{F}^1(P, Q)] &= \\ &= \left[\frac{2k(\lambda+1)}{(3k+2)-\lambda(k+2)} \frac{(x-\xi)^2}{r^2} + \frac{2(1-\lambda)(k+1)}{(3k+2)-\lambda(k+2)} \right] \frac{d}{dn_P} \log r \\ &\text{e analoghe.} \end{aligned} \right.$$

Da un confronto tra le (9) e (10) e le componenti dei vettori $\mathfrak{L}_P^M[\boldsymbol{S}^h(P, Q)]$ e $\mathfrak{L}_P[\boldsymbol{S}^h(P, Q)]$ che qui sotto scriviamo in

parte per comodità del lettore

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{1,P}[\mathbf{S}^1(P, Q)] &= \left| \frac{2k}{k+2} \frac{(x-\xi)^2}{r^2} + \frac{2}{2+k} \right| \frac{d}{dn_P} \log r \\
 \mathcal{L}_{2,P}[\mathbf{S}^1(P, Q)] &= \frac{2k}{2+k} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^2} \frac{d}{dn_P} \log r \\
 \mathcal{L}_{1,P}[\mathbf{S}^2(P, Q)] &= \frac{2k}{2+k} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{r^2} \frac{d}{dn_P} \log r \\
 \mathcal{L}_{2,P}[\mathbf{S}^2(P, Q)] &= \left[\frac{2k}{2+k} \frac{(y-\eta)^2}{r^2} + \frac{2}{2+k} \right] \frac{d}{dn_P} \log r
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

si rileva subito come esse differiscono soltanto nelle costanti numeriche che vi compaiono.

Si hanno anzi le identità

$$\begin{aligned}
 L_P^M[\mathbf{F}^h(P, Q)] &\equiv \mathcal{L}_P^M[\mathbf{S}^h(P, Q)] \\
 L_P[\mathbf{F}^h(P, Q)] &\equiv \mathcal{L}_P[\mathbf{S}^h(P, Q)]
 \end{aligned}
 \tag{h = 1, 2}$$

per $\lambda = \frac{k}{k+2}$.

d) - Per quanto sopra osservato, e come si deduce dalle espressioni stesse di (9) e (10), valgono le limitazioni:

$$\begin{aligned}
 |L_{i,P}^M[\mathbf{F}^h(P, Q)]| &\leq C \frac{1}{PQ} \\
 |L_{i,P}[\mathbf{F}^h(P, Q)]| &\leq C \frac{1}{PQ}
 \end{aligned}
 \tag{12}
 \tag{i, h = 1, 2}$$

con C costante numerica, per qualunque k e λ soddisfacenti alla (α) o alla (β).

Nel seguito col simbolo $L_Q[\mathbf{F}^h(P, Q)]$ non intenderemo l'operatore L applicato al vettore $\mathbf{F}^h(P, Q)$ inteso come funzione di Q , ma semplicemente il vettore avente per componenti le espressioni ottenute dalle (10) con lo scambio formale di (x, y) con (ξ, η) e dei coseni direttori della normale in P con gli analoghi della normale in Q .

Così porremo per definizione ($P, Q \in \mathcal{F}\mathcal{D}$)

$$(13) \left\{ \begin{aligned} L_{i,q}[F^h(P, Q)] &= \left[\frac{2k(\lambda + 1)}{(3k + 2) - \lambda(k + 2)} (x - \xi)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(1 - \lambda)(k + 1)}{(3k + 2) - \lambda(k + 2)} \right] \left[\frac{\xi - x}{r} n_1(Q) + \frac{\eta - y}{r} n_2(Q) \right] \\ &\text{e analoghe} \end{aligned} \right.$$

Osserviamo che i secondi membri di (9) e (13), fissato Q su $\mathcal{F}\mathcal{D}$, sono funzioni di P definite e continue anche per P esterno a \mathcal{D} e sono infinitesime quando P tende all'infinito, valendo per le $L_{i,q}[F^h(P, Q)]$ limitazioni analoghe alle (12). *Estendiamo allora il significato dei simboli a primo membro in (9) e (13) definendoli mediante i secondi membri quando P è esterno a \mathcal{D}* ¹⁸⁾.

3. Formule limiti. - Enunciamo ora alcuni teoremi di cui dovremo servirci in seguito.

Detto $d(Q)$ un vettore sommabile definito su $\mathcal{F}\mathcal{D}$, consideriamo i vettori

$$(14) \quad u(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} d(Q) * F(P, Q) ds_Q$$

definito per P interno a \mathcal{D} , e¹⁹⁾

$$(15) \quad v(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} d(Q) * L_Q[F(P, Q)] ds_Q$$

$$(16) \quad w(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} d(Q) * L_P^M[F(P, Q)] ds_Q$$

¹⁸⁾ Tale necessità di allargare via, via, il significato dei simboli $L_P[F(P, Q)]$ e $L_Q[F(P, Q)]$ non si presenta nel caso della matrice $S(P, Q)$ essendo questa definita per P e Q variabili in tutto il piano purchè distinti.

¹⁹⁾ È chiaro che con i simboli $L_Q[F(P, Q)]$, $L_P^M[F(P, Q)]$ si indicano si indicano le matrici $\|L_{i,q}[F^h(P, Q)]\|$ e $\|L_{i,p}^M[F^h(P, Q)]\|$.

definiti per P interno o esterno a \mathfrak{D} .

Sussistono i teoremi:

TEOREMA I. - Se d è un vettore sommabile [di quadrato sommabile] su \mathfrak{D} , per quasi-tutti gli M di \mathfrak{D} i vettori $d(Q) * F(M, Q)$, $d(Q) * L_Q[F(M, Q)]$, $d(Q) * L_M[F(M, Q)]$, come funzioni di Q , sono sommabili [di quadrato sommabile] su \mathfrak{D} ed esistono i limiti

$$(17) \quad \lim_{P \rightarrow M(\text{su } \pi_M^+)} \mathfrak{u}(P) = \int_{\mathfrak{D}} d(Q) * F(M, Q) ds_Q$$

$$(18) \quad \lim_{P \rightarrow M(\text{su } \pi_M^\pm)} \mathfrak{v}(P) = \pm \pi d(M) + \int_{\mathfrak{D}} d(Q) * L_Q[F(M, Q)] ds_Q$$

$$(19) \quad \lim_{P \rightarrow M(\text{su } \pi_M^\pm)} \mathfrak{w}(P) = \pm \pi d(M) + \int_{\mathfrak{D}} d(Q) * L_M[F(M, Q)] ds_Q$$

risultando i vettori a secondo membro sommabili [di quadrato sommabile] su \mathfrak{D} .

Se d è h\"olderiano su \mathfrak{D} i limiti (17) (18) (19) esistono per tutti gli M di \mathfrak{D} e i vettori a secondo membro sono h\"olderiani su \mathfrak{D} .

TEOREMA II. - Se d è un vettore sommabile [di quadrato sommabile] su \mathfrak{D} , detti P^+ e P^- due punti della normale a \mathfrak{D} in M , a distanza l da M , rispettivamente interno ed esterno a \mathfrak{D} , per quasi-tutti gli M di \mathfrak{D} valgono i limiti

$$(20) \quad \lim_{l \rightarrow 0} \{ \mathfrak{v}(P^+) - \mathfrak{v}(P^-) \} = 2\pi d(M)$$

$$(21) \quad \lim_{l \rightarrow 0} \{ \mathfrak{w}(P^+) - \mathfrak{w}(P^-) \} = -2\pi d(M)$$

$$(22) \quad \lim_{l \rightarrow 0} \{ \mathfrak{L}[\mathfrak{v}(P^+)] - \mathfrak{L}[\mathfrak{v}(P^-)] \} = 0$$

$$(23) \quad \lim_{l \rightarrow 0} \{ \mathfrak{L}[\mathfrak{w}(P^+)] - \mathfrak{L}[\mathfrak{w}(P^-)] \} = 0.$$

Per vettori d h\"olderiani i limiti sopra scritti esistono per tutti gli M di \mathfrak{D} .

In virt\`u di (8) e (12) i limiti (17) (18) (19) (20) (21) si

dimostrano con ragionamenti del tutto simili a quelli che si seguono per stabilire gli analoghi limiti per i vettori

$$\int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \mathbf{d}(Q) * \mathcal{S}(P, Q) ds_Q, \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \mathbf{d}(Q) * \mathcal{L}_Q[\mathcal{S}(P, Q)] ds_Q, \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \mathbf{d}(Q) * \mathcal{L}_P^M[\mathcal{S}(P, Q)] ds_Q.$$

Si vedano in proposito i lavori [4] e [5]. Gli analoghi dei limiti (22) e (23) per i vettori

$$\int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \mathbf{d}(Q) * \mathcal{L}_Q[\mathcal{S}(P, Q)] ds_Q \quad \text{e} \quad \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \mathbf{d}(Q) * L_P^M[\mathcal{S}(P, Q)] ds_Q$$

si ottengono con calcoli che sono sostanzialmente analoghi a quelli delle pagine 24-26 del lavoro [3] di G. Fichera. Calcoli analoghi provano i limiti (22) e (23).

4. Traduzione del secondo problema al contorno in equazioni integrali ordinarie di tipo di Fredholm con dati solo sommabili.

Sia assegnato su $\mathcal{F}\mathfrak{D}$ il vettore \mathbf{t} sommabile e si cerchi la soluzione del secondo problema al contorno sotto forma di un vettore di tipo (14). Supposta, in un primo momento, l'holderianità del dato \mathbf{t} e del vettore \mathbf{d} , in virtù di (19) si è portati a studiare il sistema di equazioni integrali

$$(24) \quad \mathbf{t}(M) = -\pi \mathbf{d}(M) + \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \boldsymbol{\alpha}(Q) * L_M[\mathbf{F}(M, Q)] ds_Q.$$

Tale sistema è, per le (12), a nuclei sommabili, del tipo di Fredholm, e ad esso si applica il teorema dell'alternativa. Le condizioni di compatibilità per (24) discenderanno dalla conoscenza delle autosoluzioni del sistema omogeneo aggiunto. Tale sistema si scrive

$$(25) \quad \pi \mathbf{e}(M) - \int_{\mathcal{F}\mathfrak{D}} \mathbf{e}(Q) * L_Q[\mathbf{F}(M, Q)] ds_Q = 0.$$

Dimostriamo che se per k e λ vale la condizione (α) le uniche autosoluzioni linearmente indipendenti di (25) sono i

vettori $(1, 0)$ e $(0, 1)$, mentre se vale la (β) a tali vettori va aggiunto il vettore $(y, -x)$, sicchè le condizioni di compatibilità per il sistema (24) restano ancora le (4) e (5).

A tal fine, detta e un'autosoluzione h\"olderiana di (25), consideriamo per P esterno a \mathfrak{D} il vettore

$$(26) \quad \mathfrak{s}(P) = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} e(Q) * L_Q[F(P, Q)] ds_Q.$$

Esso risulta

- a) di classe 1 in $\mathfrak{C}\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$.
- b) è soluzione del sistema (1).
- c) in virtù di (18) e (25) si annulla su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$.
- d) è infinitesimo all'infinito.

Il vettore $\mathfrak{s}(P)$ è pertanto identicamente nullo in $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$. Se con $P'(\xi, \eta)$ indichiamo allora un punto interno a \mathfrak{D} si ha, per ogni M di $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, per quanto ora stabilito e in virtù di (20) e (22)

$$(27) \quad \lim_{P' \rightarrow M(\text{su } \mathfrak{n}_M)} \mathfrak{s}(P') = 2\pi e(M)$$

$$(28) \quad \lim_{P' \rightarrow M(\text{su } \mathfrak{n}_M)} \mathfrak{L}[\mathfrak{s}(P')] = 0.$$

Dalla (28), per noti risultati ²⁰⁾, si deduce che $\mathfrak{s}(P')$ è costante in \mathfrak{D} se k e λ soddisfano la condizione (α) , oppure si riduce al vettore $[a\eta + b, -a\xi + c]$, con a, b, c , costanti arbitrarie, se è soddisfatta la (β) .

Per (27) si ha allora il risultato cercato.

Ma lo studio del sistema (24) si può fare anche supponendo \mathfrak{f} soltanto sommabile (di quadrato sommabile). Per le (8) e (12) hanno infatti ancora senso gli integrali che si devono considerare in tale studio e si possono effettuare le inversioni dell'ordine di integrazione richieste ²¹⁾. Non solo, ma, con ragionamenti analoghi a quelli svolti nel teorema VII di [2], si dimostra che ogni autosoluzione di (25) è un vettore

²⁰⁾ Cfr. [4] teoremi II e IV.

²¹⁾ Cfr osservazione (2^a) di [5].

hölderiano. Tenendo presenti i teoremi I e II si possono ripetere, anche nelle ipotesi più generali in cui siamo posti, i ragionamenti di questo paragrafo e le condizioni di compatibilità per la risolubilità del sistema (24) restano le (4) e (5).

È interessante osservare che si dà qui il teorema di esistenza per il secondo problema al contorno con dato solo sommabile.

5. Equivalenza tra la classe dei vettori $\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} d(Q) * S(P, Q) ds_Q$ e quella dei vettori $\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} e(Q) * F(P, Q) ds_Q$.

Dimostriamo ora come ogni potenziale di tipo

$$(29) \quad u(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} d(Q) * S(P, Q) ds_Q$$

con densità d sommabile, si possa rappresentare mediante un potenziale generalizzato del tipo

$$(30) \quad v(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} e(Q) * F(P, Q) ds_Q$$

con e sommabile su $\mathcal{F}\mathcal{D}$.

La cosa è vera se $d(Q)$ è hölderiano, risultando in tal caso hölderiano anche $e(Q)$, perchè il vettore v sarà soluzione del secondo problema al contorno col dato f costituito dal vettore hölderiano ²²⁾

$$(31) \quad -\pi d(M) + \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}}^* d(Q) * L_M[S(M, Q)] ds_Q.$$

L'integrale che compare in (31) è un integrale principale di Cauchy qualora si assumano come domini di esclusione le porzioni di frontiera $\mathcal{F}\mathcal{D}$ che si proiettano sulla tangente in M in segmenti di centro M .

²²⁾ Cfr. [4] teorema X.

Il vettore (31) verifica ovviamente le condizioni di compatibilità (4) e (5) per cui la tesi è conseguenza di quanto dimostrato nel n. 4). Sempre nella varietà dei vettori hölderiani su \mathfrak{D}   vero il viceversa: ogni vettore di tipo (30)   rappresentabile con un vettore di tipo (29). Ci  si prova col ragionamento precedente in virt  di noti risultati sulla teoria delle equazioni integrali singolari ²³⁾.

Osserviamo ora che le (29) e (30) si possono considerare come due trasformazioni lineari e continue dello spazio Σ dei vettori sommabili su \mathfrak{D} in quello dei vettori soluzioni di (1) in $\mathfrak{D} - \mathfrak{D}$ e sommabili in \mathfrak{D} , spazi che si normalizzano ponendo $\|d\| = \int_{\mathfrak{D}} |d| ds$ e $\|u\| = \int_{\mathfrak{D}} |u| d\mathfrak{D}$ rispettivamente. Tali trasformazioni hanno lo stesso codominio se si considerano nella variet  V di Σ costituito dai vettori hölderiani, in virt  di quanto si   provato precedentemente. La caratterizzazione voluta discende allora, per quanto s'  sopra detto, dall'osservazione che V   ovunque densa in Σ ²⁴⁾.

6. Applicazione ai potenziali ordinari. - L'introduzione della matrice (7) trova applicazione nella teoria dei potenziali elastici.

Detto $u(P)$ il vettore (29) si consideri il vettore $L^M[u(P)]$, ove con M si   indicato un punto di \mathfrak{D} , per k e λ qualunque purch  soddisfacenti alle condizioni (α) o (β).

²³⁾ Cfr. [13], [6], [7].

²⁴⁾ Cfr. in proposito in [10] l'osservazione che segue il teorema VI. La continuit  delle trasformazioni (29) e (30), con le norme introdotte, si dimostra immediatamente. Per la (29) per es. si ha

$$\begin{aligned} \|u\| &= \int_{\mathfrak{D}} |u| d\mathfrak{D} \leq \int_{\mathfrak{D}} \left[\left| \int_{\mathfrak{D}} d(Q) \times S^1(P, Q) ds_Q \right| + \left| \int_{\mathfrak{D}} d(Q) \times S^2(P, Q) ds_Q \right| \right] d\mathfrak{D} \leq \\ &\leq 2A \int_{\mathfrak{D}} \left\{ |d(Q)| \int_{\mathfrak{D}} \left| \log \frac{B}{PQ} \right| d\mathfrak{D} \right\} ds_Q \leq C \|d\| \end{aligned}$$

con A, B, C costanti numeriche positive indipendenti da d .

Se il vettore \mathbf{d} , che compare in (29), è hölderiano, è nota ²⁵⁾ la validità della formula

$$(32) \quad \lim_{P \rightarrow M(\text{su } n_M^\pm)} L^M[\mathbf{u}(P)] = \mp \mathbf{a}(M) + \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}}^* \mathbf{d}(Q) * L_M[S(M, Q)] ds_Q$$

ove l'integrale a secondo membro è un integrale principale di Cauchy se $\lambda \mp \frac{k}{k+2}$.

Dimostriamo che la (32) continua a valere anche nel caso di \mathbf{d} sommabile per quasi-tutti i punti di $\mathcal{F}\mathcal{D}$ e precisamente per i cosiddetti punti di Lebesgue per \mathbf{d} ²⁶⁾.

L'equivalenza, dimostrata nel numero precedente, tra le classi di vettori (29) e (30), in virtù del teorema I, assicura l'esistenza per quasi-tutti i punti M di $\mathcal{F}\mathcal{D}$, del limite

$$(33) \quad \lim_{P \rightarrow M \text{ su } n_M^\pm} \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \mathbf{d}(Q) * L_P^M[S(P, Q)] ds_Q$$

che figura a primo membro di (32). Resta da provare ancora l'esistenza dell'integrale principale a secondo membro di (32), perchè allora la validità di tale formula si dimostra con ragionamento classico osservando che essa vale nel caso di densità costante.

Noi dimostreremo ora che nella (32) l'esistenza dell'integrale principale a secondo membro e del limite a primo membro sono due fatti equivalenti. Con ciò la tesi resterà completamente provata.

Sia M un punto di Lebesgue per $\mathcal{F}\mathcal{D}$. Assunti come assi x ed y rispettivamente la tangente e la normale interna a $\mathcal{F}\mathcal{D}$ in M , nell'intorno di tale punto la $\mathcal{F}\mathcal{D}$ ammette una rappresentazione del tipo $y = f(x)$, con $f(x)$ definita e di classe 2 nell'intorno di $x = 0$.

²⁵⁾ Cfr. [4] teorema X.

²⁶⁾ Sono i punti M nei quali l'integrale $\int_B |\mathbf{d}(Q) - \mathbf{d}(M)| ds_Q$, con B borelliano di $\mathcal{F}\mathcal{D}$, ha per derivata lo zero.

Se con σ_r indichiamo il segmento dell'asse x di centro M e lunghezza $2r$, con $\mathcal{F}\mathcal{D}$, l'arco di $\mathcal{F}\mathcal{D}$ che si proietta su tale segmento, e supponiamo per semplicità²⁷⁾ $\mathbf{d}(M) = (0, 0)$, si ha, per l'ipotesi fatta

$$(34) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_r} |\mathbf{d}(Q)| ds_Q}{r} = 0.$$

Supposto $y < R$, R numero positivo fissato, poichè per definizione

$$(35) \quad \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}}^* \mathbf{d}(Q) * L_M[S(M, Q)] ds_Q = \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}_y} \mathbf{d}(Q) * L_M[S(M, Q)] ds_Q =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \int_{\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}_R} \mathbf{d}(Q) * L_M[S(M, Q)] ds_Q + \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_R - \mathcal{F}\mathcal{D}_y} \mathbf{d}(Q) * L_M[S(P, Q)] ds_Q \right\}$$

è utile operare la seguente decomposizione

$$L^M[\mathbf{u}(P)] = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}_R} \mathbf{d}(Q) * L_P^M[S(P, Q)] ds_Q + \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_R - \mathcal{F}\mathcal{D}_y} \mathbf{d}(Q) * L_M[S(M, Q)] ds_Q +$$

$$+ \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_y} \mathbf{d}(Q) * L_P^M[S(P, Q)] ds_Q + \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_R - \mathcal{F}\mathcal{D}_y} \mathbf{d}(Q) * \{ L_P^M[S(P, Q)] - L_M[S(M, Q)] \} ds_Q$$

da cui si deduce che per dimostrare la tesi basta far vedere che :

$$(36) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_y} \mathbf{d}(Q) * L_P^M[S(P, Q)] ds = (0, 0)$$

$$(37) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_R - \mathcal{F}\mathcal{D}_y} \mathbf{d}(Q) * \{ L_P^M[S(P, Q)] - L_M[S(M, Q)] \} ds_Q = (0, 0).$$

Dimostriamo la (36) considerando separatamente le com-

²⁷⁾ Ciò non lede la generalità perchè se fosse $\mathbf{d}(M) \neq (0, 0)$, poichè la (32) vale per \mathbf{d} costante, basterebbe scomporre il vettore (29) in

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} [\mathbf{d}(Q) - \mathbf{d}(M)] * S(P, Q) ds_Q + \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \mathbf{d}(M) * S(P, Q) ds_Q.$$

ponenti del vettore scritto a primo membro. Fissiamoci sulla prima componente.

Nel riferimento cartesiano adottato sia $P \equiv (0, y)$, $Q \equiv (x, f(x))$, $M \equiv (0, 0)$, $r = \sqrt{x^2 + [y - f(x)]^2}$ e quindi

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}_y} d(Q) \times L_P^M[S'(P, Q)] ds_Q = \\ &= \int_{-y}^y d_1(x) \left\{ \frac{k(1+\lambda)}{k+1} \frac{x^2}{r^2} + \frac{2+k(1-\lambda)}{2(k+1)} \left\{ \frac{y-f(x)}{r^2} \sqrt{1+f'^2(x)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{-y}^y d_2(Q) \left\{ \frac{k(1+\lambda)}{k+1} \frac{x(y-f(x))}{r^2} \frac{(y-f(x))}{r^2} + \frac{k-\lambda(k+2)}{k+1} \frac{x}{r^2} \right\} \sqrt{1+f'^2(x)} dx. \right. \end{aligned}$$

Per l'ipotesi fatte su $\mathcal{F}\mathcal{D}$, assunto $R < 1$, si possono determinare²⁸⁾ tre costanti positive H, p, q tali che per $x \in \sigma_R$, e qualunque sia y ,

$$(38) \quad |f(x)| < Hx^2 < H|x|$$

$$(39) \quad |f'(x)| < H|x|$$

$$(40) \quad p(x^2 + y^2) < x^2 + (y - f(x))^2 < q(x^2 + y^2).$$

Ciò posto, possiamo limitarci a studiare gli integrali

$$(41) \quad \int_0^y |d_i(x)| \frac{|y-f(x)|}{r^2} \sqrt{1+f'^2(x)} dx \quad (i = 1, 2)$$

$$(42) \quad \int_{-y}^0 |d_i(x)| \frac{|y-f(x)|}{r^2} \sqrt{1+f'^2(x)} dx$$

$$(43) \quad \int_0^y |d_2(x)| \frac{x}{r^2} \sqrt{1+f'^2(x)} dx$$

$$(44) \quad \int_{-y}^0 |d_2(x)| \frac{x}{r^2} \sqrt{1+f'^2(x)} dx.$$

²⁸⁾ Cfr. [2], [11].

Introdotte le funzioni

$$\chi_i(x) = |d_i(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)}$$

$$\psi_i(x) = \int_0^x \chi_i(\xi) d\xi$$

da (41) si ha per (38), (40) e (34)

$$\int_0^y \chi_i(x) \frac{|y - f(x)|}{x^2 + (y - f(x))^2} dx \leq \frac{1}{p} \int_0^y \psi_i'(x) \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{H}{p} \int_0^y \psi_i'(x) \frac{x}{x^2 + y^2} dx$$

ma ²⁹⁾

$$\begin{aligned} \int_0^y \psi_i'(x) \frac{y}{x^2 + y^2} dx &= \frac{1}{2} \left[\frac{\psi_i(y)}{y} \right] + 2 \int_0^y \frac{\psi_i(x)xy}{(x^2 + y^2)^2} dx \leq \\ &\leq o(1) + 2y \int_0^y \frac{\psi_i(x)}{x^3} dx = o(1) + 2y \int_0^y o(x^{-2}) dx = o(1) \end{aligned}$$

e similmente

$$\begin{aligned} \int_0^y \psi_i(x) \frac{x}{x^2 + y^2} dx &= \left[\frac{\psi_i(x)x}{x^2 + y^2} \right]_0^y - \int_0^y \psi_i(x) \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \leq \\ &\leq o(1) + \frac{1}{y^2} \int_0^y \psi_i(x) dx = o(1). \end{aligned}$$

In modo analogo si dimostra che tendono a zero, per $y \rightarrow 0$, gli integrali (42).

Per l'integrale (43) si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^y |d_2(x)| \frac{x}{r^2} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx &= \int_0^y \chi_2(x) \frac{x}{x^2 + (y - f(x))^2} dx \leq \\ &\leq \frac{1}{p} \int_0^y \psi_2'(x) \frac{x}{x^2 + y^2} dx = o(1). \end{aligned}$$

²⁹⁾ $o()$ è il simbolo di LANDAU. Precisamente $y = o(x)$ significa che $\frac{x}{y}$ è infinitesimo con x .

In modo analogo si ragiona per l'integrale (44) e per la seconda componente di (36).

Dimostriamo la (37). Per la prima componente dell'integrale a primo membro si ha

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}_R - \mathfrak{F}\mathfrak{D}_y} d(Q) \times \{ L_P^M[S^1(P, Q)] - L_M[S^1(M, Q)] \} ds_Q = \\ & = \int_{-R}^{-y} \sum_1^2 d_i(x) \{ L_{i,P}^M[S^1(P, Q)] - L_{i,M}[S^1(M, Q)] \} dx + \\ & + \int_y^R \sum_1^2 d_i(x) \{ L_{i,P}^M[S^1(P, Q)] - L_{i,M}[S^1(M, Q)] \} ds = \\ & = \int_y^R [d_1(x) \left\{ \left[\frac{k(1+\lambda)}{k+1} \frac{x^2}{x^2 + (y-f(x))^2} + \frac{2+k(1-\lambda)}{2(k+1)} \right] \frac{y-f(x)}{x^2 + (y-f(x))^2} + \right. \\ & \quad \left. + \left[\frac{k(1+\lambda)}{k+1} \frac{x^2}{x^2 + f^2(x)} + \frac{2+k(1-\lambda)}{2(k+1)} \right] \frac{f(x)}{x^2 + f^2(x)} + \right. \\ & \quad \left. + d_2(x) \left\{ \left[\frac{k(1+\lambda)}{k+1} \frac{-x(y-f(x))}{x^2 + (y-f(x))^2} \right] \frac{y-f(x)}{x^2 + (y-f(x))^2} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left[\frac{k(1+\lambda)}{k+1} \frac{xf(x)}{x^2 + f^2(x)} \right] \frac{f(x)}{x^2 + f^2(x)} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{k-\lambda(k+2)}{k+1} \left[\frac{x}{x^2 + f^2(x)} - \frac{x}{x^2 + f^2(x)} \right] \right\} \right\} \cdot \sqrt{1+f^2(x)} dx + \end{aligned}$$

+ analogo integrale esteso da $-R$ a $-y$.

Tenuto conto che per (38) si ha, per $y \leq x$,

$$|x^2 + f^2(x) - [x^2 + (y-f(x))^2]| \leq Kxy$$

con K cost. opportuna, è immediato constatare che basta limitarsi a studiare gli integrali

$$(45) \quad \int_y^R |d_i(x)| \frac{y}{x^2 + (y-f(x))^2} \sqrt{1+f^2(x)} dx \quad (i=1, 2)$$

$$(46) \int_y^R |d_1(x)| \left| \frac{f(x) - y}{x^2 + (y - f(x))^2} - \frac{f(x)}{x^2 + f^2(x)} \right| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

$$(47) \int_y^R |d_2(x)| \left| \frac{x}{x^2 + (y - f(x))^2} - \frac{x}{x^2 + f^2(x)} \right| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

e gli analoghi estesi da $-R$ a $-y$.

Per (45) si ha:

$$\begin{aligned} & \int_y^R |d_1(x)| \frac{y}{x^2 + (y - f(x))^2} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \leq \\ & \leq \frac{y}{p} \int_y^R \psi'_i(x) \frac{1}{x^2 + y^2} dx \leq \frac{y}{p} \int_y^R \frac{\psi'_i(x)}{x^2} dx = \\ & = \frac{y}{p} \left[\frac{\psi_i(x)}{x^2 + y^2} \right]_y^R + \frac{2y}{p} \int_y^R \frac{\psi_i(x) \cdot x}{[x^2 + y^2]^2} dx \leq o(1) + \frac{2y}{p} \int_y^R o(x^{-2}) dx = c(1). \end{aligned}$$

Per (46) si ha:

$$\begin{aligned} & \int_y^R |d_1(x)| \left| \frac{f(x) - y}{x^2 + (y - f(x))^2} - \frac{f(x)}{x^2 + f^2(x)} \right| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx \leq \\ & \leq \int_y^R \psi'_i(x) |f(x)| \left| \frac{1}{x^2 + (y - f(x))^2} - \frac{1}{x^2 + f^2(x)} \right| dx + \\ & + \int_y^R \psi'_i(x) \frac{y}{x^2 + (y - f(x))^2} dx \leq HK \int_y^R \psi'_i(x) \frac{x^2 y}{[x^2 + (y - f(x))^2][x^2 + f^2(x)]} dx + \\ & + o(1) \leq o(1) + \frac{HK}{p} \int_y^R \frac{\psi'_i(x) y}{x^2 + y^2} dx = o(1). \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si procede per l'integrale (47), per gli analoghi integrali estesi da $-R$ a $-y$, e nel caso della seconda componente.

Consideriamo ora il vettore $\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \mathbf{d}(Q) * L_Q[S(P, Q)] ds_Q$, analogo del potenziale di doppio strato, e dimostriamo, nell'ipotesi della sola sommabilità di $\mathbf{d}(Q)$, la validità del limite

$$(48) \quad \begin{aligned} \lim_{P \rightarrow M(\text{su } n_M^\pm)} \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \mathbf{d}(Q) * L_Q[S(P, Q)] ds_Q &= \\ &= \pm \pi \mathbf{d}(M) + \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}}^* \mathbf{d}(Q) * L_Q[S(M, Q)] ds_Q \end{aligned}$$

in tutti i punti di $\mathcal{F}\mathcal{D}$ che sono di Lebesgue per \mathbf{d} , e qualunque siano k e λ purchè soddisfacenti alla (α) o alla (β). L'equivalenza tra esistenza dell'integrale principale, ed esistenza del limite a primo membro si dimostra con un ragionamento del tutto analogo a quello seguito per stabilire la (32). L'esistenza del limite a primo membro è conseguenza di questo fatto: ogni potenziale elastico del tipo $\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \mathbf{e}(Q) * L_Q[S(P, Q)] ds_Q$ è rappresentabile con un potenziale del tipo

$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \mathbf{e}(Q) * \mathcal{L}_Q[S(P, Q)] ds_Q$ e viceversa, al variare di \mathbf{d} e \mathbf{e} nella

classe dei vettori sommabili su $\mathcal{F}\mathcal{D}$. Il ragionamento è del tutto simile a quello seguito nel n. 5, si dovrà ora studiare la risolubilità del primo problema al contorno³⁰⁾ anzichè del secondo.

L'esistenza del limite di $\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} \mathbf{e}(Q) * \mathcal{L}_Q[S(P, Q)] ds_Q$ per quasi-tutti gli M di $\mathcal{F}\mathcal{D}$ è cosa ben nota³¹⁾. Di qui la tesi.

7. Teorema di inversione e teoremi di unicità per il primo e secondo problema al contorno.

Con $\{\mathbf{u}\}$ indichiamo la classe dei vettori \mathbf{u} che godono di queste proprietà:

³⁰⁾ Quello cioè, analogo al problema di DIRICHLET, in cui si assegna lo spostamento su tutta $\mathcal{F}\mathcal{D}$.

³¹⁾ Cfr. [4] teorema IX.

1) sono di classe 2 in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ e soluzioni ivi del sistema (1).

2) Per quasi-tutti gli M di $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ esistono i limiti

$$(49) \quad \lim_{P \rightarrow M(\text{su } \mathfrak{n}_M^+)} \mathfrak{u}(P) = \mathfrak{m}(M)$$

$$(50) \quad \lim_{P \rightarrow M(\text{su } \mathfrak{n}_M^+)} L^M[\mathfrak{u}(P)] = \mathfrak{t}(M)$$

risultando \mathfrak{m} e \mathfrak{t} sommabili su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$.

3) Valgono le relazioni

$$(51) \quad 2\pi\mathfrak{u}(P) = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} [\mathfrak{m}(Q) * L_Q[S(P, Q)] - \mathfrak{t}(Q) * S(P, Q)] ds_Q$$

per P interno a \mathfrak{D}

$$(52) \quad (0, 0) = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} [\mathfrak{m}(Q) * L_Q[S(P, Q)] - \mathfrak{t}(Q) * S(P, Q)] ds_Q$$

per P esterno a \mathfrak{D}

Nella classe $\{\mathfrak{u}\}$ di vettori G. Fichera ha dimostrato ³²⁾ il teorema di inversione che qui richiamiamo per comodità del lettore:

TEOREMA III. - Se \mathfrak{m} e \mathfrak{t} sono due vettori sommabili su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ verificanti la (52) per ogni P esterno a \mathfrak{D} , il vettore definito per P interno a \mathfrak{D} da (51) è soluzione di (1) in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$ e soddisfa le (49) e (50) per quasi-tutti gli M di $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$.

Sempre nella classe $\{\mathfrak{u}\}$ valgono i teoremi di unicità per il primo e il secondo problema al contorno, precisamente:

TEOREMA IV. - Se \mathfrak{u} è un vettore di $\{\mathfrak{u}\}$ e $\mathfrak{m} = (0, 0)$ quasi-ovunque su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, allora \mathfrak{u} è identicamente nullo.

La dimostrazione di tale teorema è dovuta a G. FICHERA ([4]).

TEOREMA V. - Se \mathfrak{u} appartiene a $\{\mathfrak{u}\}$ e \mathfrak{t} è nullo quasi-ovunque su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ allora \mathfrak{u} coincide quasi-ovunque in \mathfrak{D} col vettore

³²⁾ Cfr. [3] e [4].

costante, oppure col vettore $(a\eta + b, -a\xi + c)$, secondo che k e λ soddisfano la condizione (α) o la (β) .

Anche la dimostrazione di questo teorema è da attribuirsi a G. Fichera. Essa è sostanzialmente contenuta nel n. 6 della memoria [4]. Indicata con $N(P, Q)$ la matrice di Green relativa al dominio \mathfrak{D} e al secondo problema al contorno³³⁾, G. Fichera ha dimostrato³⁴⁾ che ogni vettore \mathbf{u} di $\{\mathbf{u}\}$ è rappresentabile nella forma

$$(53) \quad \mathbf{u}(P) = \mathbf{u}_0(P) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{D}} \mathbf{t}(Q) * N(P, Q) ds_Q$$

essendo $\mathbf{u}_0(P)$ un vettore costante, oppure il vettore $(a\eta + b, -a\xi + c)$, secondo che valgono le condizioni (α) oppure (β) . Se in (53) si pone $\mathbf{t} = (0, 0)$ si ha la tesi.

Sussiste ancora il seguente teorema che servirà nel seguito:

TEOREMA VI. - *Se \mathbf{u} appartiene a $\{\mathbf{u}\}$ allora*

$$\int_{\mathfrak{D}} \mathbf{t}(Q) ds_Q = 0$$

se vale la condizione (α) , oppure

$$\int_{\mathfrak{D}} \mathbf{t}(Q) ds_Q = 0, \quad \int_{\mathfrak{D}} [xt_2(Q) - yt_1(Q)] ds_Q = 0$$

se vale la (β) .

Dim. — Detto \mathfrak{C} un cerchio cui \mathfrak{D} sia interno, integrando su $\mathfrak{F}\mathfrak{C}$ il vettore a secondo membro di (52), si ha:

$$(54) \quad \int_{\mathfrak{D}} \mathbf{m}(Q) \times \left[\int_{\mathfrak{D}} L_Q[S'(P, Q)] ds_P \right] ds_Q - \int_{\mathfrak{D}} \mathbf{t}(Q) \times \left[\int_{\mathfrak{C}} S'(P, Q) ds_P \right] ds_Q = 0 \quad (i = 1, 2)$$

³³⁾ L'esistenza di tale matrice è esplicitamente rilevata in [4] teor. XXII ed è conseguenza dei risultati di GIRAUD e di MIHLIN richiamati.

³⁴⁾ Cfr. [4] teor. XXIV.

ed osservando che i vettori, funzioni di Q ,

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{C}} S^i(P, Q) ds_P \quad (i = 1, 2)$$

sono, nell'interno di \mathcal{C} , costanti se vale la (α), o del tipo $(ay + b, -ax + c)$, con a, b, c costanti arbitrarie, se vale la (β)⁸⁵; da (54) si ha il teorema.

8. Caratterizzazione della classe $\{u\}$. - I teoremi precedenti permettono di dare un'importante caratterizzazione della classe $\{u\}$ nella quale ci sarà utile ancora la matrice $F(P, Q)$ introdotta in 2). *Tale matrice sarà qualcosa di più di uno strumento di comodo per evitare la teoria dei sistemi di equazioni integrali singolari, perchè, a quanto mi consta, tale teoria non è ancora svolta nella classe delle funzioni sommabili (funzioni incognite e termini noti sommabili).*

Dimostriamo il seguente teorema:

TEOREMA VII. - *Condizione necessaria e sufficiente perchè il vettore u appartenga alla classe $\{u\}$ è che esista un vettore d sommabile su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ tale che in $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$*

$$(55) \quad u(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} d(Q) * F(P, Q) ds_Q.$$

Per quanto riguarda la condizione sufficiente si può procedere come nel teorema V della memoria [10], approssimato il vettore sommabile d che compare in (55) con una successione d_n di vettori hölderiani che convenga in media del primo ordine a d su $\mathcal{F}\mathcal{D}$.

Dimostriamo che la condizione è necessaria. Sia u un vettore di $\{u\}$ e t il vettore associato ad u dalla (50). Consideriamo il sistema di equazioni integrali ordinarie del tipo di

⁸⁵) La cosa si può, ad esempio, dimostrare facendo vedere che $\mathcal{L}_Q \left[\int_{\mathcal{F}\mathcal{C}} S^i(P, Q) ds_P \right]$ è nullo su $\mathcal{F}\mathcal{C}$.

Fredholm

$$(56) \quad -\pi \mathbf{d}(M) + \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} \mathbf{d}(Q) * L_M[F(M, Q)] ds_Q = \mathbf{t}(M)$$

nel vettore incognito \mathbf{d} . Per il teorema VI, il vettore \mathbf{t} soddisfa le condizioni di compatibilità relative al sistema (56) che sono le (4) e (5), per quanto dimostrato nel n. 4.

Nello spazio dei vettori sommabili su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ il sistema (56) è pertanto risolubile e la generica soluzione è del tipo

$$(57) \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + a_1 \mathbf{d}' + a_2 \mathbf{d}''$$

se vale la condizione (α), oppure del tipo

$$(58) \quad \mathbf{d} = \mathbf{d}_1 + c_1 \mathbf{w}' + c_2 \mathbf{w}'' + c_3 \mathbf{w}'''$$

se vale la (β), essendo \mathbf{d}_1 una particolare soluzione di (56), \mathbf{d}' , \mathbf{d}'' e \mathbf{w}' , \mathbf{w}'' , \mathbf{w}''' autosoluzioni linearmente indipendenti del corrispondente sistema omogeneo, $a_1 a_2$ e $c_1 c_2 c_3$ costanti numeriche.

Il sistema omogeneo associato a (56) ha infatti due oppure tre autosoluzioni linearmente indipendenti, secondo che vale la (α) o la (β).

Nel caso che valga la (α) consideriamo i vettori

$$\int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} \mathbf{d}'(Q) * F(P, Q) ds_Q, \quad \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} \mathbf{d}''(Q) * F(P, Q) ds_Q.$$

Essi sono costanti in \mathfrak{D} ma a modulo non nullo. In caso contrario, per ogni fissato M di $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, esclusi i punti di un insieme di misura nulla, i vettori

$$\int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} \mathbf{d}'(Q) * L_P^M[F(P, Q)] ds_Q, \quad \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} \mathbf{d}''(Q) * L_P^M[F(P, Q)] ds_Q$$

sarebbero nulli in $\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, annullandosi essi su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ ed essendo infinitesimi all'infinito.

Per la (21) del teorema II si avrebbe $\mathbf{d}' \equiv \mathbf{d}'' \equiv (0, 0)$ quasi-ovunque su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$. Il che è assurdo. Allora si possono deter-

minare le costanti a_1 e a_2 in (57) in modo che il vettore

$$\int_{\mathfrak{D}} [d_1(Q) + a_1 d'(Q) + a_2 d''(Q)] * F(P, Q) ds$$

coincida proprio col vettore u . In virtù del teorema di unicità V , fissato P_0 in $\mathfrak{D} - \mathfrak{F}\mathfrak{D}$, basterà imporre la condizione

$$u(P_0) = \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} [d_1(Q) + a_1 d'(Q) + a_2 d''(Q)] * F(P_0, Q) ds_Q.$$

Precisamente a_1 e a_2 saranno soluzioni del sistema di equazioni algebriche lineari ³⁶⁾.

$$\begin{aligned} a_1 \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} d'(Q) \times F^h(P_0, Q) ds_Q + a_2 \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} d''(Q) \times F^h(P_0, Q) ds_Q = \\ = u_h(P_0) - \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} d_1(Q) \times F^h(P_0, Q) ds_Q \end{aligned} \quad (h = 1, 2)$$

Nel caso che valga la (β) si ragiona in modo analogo. I vettori

$$\int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} w'(Q) * F(P, Q) ds_Q, \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} w''(Q) * F(P, Q) ds_Q, \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} w'''(Q) * F(P, Q) ds_Q$$

o sono vettori costanti in \mathfrak{D} o sono vettori del tipo $[a'\eta + b', -a'\xi + c']$, $[a''\eta + b'', -a''\xi + c'']$, $[a'''\eta + b''', -a'''\xi + c''']$. Nel primo caso non sono mai nulli ³⁷⁾, nel secondo caso si annullano rispettivamente al più nei punti P', P'', P''' di coordinate $\left(-\frac{b'}{a'}, \frac{c'}{a'}\right)$, $\left(-\frac{b''}{a''}, \frac{c''}{a''}\right)$, $\left(-\frac{b'''}{a'''}, \frac{c'''}{a'''}\right)$ perchè, in caso contrario, lo stesso ragionamento fatto nel caso che valga la (α) porterebbe a $w' = w'' = w''' = (0, 0)$ quasi-ovunque su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$.

³⁶⁾ Questo sistema è risolubile perchè in caso contrario d' e d'' risulterebbero linearmente dipendenti.

³⁷⁾ Cioè a modulo nullo.

Si potranno determinare le costanti $c_1 c_2 c_3$, in modo che il vettore

$$\int_{\mathfrak{D}} [d_1(Q) + c_1 w'(Q) + c_2 w''(Q) + c_3 w'''(Q)] * F(P, Q) ds_Q$$

coincida col vettore \mathbf{u} . In virtù del teorema V basterà imporre le condizioni

$$\mathbf{u}(P_0) = \int_{\mathfrak{D}} [d_1(Q) + c_1 w'(Q) + c_2 w''(Q) + c_3 w'''(Q)] * F(P, Q) ds_Q$$

$$[\mathbf{u}(P_1) - \mathbf{u}(P_2)] \times \mathbf{p} = \left[\int_{\mathfrak{D}} [d_1(Q) + c_1 w'(Q) + c_2 w''(Q) + c_3 w'''(Q)] * [F(P_1, Q) - F(P_2, Q)] ds_Q \right] \times \mathbf{p}$$

essendo P_0, P_1, P_2 tre punti interni a \mathfrak{D} distinti da P', P'', P''' e \mathbf{p} un versore fissato.

Il teorema è così completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE. - Nel n. 5) si è dimostrata l'equivalenza tra la classe dei potenziali di semplice strato elastico e la classe dei vettori di tipo (55) con « densità » sommabili. Il precedente teorema VII dà quindi anche una caratterizzazione della classe $\{\mathbf{u}\}$ mediante la classe dei potenziali di semplice strato elastico a « densità » sommabile.

La caratterizzazione ora data della classe $\{\mathbf{u}\}$ permette, in virtù di quanto dimostrato nel n. 4), di arrivare al seguente teorema di esistenza per il secondo problema al contorno nella classe $\{\mathbf{u}\}$:

TEOREMA VIII - Assegnato su \mathfrak{D} il vettore \mathbf{t} sommabile e soddisfacente alle condizioni (4) o (5), esiste un vettore \mathbf{u} di $\{\mathbf{u}\}$ per il quale si ha, quasi-ovunque su \mathfrak{D}

$$\lim_{P \rightarrow M(\text{su } \mathfrak{M}^+)} L^M[\mathbf{u}(P)] = \mathbf{t}(M).$$

Tale vettore è determinato a meno di un vettore costante o di un vettore del tipo $[a\eta + b, -a\xi + c]$ secondo che $k\epsilon\lambda$ soddisfano la (α) o la (β).

Si è qui conseguito il teorema di esistenza in $\{u\}$ per il secondo problema con dato al contorno sommabile. Un teorema di esistenza in $\{u\}$ per lo stesso problema è stato dimostrato da G. Fichera, ma in ipotesi per il dato t più restrittive³⁸⁾.

9. Teoremi di unicità per i problemi di tipo misto. -

Indichiamo con $[u]$ la sottoclasse dei vettori di $\{u\}$ per i quali i corrispondenti vettori m e t sono di quadrato sommabile su $\mathcal{F}\mathcal{D}$. Con $[v]$ indichiamo la classe dei vettori di tipo (55) con « densità » d di quadrato sommabile su $\mathcal{F}\mathcal{D}$. Lo stesso ragionamento del teorema VII permette di caratterizzare la classe $[u]$ mediante la classe $[v]$. È tale caratterizzazione che permette di dimostrare nella classe $[u]$ nuovi teoremi di unicità per i problemi al contorno tipici, teoremi che riguardano soprattutto il cosiddetto problema al contorno di tipo misto e che non rientrano in quelli già dimostrati da G. Fichera per il primo e secondo problema al contorno³⁹⁾.

Dimostriamo a tal fine, con ragionamento analogo a quello dovuto a C. Miranda⁴⁰⁾, il

TEOREMA IX. - Per ogni vettore v della classe $[v]$ sussiste in \mathcal{D} la formula

$$(59) \quad \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} v \times L[v] ds = - \int_{\mathcal{D}} \left[k (\operatorname{div} v)^2 + \sum_1^2 |\operatorname{grad} v_i|^2 + 2\lambda \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial y} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \right] d\tau.$$

Detti m e t i vettori definiti su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ da

$$(60) \quad m(M) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} d(Q) * F(M, Q) ds_Q$$

$$(61) \quad t(M) = - \pi d(M) + \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} d(Q) * L_M[F(M, Q)] ds_Q$$

³⁸⁾ Cfr. [5] n. 3 cap. V.

³⁹⁾ Cfr. [5] e [4].

⁴⁰⁾ Cfr. [14] cap. IV, teor. 31, IX.

sia $\{d_n\}$ una successione di vettori hölderiani su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ che converge in media a $d(Q)$. Posto.

$$(62) \quad v_n(P) = \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} d_n(Q) * F(P, Q) ds_Q$$

siano m_n e t_n i vettori, analoghi a m e t , relativi a v_n . Introdotta nell'insieme dei vettori di quadrato sommabile su $\mathcal{F}\mathcal{D}$

la norma $\|u\| = \left\{ \int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} |u|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}}$, si prova, in virtù di limitazioni

note ⁴¹⁾, che le successioni $\{m_n\}$ e $\{t_n\}$ convergono in media su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ ai vettori m e t rispettivamente, ciò sfruttando le (8) e (12). Similmente si prova la convergenza in media in \mathcal{D} ,

rispetto alla norma $\|u\| = \left\{ \int_{\mathcal{D}} |u|^2 d\tau \right\}^{\frac{1}{2}}$, delle derivate prime di

v_n verso le analoghe derivate di v , questo per classici risultati ⁴²⁾ tenuto conto che per le derivate prime dei vettori $F^h(P, Q)$ valgono limitazioni analoghe alle (12).

D'altra parte per i vettori v_n vale la formula

$$\int_{\mathcal{F}\mathcal{D}} m_n \times t_n ds = - \int_{\mathcal{D}} \left[k(\operatorname{div} v_n)^2 + \sum_1^2 |\operatorname{grad} v_{i,n}|^2 + \right. \\ \left. + 2\lambda \left(\frac{\partial v_{2,n}}{\partial x} \frac{\partial v_{1,n}}{\partial y} - \frac{\partial v_{2,n}}{\partial y} \frac{\partial v_{1,n}}{\partial x} \right) \right] d\tau.$$

Un semplice passaggio al limite prova allora il teorema.

Dal teorema IX discendono, come corollari, i seguenti teoremi di unicità:

TEOREMA X. - *Decomposta $\mathcal{F}\mathcal{D}$ in due insiemi disgiunti $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ e $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ di misura positiva, se vale la condizione (a) o la (b), esiste in $[u]$ solo il vettore nullo soddisfacente alle*

$$(63) \quad \lim_{P \rightarrow M(\operatorname{su} \mathcal{F}_1\mathcal{D})} u(P) = (0, 0) \text{ quasi-ovunque su } \mathcal{F}_1\mathcal{D}$$

$$(64) \quad \lim_{P \rightarrow M(\operatorname{su} \mathcal{F}_2\mathcal{D})} L^M[u(P)] = (0, 0) \text{ quasi-ovunque su } \mathcal{F}_2\mathcal{D}.$$

⁴¹⁾ Cfr. [14] cap. II, teor. 12, VII.

⁴²⁾ Cfr. [14], Cap. II.

TEOREMA XI. - Se $h(M)$ è una funzione quasi-continua e limitata su $\mathcal{F}\mathcal{D}$ mai negativa e tale che l'insieme dei punti nei quali $h(M) > 0$ ha misura positiva, se \mathbf{u} appartiene ad $[\mathbf{u}]$ ed è tale che

$$(65) \quad \lim_{P \rightarrow M(\text{su } \kappa_M^+)} \{L^M[\mathbf{u}(P)] - h(M)\mathbf{u}(P)\} = (0, 0) \quad \text{quasi-ovunque su } \mathcal{F}\mathcal{D}$$

allora $\mathbf{u} \equiv (0, 0)$ in \mathcal{D} , nell'ipotesi che λ e k soddisfino la (α) o la (β).

TEOREMA XII. - Decomposta $\mathcal{F}\mathcal{D}$ in due insiemi disgiunti $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ e $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$ di misura positiva, se $h(M)$ è la funzione di cui al teorema precedente definita ora su $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$, se \mathbf{u} appartiene a $[\mathbf{u}]$ e soddisfa alle

$$(66) \quad \lim_{P \rightarrow M(\text{su } \kappa_M^+)} \mathbf{u}(P) = (0, 0) \quad \text{quasi-ovunque su } \mathcal{F}_1\mathcal{D}$$

$$(67) \quad \lim_{P \rightarrow M(\text{su } \kappa_M^+)} \{L^M[\mathbf{u}(P)] - h(M)\mathbf{u}(P)\} = (0, 0) \quad \text{quasi-ovunque su } \mathcal{F}_2\mathcal{D}$$

allora $\mathbf{u} \equiv (0, 0)$ in \mathcal{D} , nell'ipotesi che k e λ soddisfino la (α) o la (β).

10. Teoremi di completezza. - Il sistema (52) può tradursi in diversi modi in un equivalente sistema di equazioni integrali di Fischer-Riesz ⁴³). Per i sistemi di vettori che permettono questa traduzione, in virtù del teorema di inversione e dei teoremi di unicità del numero precedente, sarà possibile dimostrare dei nuovi teoremi di completezza hilbertiana che si aggiungono a quelli già dimostrati da G. Fichera ⁴⁴).

Sia \mathcal{D}' un dominio contenente \mathcal{D} nel suo interno e $\{g_n(P)\}$ un sistema di vettori continui in $\mathcal{D}' - (\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D})$, completo nella totalità dei vettori continui in $\mathcal{D}' - \mathcal{D}$. Si può assumere il sistema $\{\omega_n\}$ dei vettori che hanno la prima o la seconda componente costituita da un monomio e l'altra componente nulla, cioè tutti i vettori del tipo $(x^\alpha y^\beta, 0)$ e $(0, x^{\alpha_1} y^{\beta_1})$.

⁴³) Cfr. [3] e [4].

⁴⁴) Cfr. [4].

Posto allora

$$v_n(P) = \int_{\mathfrak{D} - \mathfrak{D}} w_n(Q) * S(P, Q) d\tau_Q$$

il sistema (52) equivale al sistema

$$(68) \quad \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} \{ m(Q) \times L[v_n(Q)] - t(Q) \times v_n(Q) \} ds_Q = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Oppure si consideri un sistema $\{V_n\}$ di soluzioni polinomiali omogenee del sistema (1), di vettori cioè aventi per componenti polinomi omogenei⁴⁵). Questo sistema goda delle proprietà che un numero finito qualunque dei suoi vettori sono sempre linearmente indipendenti e ogni soluzione polinomiale di (1) si può ottenere come combinazione lineare di un numero finito di vettori del sistema. Il sistema (52) è allora equivalente al seguente

$$(69) \quad \int_{\mathfrak{F}\mathfrak{D}} \{ m(Q) \times L[V_n(Q)] - t(Q) \times V_n(Q) \} ds_Q = 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

Sussistono i seguenti teoremi di completezza:

TEOREMA XIII - *Decomposta $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$ in due insiemi disgiunti di misura positiva $\mathfrak{F}_1\mathfrak{D}$ e $\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}$ i sistemi di vettori $\{W_n(Q)\}$ e $\{W'_n(Q)\}$ così definiti*

$$W_n(Q) = \begin{cases} v_n(Q) & \text{su } \mathfrak{F}_1\mathfrak{D} \\ L[v_n(Q)] & \text{su } \mathfrak{F}_2\mathfrak{D} \end{cases} \quad W'_n(Q) = \begin{cases} V_n(Q) & \text{su } \mathfrak{F}_1\mathfrak{D} \\ L[V_n(Q)] & \text{su } \mathfrak{F}_2\mathfrak{D} \end{cases}$$

per $ke\lambda$ soddisfacenti la (a) o la (b), sono hilbertianamente completi su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$.

TEOREMA XIV. - *Se $h(M)$ è la funzione introdotta nel teorema XI, i sistemi di vettori $\{L[v_n(Q)] - h(Q)v_n(Q)\}$ e $\{L[V_n(Q)] - h(Q)V_n(Q)\}$, sono hilbertianamente completi su $\mathfrak{F}\mathfrak{D}$, nell'ipotesi che $ke\lambda$ soddisfino la (a) oppure la (b).*

⁴⁵) Cfr. [4] e [5].

TEOREMA XV. - *Decomposta $\mathcal{F}\mathcal{D}$ in due insiemi disgiunti di misura positiva $\mathcal{F}_1\mathcal{D}$ e $\mathcal{F}_2\mathcal{D}$, se $h(Q)$ è la funzione introdotta nel teorema XII, i sistemi di vettori $\{P_n\}$ e $\{P'_n\}$ così definiti*

$$P_n(Q) = \begin{cases} v_n(Q) & \text{su } \mathcal{F}_1\mathcal{D} \\ L[v_n(Q)] - h(Q)v_n(Q) & \text{su } \mathcal{F}_2\mathcal{D} \end{cases}$$

$$P'_n(Q) = \begin{cases} V_n(Q) & \text{su } \mathcal{F}_1\mathcal{D} \\ L[V_n(Q)] - h(Q)V_n(Q) & \text{su } \mathcal{F}_2\mathcal{D} \end{cases}$$

sono hilbertianamente completi su $\mathcal{F}\mathcal{D}$, nell'ipotesi che $ke\lambda$ soddisfino la (α) oppure la (β).

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. AMERIO: *Sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico*. Amer. Journ. of. Math., Vol. LXIX, 1947, pp. 447-489.
- [2] G. FICHERA: *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni*. Annali di Matem. pura e appl., s. 4, t. XXVII, 1948, pp. 1-28.
- [3] G. FICHERA: *Sull'equilibrio di un corpo elastico, isotropo, omogeneo*. Rendic. Semin. Mat. Univ. di Padova, vol. 1948, pp. 9-28.
- [4] G. FICHERA: *Sui problemi analitici della elasticità piana*. Rendic. Semin. Facoltà di Scienze di Cagliari, 1948, vol. XVIII, pp. 1-22.
- [5] G. FICHERA: *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno relativi all'equilibrio di un corpo elastico*. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. III, vol. IV, 1950, pag. 36-100.
- [6] G. GIRAUD: *Équations à intégrales principales. Étude suivie d'une application*. Ann. École Norm. Sup., t. 51, 1934, pp. 251-372.
- [7] G. GIRAUD: *Sur une classe d'équations linéaires ou figurent des valeurs principales d'intégrales simples*. Ann. École Norm. Sup., 3^e serie, t. 56, 1939, pp. 119-172.
- [8] G. GIRAUD: *Nouvelle méthode pour traiter certains problèmes relatifs aux équations du type elliptique*. Journ. de Math., 18, 1939, pp. 111-143.

- [9] A. KORN: *Solutions générale du problème d'équilibre dans la théorie de l'élasticité, dans le cas ou efforts sont donnés à la surface.* Annales, Toulouse, Université (1908).
- [10] E. MAGENES: *Sui problemi di derivata obliqua regolare per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.* Ann. di Mat. pura e appl., s. IV, t. XL, 1955, pp. 143-160.
- [11] E. MAGENES: *Sulla teoria del potenziale.* Rendic. Sem. Mat. Univ. di Padova, vol. XXIV, 1955, pp. 510-522.
- [12] E. MAGENES: *Sul teorema dell'alternativa nei problemi misti per le equazioni lineari ellittiche del secondo ordine.* Ann. della Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. III, vol. IX, 1955, pp. 161-200.
- [13] S. G. MIHLIN: *Singular integral equations.* Uspeki Mat. Nauk. (N.S.), 3 n. 3 (25), 1948 pp. 29-112. Traduz. inglese nelle «Translations» dell'Americ. Mat. Soc. n. 24.
- [14] C. MIRANDA: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* Springer, Verlag, Berlin, 1955.
- [15] N. I. MUSKHELISHVILI: *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.* Groningen, Holland, 1953.
- [16] C. W. OSEEN: *Contributions à la théorie analytique des marées.* Arkiv for Mat. Astr. Fys., b. 25, A. n. 24, 1937, pp. 1-39.
- [17] M. PICONE: *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali.* Rendic. Acc. Lincei, s. VIII, vol. II, 1947, pp. 1-23.